Kepler und seine Zeit

Kepler und seine Zeit

Zum 350. Jahre nach dem Tode Johannes Keplers (1571-1630)

Hilmar Duerbeck und Waltraut Seitter
erweitert von Eugen Willerding

1980/2025

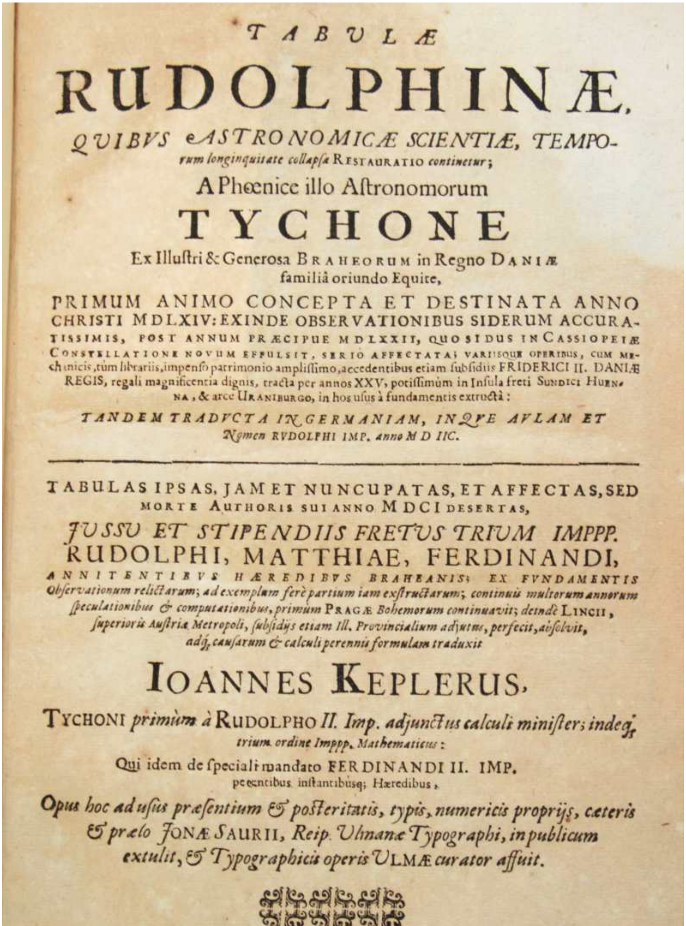
Kepler schenkte 1620 seinem Freund Matthias Bernegger aus Straßburg ein Ölgemälde von sich. Auch wenn das Gemälde laut Keplers eigenem Bekunden mit seinem wirklichen Aussehen nur wenig gemein hat, so ist es doch eine zeitgenössische Darstellung Keplers in Linz. Das Cover zeigt eine künstlerische Kopie des Straßburger Originals von August Köhler (1881-1964) aus dem Jahre 1910.

Einführung

Ein Bild sagt mehr als tausend Worte - die alte Weisheit trifft in besonderem Maße für das Titelkupfer von Keplers *Rudolphinischen Tafeln* zu: In dieser Allegorie ist die Geschichte der Astronomie von den chaldäischen Anfängen bis ins 17. Jahrhundert abzulesen. Das Werk Keplers bringt die Zusammenfassung und Überhöhung aller früheren Arbeiten, so wie das Dach den Tempelbau abschließt.

Das Hauptkapitel der alten Astronomie, die Suche nach den Gesetzen der Planetenbewegung, ist in der Tat mit Kepler und seinen drei Planetengesetzen abgeschlossen. Aber so wie die Figuren auf dem Tempeldach, versehen mit Attributen, die Keplers wissenschaftliche Werke symbolisieren, in die Ferne weisen, so ist Keplers Werk gleichzeitig der Anfang einer neuen Astronomie, die mit Teleskopen und Logarithmen ausgestattet ist, die nicht nur fragt, wie die Bewegungen der Himmelskörper ablaufen, sondern welche physikalischen Kräfte die Ursachen der Bewegungen sind.

Vielbändige Werke über Kepler und zahllose Keplerfeiern zu immer neuen Anlässen rufen uns sein Bild immer wieder ins Gedächtnis. Trotzdem erscheint er oft überschattet von seinem großen Vorgänger Copernicus, seinem größeren Nachfolger Newton und seinen kraftvollen Zeitgenossen Galilei. Ein bebilderter Gang anhand des Astronomischen Tempels durch die Astronomiegeschichte mag helfen, einige der Schatten zu vertreiben.



TABULÆ

RUDOLPHINÆ,

QVIBVS ASTRONOMICÆ SCIENTIÆ, TEMPO-
rum longinquitate collapsa RESTAURATIO continetur;

A Phœnice illo Astronomorum

TYCHONE

Ex Illustri & Generosa BRAHEORUM in Regno DANIÆ
familiâ oriundo Equite,

PRIMUM ANIMO CONCEPTA ET DESTINATA ANNO
CHRISTI MDLXIV: EXINDE OBSERVATIONIBUS SIDERUM ACCURA-
TISSIMIS, POST ANNUM PRÆCIPUE MDLXXII, QUO SIDUS IN CASSIOPEIÆ
CONSTELLATIONE NOVUM EFFULSIT, SERIO AFFECTATA; VARIISQUE OPERIBUS, CUM ME-
chanicis, tùm librariis, impenso patrimonio amplissimo, accedentibus etiam subsidiis FRIDERICI II. DANIÆ
REGIS, regali magnificentia dignis, tracta per annos XXV, potissimùm in Insula freti SUNDICI HUEN-
NA, & arce URANIBURGO, in hos usus à fundamentis extructâ:

TANDEM TRADVCTA IN GERMANIAM, INQVE AVLAM ET
Nomen RVDOLPHI IMP. anno M D IIC.

TABULAS IPSAS, JAM ET NUNCUPATAS, ET AFFECTAS, SED
MORTE AUTHORIS SUI ANNO MDCI DESERTAS,

JUSSU ET STIPENDIIS FRETUS TRIUM IMPPP.
RUDOLPHI, MATTHIAE, FERDINANDI,
ANNITENTIBVS HÆREDIBVS BRAHEANIS; EX FVNDAMENTIS
Observationum relictarum; ad exemplum ferè partium iam exstructarum; continuis multorum annorum
speculationibus & computationibus, primùm PRAGÆ Bohemorum continuavit; deinde LINCII,
superioris Austriæ Metropoli, subsidijs etiam Ill. Provincialium adjutus, perfecit, absolvit,
adq; causarum & calculi perennis formulam traduxit

IOANNES KEPLERUS,

TYCHONI primùm à RUDOLPHO II. Imp. adjunctus calculi minister; indeq;
trium ordine Imppp. Mathematicus:
Qui idem de speciali mandato FERDINANDI II. IMP.
petentibus instantibusq; Hæredibus,
Opus hoc ad usus præsentium & posteritatis, typis, numericis proprijs, cæteris
& prælo JONÆ SAURII, Reip. Ulmanæ Typographi, in publicum
extulit, & Typographicis operis ULMÆ curator affuit.

Cum Privilegiis IMP. & Regum Rerúmq; publ. vivo TYCHONI ejúsq; Hæredibus,
& speciali Imperatorio, ipsi KEPLERO concesso, ad anno XXX.

ANNO M DC XXVII.

Fig. 1: *Das Titelblatt der Rudolphinischen Tafeln (Ulm 1627)*

Fig. 2: *Der Astronomische Tempel als zehneckiger Säulenbau (Dekagon): Buchdeckel der Tabulae Rudolphinae (Ulm 1627)*

Tabulae Rudolphinae (1627)

Gegen Ende seines turbulenten Lebens veröffentlichte Johannes Kepler im Jahre 1627 in Ulm sein letztes großes Werk, die *Tabulae Rudolfinae (Rudolfinische Tafeln)*. Hier werden die Bewegungen der Planeten mit einer Genauigkeit berechnet, welche die alten Ephemeriden nach Ptolemaios um den Faktor 30 übersteigen. Einen Merkurtransit vor der Sonne für den 7. November 1631 konnte Kepler posthum durch seine Tafeln voraussagen.

Auf dem Frontispiz ist ein astronomischer Tempel abgebildet. Die drei Teile dieses Tempelbaus sind drei Aspekten der Astronomiegeschichte zugeordnet. Der Sockel berichtet von den Vorarbeiten und der Entstehung der Rudolphinischen Tafeln. Der Säulenbau ist der Geschichte der Astronomie von den Chaldäern bis Tycho gewidmet, dessen Planetensystem an der Unterseite des Tempeldaches dargestellt ist. Das Dach selbst trägt die Symbole der Arbeiten Keplers und der Urania, die Göttin der Astronomie. Über allem schwebt der Reichsadler, der goldene Dukaten speit - eine Wunschvorstellung Keplers: daß der Kaiser auch für die Arbeiten zahlen möge.

Der Säulenbau

Die Frühzeit mit Beiträgen der Babylonier bis zu Aratos

Die zehn Säulen des Tempels in Form eines Dekagon sind sichtbar. Im Hintergrund erinnern uns grob aus Holz gezimmerte Säulen an die ersten Jahrhunderte der Astronomie. Eine Gestalt in alter Tracht, die entlang ihres ausgestreckten Arms über die Kappen ihrer Finger zwei Sterne anvisiert, symbolisiert den ersten Astronomen mit seinen ersten Instrumenten: der menschlichen Hand und dem menschlichen Auge. Fortschritte auf dem Gebiet der Astronomie deuten die beiden nächsten Säulen an: rauh behauene Steinsäulen ersetzen die unbearbeiteten hölzernen Säulen. Mit den einfachen, schon mit Sockel und Kapitell versehenen Säulen, die sich anschließen, sind schon Namen verbunden. Auf der rechten Seite wird des METON gedacht, der im 5. vorchristlichen Jahrhundert lebte und die erste genauere Bestimmung der Länge des Sonnenjahres machte. Berühmt wurde er durch die Einführung des metonischen Zyklus, den er bei genauer Kenntnis der Jahreslänge einführen konnte: die Zeiteinheit, die ein ganzzahliges Vielfaches sowohl des Sonnenjahres wie des Mondmonates ist. Mit der Genauigkeit, mit der diese Daten zur Zeit Metons bekannt waren, ließen sich im Zyklus 19 Jahre und 235 Monate vereinigen. Die kreisförmige Tafel mit einem 19-fach geteilten Ring an der Säule Metons symbolisiert den Zyklus. Dazu kommt im Inneren dieses Ringes das Bild von Krebs und Löwe, dazwischen die Sonne. Die Jahreslänge hatte METON durch das Beobachten der *Solstitien* bestimmt, an denen zur Zeit Metons die Sonne zwischen Krebs und Löwe stand.

Der antike griechische Autor ARATOS VON SOLOI (Ἄρατος ὁ Σολεύς) (?310 - 245), dessen Namen die erste beschriftete Säule auf der linken Seite trägt, lebte in der ersten Hälfte des dritten vorchristlichen Jahrhunderts. Er war ein Dichter, kein Astronom. Berühmt wurde er durch sein astronomisches Gedicht, die **Phainomena** (Himmelserscheinungen), eine populäre Darstellung der Phainomena des Mathematikers und Astronomen EUDOXOS VON KNIDOS (Εὔδοξος), der seine Beschreibung des Himmels 100 Jahre früher verfasst hatte. Das Gedicht galt über Jahrhunderte als Lehrbuch des gebildeten Laien. EUDOXOS VON KNIDOS hat auch als erster eine Theorie der Planetenbewegung entworfen, die homozentrischen Sphären, und kann damit als direkter Vorgänger Keplers gelten. Mit dem Armillarsphären-ähnlichen Gebilde an dieser Säule ist wohl eine Art Planetarium dargestellt, dessen sieben Kreise die sieben alten Planeten im homozentrischen System darstellen. So ist mit dieser Säule gleichzeitig des EUDOXOS gedacht.

Die Giganten des klassischen Altertums: Hipparchos und Ptolemaios

Der Säule des ARATOS folgt die Säule des griechischen Astronomen HIPPARCHOS VON NICÄA(Ἵππαρχος) (?190 - ?120). Er ist der erste, der selbst im Bilde dargestellt wird, seine gefüllten Hände den anderen Gestalten auf der Vorderseite des Tempels entgegengerichtet. HIPPARCH, der im zweiten vorchristlichen Jahrhundert lebte, gilt als der größte unter

Fig. 3: *Links Hipparchos, rechts Ptolemaios am Fuß der entsprechenden Säulen im Frontispiz von Keplers* ***Rudolphinischen Tafeln*** *.*

den antiken Astronomen. Die geometrische Lösung der Planetentheorie mit Kreisen und Epizykeln geht auf ihn zurück. Wichtiger noch sind seine Sternbeobachtungen. Aus dem Vergleich der von den Chaldäern überlieferten mit Messungen, die 160 Jahre früher gemacht worden waren, erkannte er die Bewegung des Frühlingspunktes: *die Präzession.* Um noch genauere Bestimmungen dieses Phänomens zu ermöglichen und eventuelle Bewegungen und Helligkeitsänderungen von Sternen in Zukunft ableiten zu können, stellte Hipparch einen Sternkatalog zusammen, in dem zum erstenmal neben genauen Sternpositionen auch Sternhelligkeiten verzeichnet sind, vermessen nach einer von ihm eingeführten und noch heute benutzten Skala. An dieses Werk erinnert der Fixsternkatalog, den er in der rechten Hand hält. Das versiegelte Testament in der linken Hand symbolisiert das große Erbe, das die späteren Astronomen mit dem Katalog des Hipparch angetreten haben. Dazu sagt der römische Gelehrte Plinius der Ältere (24 - 79 beim Vesuvausbruch) in seiner Naturgeschichte: *Hipparch hat den Himmel denen vererbt, die fähig sind, ihm nachzufolgen.* Der Himmelsglobus an der Säule des Hipparch stellt ein wichtiges Hilfsmittel des Astronomen dar.

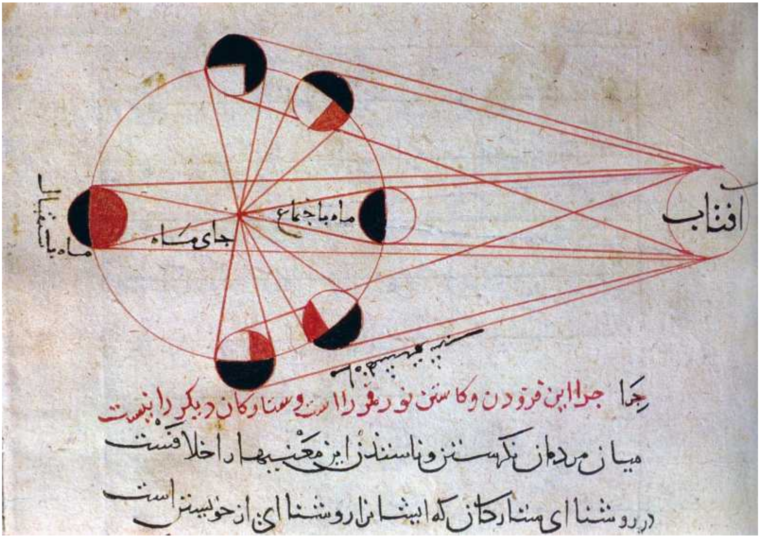


Fig. 4: *Al-Birūni (973-1048) erklärt im ‚Kitab al-Tafhim' die Phasen des Mondes. Al-Biruni war ein persischer (choresmisch - mitteliranischer) Universalgelehrter. Er schrieb etwa 146 Bücher mit geschätzten 13.000 Seiten Umfang und tauschte sich mit Kollegen wie Avicenna (Ibn Sina) in Briefen aus.*

Sein berühmtester Nachfolger im Altertum ist Ptolemaios, der an der ersten vor der Säule der rechten Seite sitzt. Er schreibt, neben sich das schon vollendete Hauptwerk, die μεγάλη σύνταξις, die große Syntaxis, bei der von megale (groß) über megista (des Größten) und den arabischen Artikel al der Name *Almagest* wurde, unter dem das Buch mit den Arabern nach Europa kam. Vor ihm liegt das berühmte *Ptolemaios-Problem*, das dem Kreis eingezeichnete Sehnenviereck, mit dessen Hilfe Sehnen und Diagonalen durch eine algebraische Relation einander zugeordnet werden, eine fundamentale Grundlage der Trigonometrie, die von Ptolemaios benutzt und im 10. Kapitel seiner Syntaxis beschrieben wurde.

Bezeichnet man in der Ebene vier Punkte durch entsprechende vier komplexe Zahlen z_n, so gilt ganz allgemein

$$(z_1 - z_3)(z_2 - z_4) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_4) + (z_3 - z_2)(z_1 - z_4) = 0.$$

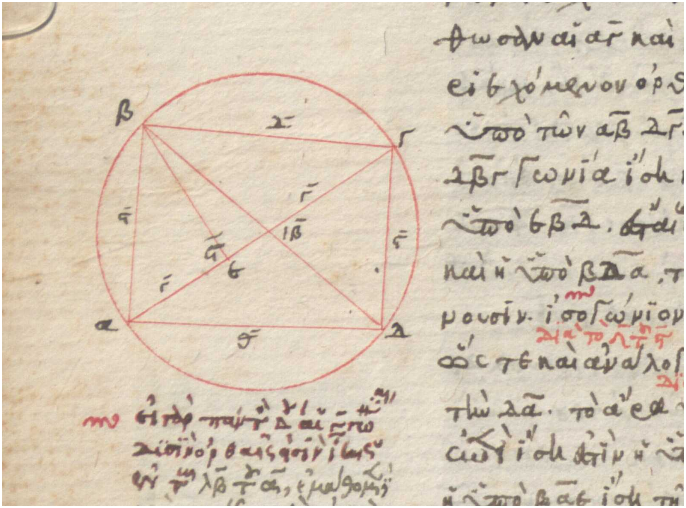


Fig. 5: *Das Theorem von Ptolemaios im Almagest: Die Summe der Produkte gegenüberliegender Seiten in einem Sehnenviereck ist gleich dem Produkt ihrer Diagonalen. Der Satz des Pythagoras ist ein Spezialfall. Auch* COPERNICUS *und* KEPLER *benutzten diesen wichtigen geometrischen Satz für unterschiedliche Problemstellungen.*

Spezialisiert man hier auf $z_n = e^{\imath\,\theta_n}$, wo die θ_n gegen den Uhrzeigersinn im Einheitskreis gezählt werden, so kann die obige Identität in der Form

$$\begin{aligned}\sin\left[\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\right]\sin\left[\frac{\theta_4-\theta_2}{2}\right] &= \sin\left[\frac{\theta_3-\theta_2}{2}\right]\sin\left[\frac{\theta_4-\theta_1}{2}\right]\\ &\quad+\sin\left[\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right]\sin\left[\frac{\theta_4-\theta_3}{2}\right]\end{aligned}$$

geschrieben werden. Genau dies ist in trigonometrischer Form der Satz des PTOLEMAIOS für ein Sehnenviereck, den KEPLER natürlich für sehr wichtig hielt. Für den Spezialfall eines Rechteckes ergibt sich der Satz des PYTHAGORAS.

Das Astrolabium an der Säule erinnert an das erste Kapitel des fünften Buches der Syntaxis, in dem PTOLEMAIOS die Konstruktion einer Anzeigetafel beschreibt, mit der er vor allem die zweite Ungleichheit des Mondes, die *Evektion*, gemessen hatte. Theoretisch erklärt er die Ungleichheit in der Mondbewegung durch Exzenter und Epizykel. Die Tafel, die an der Säule hängt, stimmt zu einer großen selbständigen Leistung, die Mondtheorie.

Zwei Sternkarten sind der Übersetzung des Ptolemaios aus dem Jahre 1551 beigegeben: die Darstellung des nördlichen und des südlichen Sternhimmels. Die Karten von Johann Honter lehnen sich stark an Dürer an, dessen holzgeschnittene Himmelskarten zu den frühesten gehören, die wir kennen. Vor dem 16. Jahrhundert wurden fast ausschließlich einzelne Sternbilder dargestellt oder Globen verwendet. Erst die Möglichkeit, Projektionen zu entwerfen, erlaubte die Darstellung der Himmelshälften.

Fig. 6: *Der Mittelbau des astronomischen Tempels mit den bedeutendsten Gelehrten des Altertums und des 16. Jahrhunderts*

Die Giganten des 16. Jahrhunderts: Nicolaus Copernikus und Tycho Brahe

Europas große Beiträge zur Astronomie beginnen im 15. Jahrhundert. Johannes Müller (1436-1476) aus Königsberg in Franken und sein

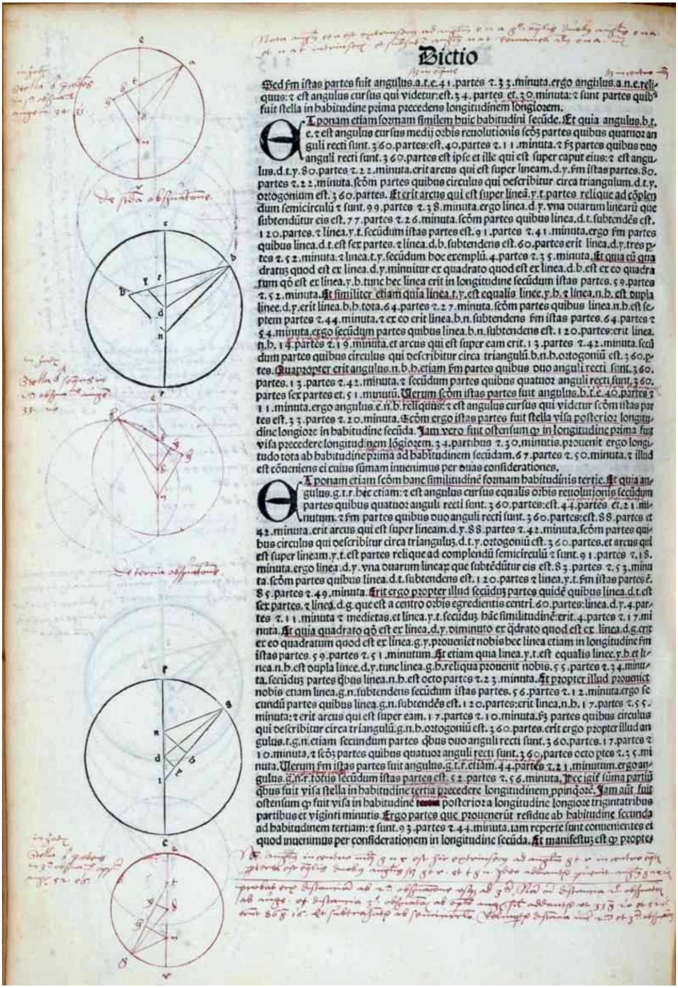


Fig. 7: *KLAUDIOS PTOLEMAIOS (?85 -?165) Druck der lateinischen Übersetzung des ALMAGEST in Venedig 1515, des wichtigsten Astronomiebuch des Altertums. Bild zeigt die Seite 116 (Universität Wien)*

Quinta 56

pars vna. Oportet igitur vt inueniamus proportionē linee.n.d.que est longitudinis solis ad lineam.n.l.que est medietas diametri terre. Faciā igitur pertransire lineam.e.b.vsq; ad r. Et quia iam declarauimus: q diameter lune in eis que narrauimus de longitudine eius magna in applicationibus/subtendit arcui orbis descripti super ipsaz/ sup centrū terre: qui erit.31.minuta ꝛ.20.secūda: sm quantitatez qua erit circulus.360.partes: ergo erit angulus.e.n.b.31.minuta ꝛ.20.secūda: sm quantitatē qua erunt q̄ttuor anguli recti.360.partes Et eius medietas: que est angulus.t.n.b.erit.31.minuta ꝛ.20.secūda: sm quātitatē qua erunt duo anguli recti.360.partes. Quapropter erit arcus qui est super lineā.t.b.31.minuta et.20.secūda: sm quantitatē qua erit circulus continens triangulum.n.b.t.orthogoniuz 360.partes. Et arcus qui est super lineā.t.n.residuum cōplemēti semicirculi erit.179.partes ꝛ.28.minuta ꝛ.40.secūda. Et chorde eorum erunt: chorda quidē.t.b.32.minuta ꝛ.48.secunda: sm quantitatē qua erit diameter.n.b.120.partes.ꝛ ppter hoc erit chorda.n.t.fere 120.partes. Cum autez fuerit linea.n.t.64.partes ꝛ.10.minuta: erit linea.t.b.sm illā q̄ntitatem.17.minuta ꝛ.33.secūda.ꝛ sm illam quantitatē erit linea.n.m.que est medietas diametri terre pars vna. Sed quia pportio linee.f.c.ad lineā.t.b.est equalis pportioni duorz ꝛ trium quintarū fere ad vnum: erit linea.f.c.sm illam quantitatē.45.minuta ꝛ.38.secūda. ergo erunt due linee.t.b.ꝛ.f.c.pars vna ꝛ tria minuta ꝛ vndecē secunda: sm quantitatē qua erit linea.m.n.pars vna. Sed ambe linee.f.c.ꝛ.t.r.scz totū sm illaz quantitatē sunt due partes: quoniā ipse sunt equales duplo.m.n. Et quia oēs linee (quemadmodum diximus) sunt equidistantes: ꝛ lineā.f.n.equatur linee.n.t: remanet ergo vt sit linea.b.r.residua.56.minuta ꝛ.49.secunda: sm quantitatē qua erit linea.n.m.pars vna.ꝛ erit pportio.n.m.ad.b.r.sicut pportio.n.g.ad.g.b.que est sicut proportio.n.d.ad.t.d. Sm quantitatē ergo qua erit linea.n.d.pars vna: erit linea.t.d.56.minuta ꝛ.49.secūda.ꝛ linea.t.n.residua sm illam quantitatem erit tria minuta ꝛ vndecē secunda, ergo sm quantitatē qua erit linea.n.t.64.partes ꝛ.10.minuta: ꝛ linea.n.m.pars vna: erit linea.n.d.que est longitudo solis.1210.partes fere. Et silr quia sm quantitatē qua erit linea.m.n.pars vna: fuit declaratū q linea.f.c ē.45.minuta.ꝛ.38.secūda.ꝛ q sicut pportio linee.n.m.ad lineā.f.c.similiter proportio linee.n.s.ad lineam.s.f. ergo sm quantitatē qua erit linea.n.s.pars vna: erit linea.f.s.45.minuta et 38.secunda.ꝛ linea.f.n.residua erit sm illam quantitatē.14.minuta ꝛ.22.secūda. sm q̄ntitatem ergo qua erit linea.f.n.64.partes ꝛ.10.minuta: ꝛ linea.n.m.medietas diametri terre pars vna: erit linea.s.f.203.partes ꝛ.50.minuta fere.ꝛ tota linea.s.n.est.268.partes. Jam ergo aggregatum est nobis: vt cum fuerit medietas diametri terre pars vna: erit sm illam quantitatē longitudo lune quidez media in applicationibus.59.partes.ꝛ longitudo solis 1210.partes.ꝛ longitudo extremitatis vmbre a centro terre.268.partes. Et illud ē quod voluimus demonstrare.

Capitulū sextumdecimū de sciētia magnitudinis corporz solis ꝛ lune ꝛ terre.

Et ex hoc leuior facta est nobis scientia magnitudinis corporuz/ per id quod scimus de pportionibus diametri solis ꝛ lune ꝛ terre. Jam enim declaratum est nobis: q sm quantitatem qua erit linea.n.m.que est medietas diametri terre pars vna: erit linea.t.b.que est medietas diametri lune.17.minuta ꝛ.33.secūda: ꝛ linea.n.t.64.partes ꝛ.10.minuta.ꝛ erit pportio.n.t.ad.t.b.sicut pportio n.d.ad.d.g: ergo sm illam quantitatē qua iam ostensum est q linea n.d est.1210.partes erit.d g.que est medietas diametri solis quintupluz medietatis diametri terre ꝛ medietas eius fere. erunt ergo pportiones diametrorz existentes ille pportōes inuēte. Scōm quantitatem igitur qua erit diameter lune pars vna: erit diameter terre tres partes ꝛ due quinte fere. Et diameter solis decē ꝛ octo partes ꝛ q̄ttuor quinte partis. Diameter ergo terre erit in longitudine triplū diametri lune ꝛ due quinte eius. Et erit diameter solis decuplū ꝛ octuplū diametri lune ꝛ quattuor quinte eius fere. Eritq; diameter solis quintuplū diametri terre ꝛ medietas eius fere. Et silr quia cubus qui erit ex multiplicatione vnius in se: deinde in se: non erit nisi vnus sm quantitatem vnius.ꝛ cubus qui erit ex multiplicatione tripli ꝛ duarum quintarū eius in se/ꝛ postea in se: erit sm illam quantitatē trigintuplum nonuplum et quarta eius fere.ꝛ cubus qui erit ex multiplicatione decupli ꝛ octupli ꝛ quattuor quintarū eius in se: deinde in se: erit sexies mille ꝛ sexcentuplū ꝛ quadragintuplū ꝛ quadruplūz ꝛ medietas eius fere: Tunc iam aggregatum est nobis: vt sm quantitatē qua erit magnitudo corporis lune pars vna: erit magnitudo corporis terre trigintuplū ꝛ nonupluz ꝛ quarta eius fere.ꝛ q magnitudo corporis solis erit sexies mille ꝛ sexcentuplū ꝛ quadragintupluz ꝛ q̄druplum: ꝛ medietas eius.ꝛ est centuplum ꝛ septuagintuplum corporis terre fere.

k 2

Fig. 8: *Lateinische Übersetzung des ALMAGEST in Venedig 1515, Seite 56: Sonnenfinsternisse und der Mond (Universität Wien)*

Freund und Mäzen Bernhard Walther (1430 - 1504) errichteten im Jahre 1472 in Nürnberg die erste Sternwarte. Den Beobachtungen, vor allem die des Merkur, werden wichtiges Ausgangsmaterial für die Arbeiten des Copernicus.

Um ihre Beiträge zu ehren, findet sich die Nische mit dem Titel *Observationes Tychonismaterni et Waltheri* an der Säule des Copernicus. Das von Regiomontan viel benutzt wurde, der *Baculus Astronomicus* oder *Jacobsstab* ist an diesem Teil der Säule angebracht.

Nikolaus Copernicus (1473-1543) gehört zu den größten und revolutionärsten Denkern in der Astronomie . Ihm ist übrigens, von seinem Werk *De revolutionibus orbium coelestium libri VI - Die sechs Bücher über die Umläufe der himmlischen Rahmen* ausgehend, nach einigen Wandlungen das heute gebräuchliche Wort *Revolution* zu verdanken. Für Copernicus wählte der Künstler eine schön verputzte, mit einem schlichten, ionischen Kapitell verzierte Säule. Das zweite Instrument, das an dieser Säule befestigt ist, ist das Triquetrum des Copernicus. Er hatte dieses Instrument aus Holz gebaut und benützte es für seine Beobachtungen.

Die Figur des Copernicus ist sitzend und mit dem vor ihm stehenden Tycho (1546-1601) diskutierend dargestellt. Er hält das fünfte Buch seines Werkes, in dem er die Bewegungen der fünf Planeten beschreibt, in der Hand. Die Planetenbewegungen sind der Gegenstand der Debatte zwischen den beiden Astronomen, die sich in Leben nie begegnet sind, da Tycho erst drei Jahre nach dem Tode des Copernicus geboren wurde.

Tycho Brahe wird mit der schönsten Säule geehrt, die ein reiches korinthisches Kapitell besitzt, ein Tribut des dankbaren Kepler an den großen Astronomen Tycho und ein Gleichklang mit den prächtigen Gewändern und dem stolz getragenen hohen Elefanten - Orden[1], der Beobachtungskleidung des Tycho.

Tychos Frage an Copernicus betrifft seine eigene Planetentheorie, die an der Decke des Astronomischen Tempels dargestellt ist. Hier ist die Erde das Zentrum der Bewegungen von Sonne und Mond, während die fünf Planeten um die Sonne kreisen.

Quid si sic?, *Wie, wenn es so wäre?*. Tycho Brahe konnte sich nicht zur vollen Annahme der kopernikanischen Lehre entschließen. Tycho Brahe war ein hervorragender Beobachter, aber kein ausgesprochen begabter Mathematiker. Seine genauen Beobachtungen, glaubt er, hätten

[1] Der Elefanten - Orden ist der höchste und älteste dänische Ritterorden

Fig. 9: *Nikolaus Copernicus (1473-1543). De revolutionibus orbium coelestium libri VI Nürnberg 1543 - Basel 1566 - Amsterdam 1617. Die drei vorliegenden Ausgaben sind die drei ersten des Hauptwerkes von Copernicus. Es enthält Beweise für die Kugelgestalt der Erde und ihre dreifache Bewegung (Rotation, Bewegung um die Sonne, konische Bewegung der Erdachse (Präzession)), Theorien der Mond-, Sonnen- und Planetenbewegung und Tafeln. De revolutionibus libri VI Faksimileausgabe des in der Universitätsbibliothek Krakau aufbewahrten Originalmanuskripts.*

die parallaktischen Verschiebungen der Sterne bei einer bewegten Erde zeigen müssen. Daher holte er KEPLER nach Prag und gab ihm den Auftrag, anhand der Daten der Marsbahn das Tychonische Bild vom Planetensystem zu bestätigen, bei der alle Planeten um die Sonne, die letztere sich aber um die Erde bewegt. Er wusste nicht, dass er die Entfernungen der Sterne weit unterschätzte und dass die tatsächlich vorhandene Parallaxe so klein ist, dass sie erst 300 Jahre nach dem Tode des Copernicus gemessen werden konnte. Seine eigenen Messungen, die besten ihrer Zeit, mit den besten Instrumenten der Zeit gemacht, waren dazu nicht fähig. Die Darstellung seiner hervorragend ausgestatteten Sternwarte findet sich in seinem Buch *Astronomiae instauratae mechanica.* Resultate seiner Beobachtungen sind als *Astronomiae instauratae progymnasmata* 1602 posthum von KEPLER herausgegeben worden . Das Buch lehnt an Tychos Säule. Zwei der Instrumente, ein Quadrant und ein Sextant, sind an der Säule befestigt. Weitere Hinweise auf die Sternwarte Tychos finden sich in Sockel des astronomischen Tempels.

Der Sockel des astronomischen Tempels

Tycho Brahes Werke

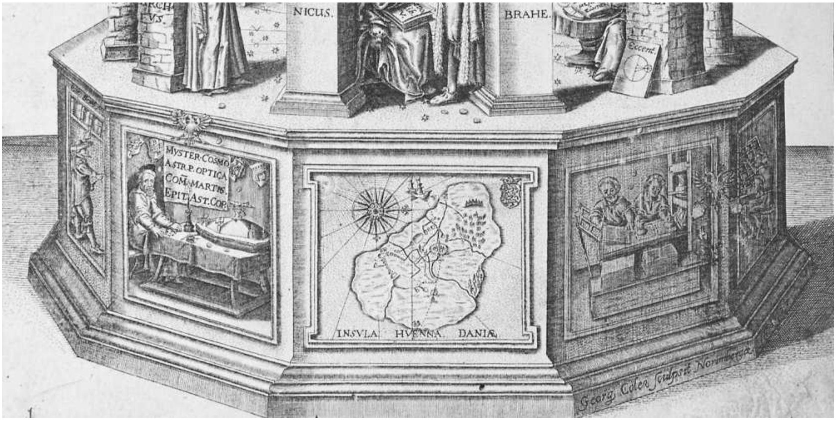


Fig. 10: *Der Sockel des astronomischen Tempels*

Das linke äußere Feld des Sockels ist noch einmal Tycho Brahe gewidmet. Die Bücher Brahes sind aufgereiht, der darüber angebrachte Schriftzug läßt sie als die seinen erkennen. Sein Sohn, wie es im Gedichte Hebenstreits zum Tempel heißt, weist auf das Erbe seines Vaters und zugleich auf Kepler, der dieses Erbe antreten soll.

Im Mittelfeld ist die Insel Hven dargestellt, auf der Tychos Observatorium stand, dessen Meridian die Bezugslinie tür seine Messungen darstellte. Zu erkennen sind Uraniborg , Hauptschloß und Sternwarte der Insel, Häuser des Dorfes, Fischteiche und ein Wäldchen. Kaum zu erkennen ist das südlich gelegene Stjerneborg, das, in die Erde eingegraben, ebenfalls als Observatorium diente.

Der Buchdruck

Die beiden äußeren rechten Tafeln geben einen Blick in die Setz- und Druckerwerkstatt. Ganz rechts sitzt der Setzer vor seinen Buchstabenkasten, daneben sind zwei Drucker am Werk, mit Farbstempel, Druckerpresse, einem Stapel onbedrucktem und einem Stapel schon bedruckten Papier. Dazu steht im Regal der Krug für den Duckerdurst. Die Wappen und der Adler zeigen an, daß die Werkstatt in Ulm steht. Im Feld links der Mitte sitzt in seiner Arbeitsstube beim Schein einer Kerze Kepler. Über ihm ist an Wappen und Buchtiteln der Weg bis zu den Rudolphinischen Tafeln abzulesen. Vor ihm auf dem Arbeitstisch steht das Tintenfass mit der Feder, liegt das Dach des Astronomischen Tempels, den er fertigzustellen bemüht war.

Verzeichnet ist sein Frühwerk *Mysterium Cosmographicum*, das Weltgeheimnis, verfasst während seiner Grazer Zeit, im Jahre 1596. Dem zugeordnet ist das Grazer Wappen in der äußersten Linken. Diese Arbeit wurde bestimmend für seinen weiteren Lebensweg, denn durch sie wurde Tyche Brahe auf den jungen Kepler aufmerksam und berief ihn als seinen Gehilfen nach Prag.

Keplers *Astronomiae Pars Optica* und seine *Astronomia Nova* erschienen in Prag in den Jahren 1604 und 1609. Die *Astronomia Nova* enthält die vorwiegend aus Tychos Marsbeobachtungen abgeleiteten beiden ersten Keplerschen Gesetze: den 1602 gefundenen Flächensatz: der Fahrstrahl zwischen Planet und Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen und den, nachmals als erstes Gesetz bezeichneten, 1604 abgeleiteten Satz, daß alle Planetenbahnen Ellipsen sind, in deren einem Brennpunkt die

Fig. 11: *Johannes Gutenberg (?1400-1468) erfand den Buchdruck mit beweglichen Lettern um das Jahr 1450 in Mainz. Sein berühmtestes Werk, die Gutenberg-Bibel, wurde zwischen 1452 und 1454 in seiner Werkstatt gedruckt.*

Sonne steht. Dieses Gesetz ist der Bruch mit der bis Copernicus und Brahe vertretenen Meinung, daß die Planetenbewegung durch Überlagerung von Kreisbewegungen zu erklären ist. Das Wappen Prags steht neben dem Wappen von Graz. Keplers *Epitome Astronomiae Copernicanae* wurde 1618 in Linz veröffentlicht, dessen Stadtwappen in der oberen rechten Ecke erscheint, neben dem Wappen von Oberösterreich.

Die wichtigsten der anderen Städte, die Kepler auf seinem Lebensweg berührte, sind Weil der Stadt, sein Geburtsort, Leonberg, wo er die Schule besuchte, und wo er später zum Hexenprozeß seiner Mutter zurückkehren musste, Tübingen, wo er Theologie studierte und zugleich bei Mästlin die Astronomie erlernte, Sagan, bei dessen Herzog Wallenstein er in Diessten stand, und schließlich Regensburg, wo er beim Reichstag auf seine Bezahlung wartend starb.

Das Säulendach

Zwölf Nymphen oder Musen am Dachrand symbolisieren die wissenschaftlichen Arbeiten Keplers. Der Poet und Gymnasialdirektor Johann Baptist Hebenstreit (?1580-1638) nennt sie bei Namen in seinem Gedicht *Idyllion*, das den Astronomischen Tempel beschreibt and die Rudolphinischen Tafeln einleitet[2]:

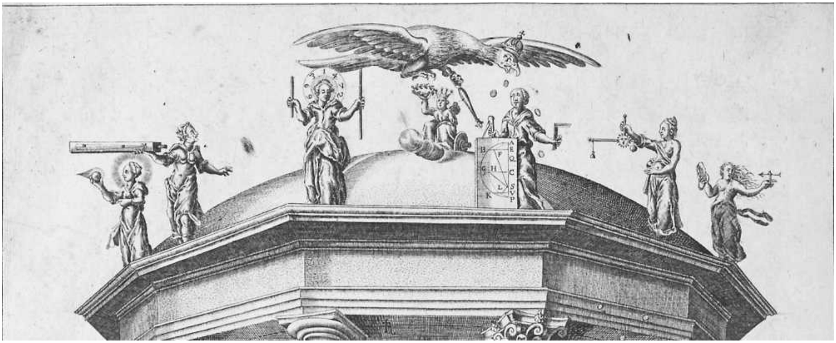


Fig. 12: *Das Dach des Astronomischen Tempels in Form eines Dekagon mit sechs sichtbaren Musen (Nymphen) (Ulm 1627)*

1. **Magnetica**, die Lehre vom Magnetismus , in dessen Kraft Kepler die Ursache für eine Anziehung zwischen Sonne und Planeten suchte.

2. **Stathmica**, die Messkunst, der Kepler mit seinen neuen Methoden zur Eichung Hohlräumen diente, besonders zo erwähnen ist dabei sein Ulmer Becher, ein Gefäß zur Eichung von Flüssigkeits- und Getreidemäßen

3. **Doctrina Triangulorum**, die Dreieckslehre mit Winkelmaß und Zirkel.

4. **Logarithmica**, die Muse der Logarithmen, die zur Zeit Keplers eingeführt wurden, and die er selber berechnet und als Tafel veröffentlicht hat

[2]Der Beschreibung liegt eine unveröffentlichte Übersetzung des Idyllion von dem mittellateinischen Philologen Paul Klopsch (1920-2012) zugrunde

5. **Optica**, die optische Lehre, die zur Konstruktion eines Teleskops führt. In seiner *Astronomia Pars Optica* entwickelt Kepler, ausgehend von der Optik der Alten, besonders des Witelo, die geometrische Optik (noch nicht mit dem richtigen Brechungsgesetz), die schließlich zur Konstruktion des Keplerschen oder astronomischen Fernrohre führt, das zwar bildumkehrend, jedoch besser abbildet als das holländische oder Galileische Fernrohr, mit den die ersten astronomischen Beobachtungen gemacht worden waren

6. **Physica Lucidi et Pellucidi, Lucis & Umbram**, die Lichttheorie, die Lehre von der atmosphärischen Brechung, von Licht und Schatten.

Den sechs sichtbaren Nymphen entsprechen sechs unsichtbare auf der rückwärtigen Seite des Tempeldachs:

7. **Geographia, Hydrographie**, die Land- und Wasserkunde betreffend. Eines der Ergebnisse Keplerscher Arbeit auf diesem Gebiet ist die große Weltkarte von 1630, die den Rudolphinischen Tafeln beigegeben ist.

8. **Computus**, die Rechenkunde, hier, die Kunst, den Kalender mit seinen religiösen Festen zu berechnen.

9. **Chronologia**, die Schwester der achten Nymphe, die ganze Epochen berechnet, die Zeit der Geburt Jesu bestimmt.

10. **Mensoria Altitudinum**, die Kunst, Sternpositionen zu vermessen oder schnell wandernden Kometen auf der Spur zu bleiben.

11. **Geometria figurata et harmonia**, die Göttin, die über den Libri V Harmonices Mundi wachte, in denen die regelmäßigen Körper, die musikalischen Harmonien und schließlich die Weltharmonik entwickelt werden. In diesem Buch findet sich als wichtigster Teil das dritte der Keplerschen Planetengesetze, das harmonische Gesetz, das das Verhältnis der Kuben der Sonnenentfernungen zweier Planeten den Verhältnis der Quadrate ihrer Umlaufzeiten gleichsetzt.

12. **Archetypia** schließlich sucht nach den Ursachen der Phänomene, den Grundlagen der Natur.

Keplers Leben und Werke

† 15.11.1630 Kepler stirbt in Regensburg

1628/1630 Kepler tritt in die Dienste Wallensteins und übersiedelt nach Sagan

1626/1627 Druck der *Rudolphinischen Tafeln* in Ulm, Keplers Jahrhundertwerk zur Berechnung der Stellung von Sonne, Mond und Planeten

1615/1621 Keplers Mutter Katharina wird wegen Hexerei angeklagt. Kepler reist wiederholt nach Württemberg, übernimmt die Verteidigung im Prozess und bewirkt ihren Freispruch.

1619 Kepler veröffentlicht sein Werk *Harmonice Mundi* mit dem dritten Gesetz der Planetenbewegung

1613 Kepler heiratet seine zweite Frau Susanne Reuttinger

1612 Ausschluss vom Heiligen Abendmahl der lutherischen Gemeinde

1612 Übersiedlung nach Linz als Mathematiker der Stände von Oberösterreich, außerdem Mathematiker der Kaiser Matthias und Ferdinand II.

1611 Kepler veröffentlicht sein Werk *Dioptrice* mit dem Konstruktionsprinzip des nach ihm benannten Fernrohrs

1611 Barbara Kepler stirbt an ‚hitzigem' Fieber

1609 In seiner *Astronomia Nova* veröffentlicht Kepler sein erstes und zweites Gesetz der Planetenbewegung

1601/1612 Nach Tycho Brahes Tod, Nachfolger als kaiserlicher Mathematiker Rudolphs II. in Prag

1600/1601 Mitarbeiter Tycho Brahes in Prag

1597 Kepler heiratet Barbara Müller

1596 Mit seinem Erstlingswerk *Mysterium Cosmographicum* begründet Kepler seinen Ruf als Astronom

1594/1600 Übersiedlung nach Graz als Lehrer an der evangelischen Stiftsschule

1591 Magisterpromotion und Beginn des Theologiestudiums. Kepler wird zum überzeugten Anhänger des heliozentrischen Weltbilds.

1589/1594 Student am evangelischen Stift der Universität Tübingen, Studium an der Philosophischen Fakultät

1587 Immatrikulation in Tübingen und Rückkehr nach Maulbronn

1584/1589 Besuch der Klosterschulen in Adelberg und Maulbronn

1576 Umzug nach Leonberg ins Herzogtum Württemberg

***27.12.1571** Geburt in der freien Reichsstadt Weil der Stadt

Keplers Arbeiten mit ihren weit gestreuten Themen geben seinen Zeitgenossen und Nachfolgern Anregung und neues Ausgangsmaterial. Keplers optische Untersuchungen (das Brechungsgesetz nach Snellius hat er noch nicht gekannt) laufen denen von Scheiner parallel, der den Bau von Fernrohren für die Sonnenfleckenbeobachtung beschreibt und die Ergebnisse seiner Beobachtung mitteilt. KEPLER beschäftigt sich auch mit der Geometrie des Regenbogens. Nach seinem Tod erscheint von R. DESCARTES (1596-1650) mit der Überschrift *Del l'Arc-en-Ciel* im Anhang Les Météores seiner philosophischen Schrift *Discours de la méthode* die endgültige geometrische Optik des Regenbogens. In der Folge erscheinen die beiden großen Bücher der Optik, HUYGENS *Traité de la lumière* und NEWTONS *Opticks.*

KEPLERs Harmonielehre findet - weniger mathematisch - bei P. M. MERSENNE (1588-1648) eine Entsprechung. KEPLERs Planetengesetze sind dem Weltbild GALILEIs voraus, dieser aber hat das Verdienst, die kopernikanische Lehre zu verbreiten (Nr. 19) und die physikalischen Gesetze abzuleiten, die Newton neben den Keplerschen Planetengesetzen braucht, um seine Mechanik und Himmelsmechanik zu entwickeln. Newtons Ergebnisse wiederum wurden durch die frühe französische Übersetzung und Popularisierung ins Frankreich des 18. Jahrhunderts getragen, in dem die großen Mathematiker dieses Landes wesentlich zum weiteren Fortschritt der Himmelsmechanik beitrugen. Das Titelkupfer in den *Elémens de la philosophie de Neuton* ist ein allegorisches Bild der Wissensvermittlung von Newton über MADAME DU CHÂTELET an VOLTAIRE.

Die Planetentafeln selbst, die *Rudolphinischen Tafeln*, stehen in einer langen Reihe von Tafelwerken, die, von verschiedenen Systemen ausgehend, versuchen, die Positionen der Planeten vorauszubestimmen. Die ältesten europäischen Tafeln sind die *Alfonsinischen*, die auf der ptolemäischen Planetentheorie basieren, gefolgt von den *prutenischen*, die die kopernikanische Lehre zum Ausgangspunkt nehmen. Cunitias, Cassinis, de la Hires und Halleys Tafeln sind Modifikationen der Keplerschen Tafeln und nehmen seine Planetengesetze als Grundlage.

Mysterium Cosmographicum (1596)

Im Jahre 1596 veröffentlichte Kepler eine Theorie über die Struktur des Planetensystems in seinem Buch *Mysterium Cosmographicum (Das Weltgeheimnis)*. Es geht um die Frage, durch welches geistiges Prinzip die relativen Abstände und die genaue Anzahl der Planeten um die Sonne bestimmt sind. Der Physiker WOLFGANG PAULI (1900–1958) schrieb in seinem Essay mit dem Titel *Der Einfluß archetypischer Vorstellungen auf die Bildung naturwissenschaftlicher Theorien bei Kepler* :

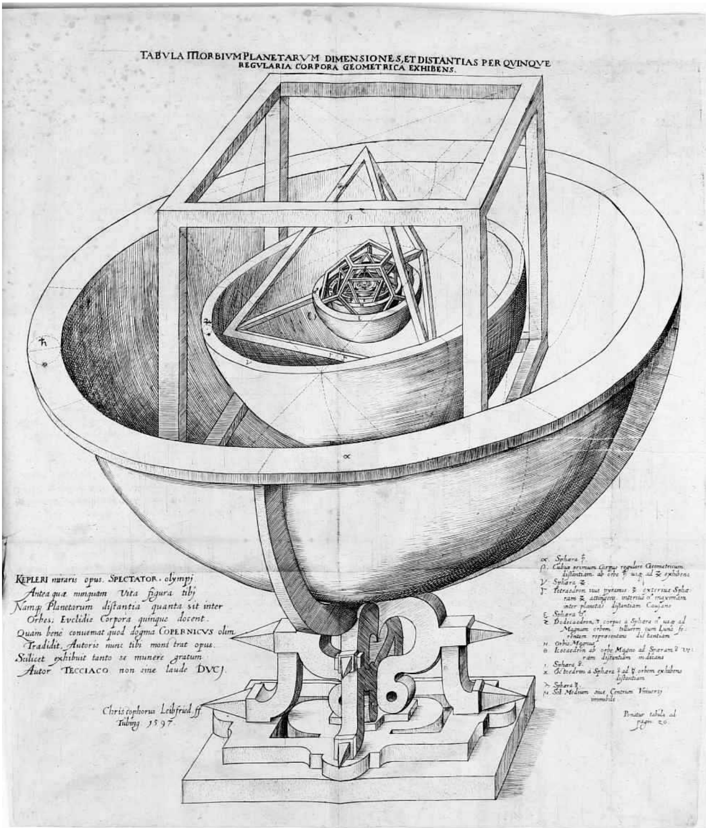


Fig. 13: *Das Mysterium Cosmographicum: Keplers jugendlicher Versuch, sowohl die genaue Anzahl als auch die radiale Bahnstruktur der Planeten zu verstehen. 1. Aufl. 1596, 2. Aufl. 1621. KEPLER war ein echter geistiger Nachkomme der Pythagoräer, der von der alten Idee der Sphärenmusik fasziniert war und der überall harmonische Proportionen suchte, in denen für ihn alle Schönheit gelegen war. Zu den höchsten Werten gehört für ihn die Geometrie, deren Sätze* ***von Ewigkeit her im Geiste Gottes sind****. Sein Grundsatz ist* ***Geometria est archetypus pulchritudinis mundi*** *(die Geometrie ist das Urbild der Weltschönheit ; zitiert nach W. PAULI)*

...Der Vorgang des Verstehens der Natur sowie auch die Beglückung, die der Mensch beim Verstehen, d.h. beim Bewusstwerden einer neuen Erkenntnis empfindet, scheint demnach auf einem zur Deckung Kommen von präexistenten inneren Bildern der menschlichen Psyche mit äusseren Objekten und ihrem Verhalten zu beruhen. Diese Auffassung der Naturerkenntnis geht bekanntlich auf Platon zurück und wird auch von Kepler in sehr klarer Weise vertreten. Dieser spricht in der Tat von Ideen, die im Geist Gottes präexistent sind und die der Seele als dem Ebenbild Gottes mit-ein-erschaffen wurden. Diese Urbilder, welche die Seele mit Hilfe eines angeborenen Instinktes wahrnehmen könne, nennt Kepler archetypisch...

Der junge Kepler versuchte zu beweisen, dass die Abstände und Umlaufbahnen der Planeten von der Sonne durch Kugeln innerhalb von Polyedern definiert sind. Wenn man diese Körper, die jeweils von einer Kugel umschlossen sind, ineinander schachtelt, ergeben sich sechs Schichten, die den sechs bekannten Planeten des kopernikanischen Weltbilds entsprechen – *Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter und Saturn.* Durch die richtige Anordnung der Körper – *Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder, Tetraeder und Würfel* – glaubte Kepler daran, dass die Kugeln den relativen Größen der Umlaufbahnen der einzelnen Planeten um die Sonne entsprechen.

Kepler sah auch die große Lücke zwischen Mars und Jupiter. Mit der Entdeckung von Uranus 1781 und Neptun 1846 war seine Idee zu einer Illusion (psychischen Projektion) geworden. Doch die darunter liegenden *Platonischen Ideen* bleiben aber auch heute weiterhin bestehen - doch sie liegen wohl tiefer. Im 18ten Jahrhundert haben dann Johann Daniel Titius (1729–1796)und Johann Elert Bode (1747-1826) eine einfache Zahlenreihe der Form[3]

$$r_n = 0.4 + 0.3 \cdot 2^n; \qquad n = \{-\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

aufgestellt und für $n = 3$ - wie schon Kepler - eine Lücke bemerkt. Um 1800 gab es in der Astronomie kein wichtigeres Thema als die Frage, ob es zwischen Mars und Jupiter noch ein weiterer *wohl sehr kleiner Planet* existiere könnte.

[3] M. Nieto: Titius-Bode Law of Planetary Distances: Its History and Theory (Monographs in Natural Philosophy). Pergamon Press 1959

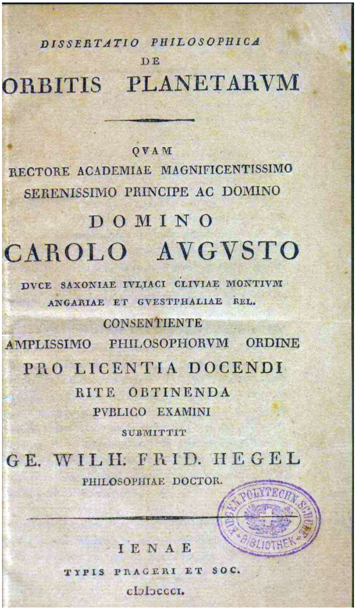
Genau um dieselbe Zeit befasste sich auch der Philosoph G.W.F.Hegel (1770-1831) in seiner Dissertation mit den Abstandsgesetzen im Sonnensystem. Als ein Idealist schrieb er in seiner *Dissertatio*:[4]

> *... die Erfahrung und Erkenntnis der Naturgesetze stützt sich ja auf nichts anderes als darauf, dass wir glauben, die Natur sei aus der Vernunft gebildet, und darauf, dass wir von der Identität aller Naturgesetze überzeugt sind. Diejenigen, die anhand von Erfahrung und Induktion nach Gesetzen forschen, nehmen jene Identität der Vernunft und der Natur dann in folgender Weise wahr: Sobald sie endgültig auf die Gestalt eines Gesetzes stoßen, freuen sie sich an dem Gefundenen, und wenn andere Erscheinungen damit schlecht zu vereinbaren sind, zweifeln sie ein wenig an den (bisherigen) Experimenten und bemühen sich auf jede Art, eine Harmonie zwischen beidem herzustellen. Dafür bietet das Verhältnis der Planetenbahnen, über das wir (hier) sprechen, ein Beispiel: Weil nämlich die Entfernungen der Planeten ein Verhältnis einer arithmetischen Entwicklung nahe legen, wobei dem fünften Glied der Entwicklung aber in der Natur kein Planet entspricht, wird vermutet, dass zwischen Mars und Jupiter tatsächlich ein gewisser (Planet) existiert, der – uns zwar unbekannt – durch den Raum zieht, und eifrig wird geforscht.*
>
> *Weil diese Entwicklung arithmetisch ist und nicht einmal einer Zahlenreihe folgt, die die Zahlen aus sich selbst schafft, also Potenzen, hat sie für die Philosophie keinerlei Bedeutung. Es ist bekannt, wie viel die Pythagoräer über Verhältnisse philosophischer Zahlen gearbeitet haben: Daher stünde frei, die überlieferte und in beiden Timaios - Schriften behandelte Zahlenreihe heranzuziehen, wo sich Timaios zwar nicht auf die Planeten bezieht, aber urteilt, dass nach diesem Verhältnis der Demiurg*[5] *das Universum gebildet habe. Die Zahlenreihe heißt 1, 2, 3, 4, 9, 16, 27: Es mag nämlich erlaubt sein, die 16*

[4]private Mitteilung von Wolfgang Neuser vom 6.12.2004; (Bd.2 der Schriften zur Naturphilosophie, hgg. v. R. Löw), Weinheim 1986, S. 137/139. Siehe auch Philosophische Dissertation über die Planetenbahnen. Lateinisch – Deutsch. Felix Meiner Verlag Hamburg 2022.

[5]griech. demiourgos : *Handwerker, Weltbaumeister*

statt der 8 zu setzen, die wir (im Timaios-Text) lesen. Falls diese Reihe die wahrhaftere Ordnung der Natur angibt als die arithmetische Reihe, dann ist klar, dass zwischen dem vierten und fünften Ort ein großer Raum liegt und dort kein Planet vermisst wird


DISSERTATIO PHILOSOPHICA
DE
ORBITIS PLANETARVM

QVAM
RECTORE ACADEMIAE MAGNIFICENTISSIMO
SERENISSIMO PRINCIPE AC DOMINO
DOMINO
CAROLO AVGVSTO
DVCE SAXONIAE IVLIACI CLIVIAE MONTIVM
ANGARIAE ET GVESTPHALIAE REL.
CONSENTIENTE
AMPLISSIMO PHILOSOPHORVM ORDINE
PRO LICENTIA DOCENDI
RITE OBTINENDA
PVBLICO EXAMINI
SVBMITTIT
GE. WILH. FRID. HEGEL
PHILOSOPHIAE DOCTOR.

IENAE
TYPIS PRAGERI ET SOC.
CIƆIƆCCCI.

Fig. 14: *Titelblatt der Disseration von* HEGEL *an der Universität Jena im August - Oktober 1801. Auf einem früheren Titelblatt wird auch der Naturphilosoph F.W.J.* SCHELLING *(1775-1854) als Beisitzer erwähnt.*

Hegels Kritik an der Titius-Bodeschen Reihe bestand darin, dass er es für sinnvoller hielt, die Zahlen der Abstandreihe *aus sich selbst entstehen zu lassen.* Tatsächlich ergibt sich die Zahlenreihe aus dem „*Timaios*“ als Potenzreihe

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 3^0, 3^1, 3^2, 3^3.$$

Allerdings manipuliert er diese Reihe dann, um auf die Zahlenverhältnisse der Abstände im Sonnensystem zu kommen. Er ersetzt die 8 durch die 16 und unterwirft die sich dann ergebende Reihe der Operation $x^{4/3}$. Der entscheidende Unterschied zur Titius - Bodeschen Regel lag jedoch darin, dass bei HEGEL kein Planet zwischen Mars und Jupiter fehlte und eine Suche danach eigentlich nicht motiviert ist. Nach der Entdeckung von *Ceres*, dem ersten Asteroiden in dieser Lücke, war der Spott, dem Hegel überzogen wurde, fast grenzenlos. Damals entstand der fiktive Hegelsche Dialog: *„Es gibt nur sieben Planeten“ - „Dem widersprechen aber die Tatsachen“ - „Umso schlimmer für die Tatsachen“.*

Interessant bleibt jedoch - auch im Hinblick auf extrasolare Planetensysteme - das Rätsel der Bahnstrukturen im Sonnensystem und die Frage, warum genau so viele Planeten in bestimmten relativen Abständen im Sonnensystem existieren. Warum gibt es nicht nur einen oder zwei Riesenplaneten in weiten Abständen voneinander entfernt? Der verantwortlichte Prozess dafür muss wohl in der sich kurzfristig ausbildenden mehrarmigen *Spiralstruktur* in den jungen protoplanetaren Materiescheiben gesucht werden.

Man kann zeigen, dass in einer selbstgravitativen hydrodynamischen Staub - Gasscheibe um einen Protostern sich kurzfristig bestimmte Spiralstrukturen (Stoßwellen) ausbilden, deren Neigungswinkel zur radialen Richtung in Keplerscheiben $\cot[\theta] = \sqrt{5}$ beträgt, was etwa 24° entspricht. Interessant ist, dass hier $\sqrt{5}$ auftritt, eine Zahl, die mit dem *Goldenen Schnitt* verbunden ist. Die Anzahl m der Spiralarme hängt vom Verhältnis der Umlaufgeschwindigkeit der Teilchen zur Schallgeschwindigkeit in der Scheibe ab. Bei genau m Spiralarmen (Anzahl der Riesenplaneten?) folgt die radiale Strukturierung einer logarithmischen Spirale in einer geometrischen Progression mit dem Faktor

$$r_n \sim r_0\, q^n; \qquad q \sim \exp[2\pi/(m\sqrt{5})].$$

Für die azimuthale Wellenzahl $m = 4$ ergibt sich hier recht genau die Zahl $q \sim 2.02$, also praktisch der geometrische Faktor der empirischen *Titius - Bodeschen Regel.* Für $m = 5$ erhält man $q \sim 1.75$, für $m = 6$ den Faktor $q \sim 1.60$. Dies wäre - in moderner Form - die Platonische Idee zur Geometrie von Planetensystemen und auch Satellitensystemen um Riesenplaneten - nach KEPLER das eigentliche ***Weltgeheimnis***. Was man heute beobachtet, sind natürlich nicht mehr entstehungsbedingte, sondern entwicklungsbedingte Zustände (*Bahnresonanzen*). Neuere Untersuchungen bei extrasolaren Planetensystemen scheinen die Gültigkeit von selbstähnlichen logarithmischen Strukturierungsprozessen in Staub

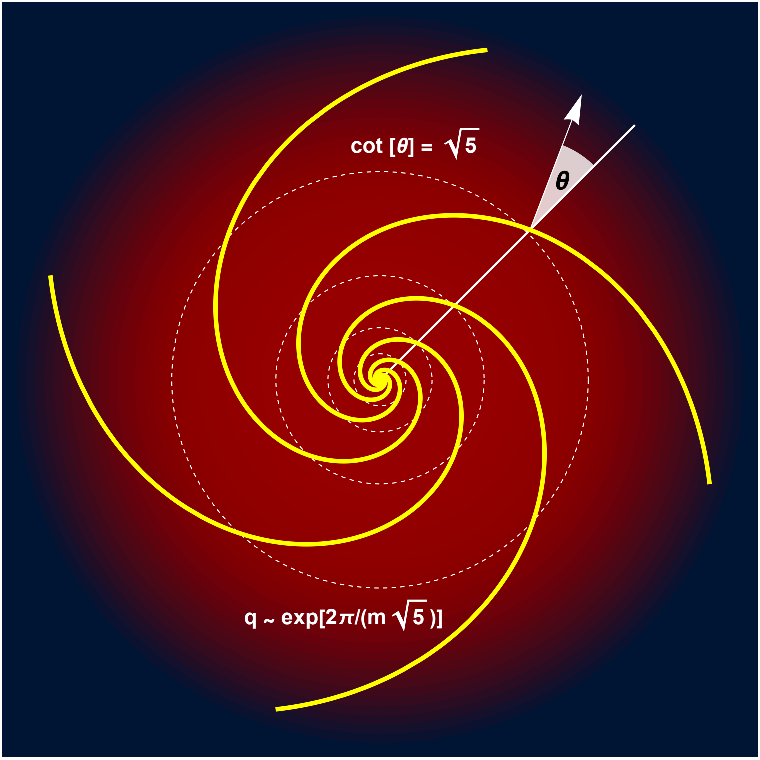


Fig. 15: *Durch eine hydrodynamische selbstgravitative Scherinstabilität bilden sich in protoplanetaren Staub-Gasscheiben für kurze Zeit spiralförmige Dichtewellen (Stoßwellen) aus, in denen intensive Anlagerungsprozesse von Staubteilchen zu größeren Körpern stattfinden. Der Neigungswinkel dieser Stoßfronten maximaler Anwachsraten zur radialen Richtung beträgt in Keplerscheiben* $\cot[\theta] = \sqrt{5}$, *was etwa* $24°$ *entspricht. Die Anzahl der Spiralarme hängt vom Verhältnis der Umlaufgeschwindigkeit der Teilchen zur Schallgeschwindigkeit in der Scheibe ab. Die radiale Strukturierung der logarithmischen Spiralen folgt mit der azimuthalen Wellenzahl* m *einer geometrischen Reihe mit dem Faktor* $\exp[2\pi/(m\sqrt{5})]$. *Für* $m = 4$ *Spiralarme (Anzahl der Riesenplaneten?) folgt genähert die Zahl* 2, *also die magische Zahl der Titius-Bodeschen Regel. Man muss hier natürlich zwischen entstehungsbedingten - und entwicklungsbedingten Strukturen (Bahnresonanzen 2:1 oder 3:2) unterscheiden.*

- Gasscheiben zumindest bei engeren Systemen zu bestätigen [6]. Für

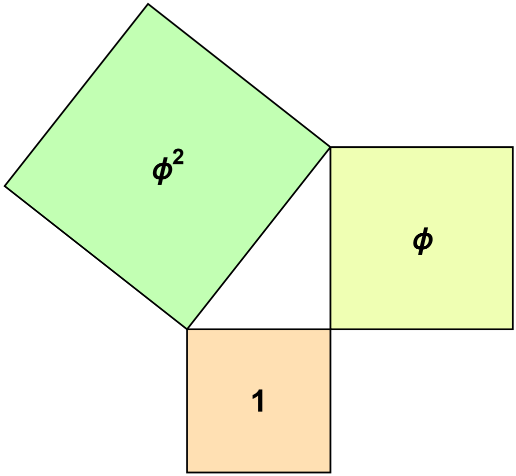


Fig. 16: *Im Oktober 1597 stellte* JOHANNES KEPLER *in einem Brief an seinen früheren Tübinger Professor* MICHAEL MÄSTLIN *(1550-1631) die Frage, warum es nur eine einzige mögliche Lösung für die Aufgabe gebe, ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, bei dem das Verhältnis der kürzeren zur längeren Seite dem der längeren zur Hypotenuse entspricht (Kepler-Dreieck). Das Ergebnis ist der Goldene Schnitt und die Zahl* $\Phi = (\sqrt{5}+1)/2$. *Den kritischen Neigungswinkel der m-armigen Spirale kann man somit auch* $\cot[\theta] = \Phi + 1/\Phi \equiv 2\,\Phi - 1$ *schreiben.*

KEPLER war das Suchen nach *„Ordnung“*, *„Harmonie“* oder auch nach *„Einfachheit“* seine göttliche Leitidee. Bei Sonnenblumen, Tannenzapfen, Blattanordnungen längs Pflanzenstängeln (Phylotaxis), Schneckenhäusern (rechtsdrehend oder linksdrehend), Muschelschalen (Nautilus), bei Wirbelstürmen und natürlich auch bei Galaxien im Kosmos treten in vielfältiger Form analoge selbstähnliche Zahlenfolgen mit entsprechenden Spiralstrukturen (Urbilder der Schönheit) auf.

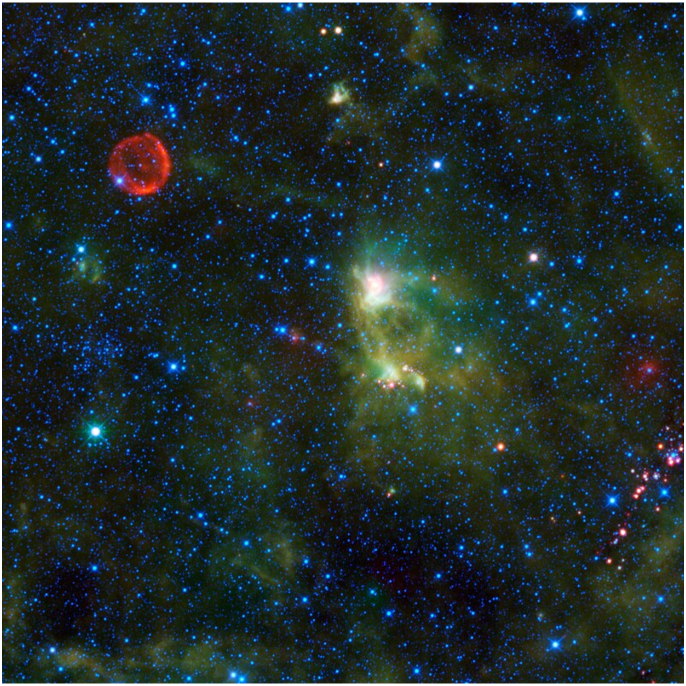


Fig. 17: *Das Infrarotbild des WISE-Satelliten zeigt in der linken oberen Ecke den Überrest der Supernova SN 1572, die Tycho Brahe beobachtete. Aus der zeitlichen Farbfolge beim Ausbruch 1572 glaubte Kepler, eine Analogie zu den unterschiedlichen Farben des Regenbogens ziehen zu können.*

Stella Nova (1606)

Kepler beobachtete die Supernova 1604 und veröffentlichte seine Beobachtungen im Jahr 1606 in dem Buch *De Stella nova in pede serpentarii, et qui sub ejus exortum de novo iniit, Trigono igneo (‚Vom neuen Stern im Fuße des Schlangenträgers‘).* Das Auftauchen eines „neuen“ Sterns stand im Widerspruch zu der vorherrschenden Ansicht, das Fixsterngewölbe sei auf ewig unveränderlich, und löste, wie zuvor schon die von Tycho Brahe beobachtete Supernova 1572, heftige Diskussionen in den dama-

[6] Timothy Bovaird& Charles Lineweaver: Exoplanet predictions based on the generalized Titius–Bode relation, MNRAS **435**, 2013, S. 1126–1139

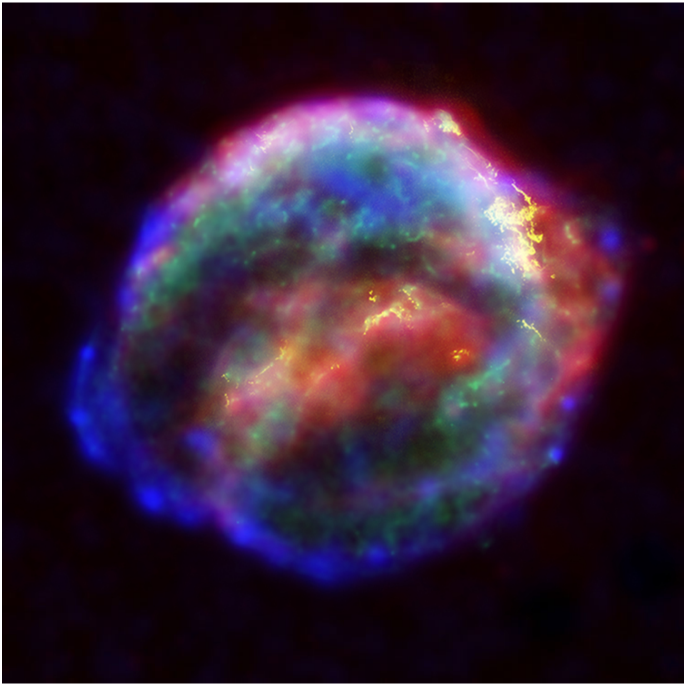


Fig. 18: *Das Bild zeigt die Übereste der Supernova von 1604 im Sterbild Ophiuchus als X-ray, Optical & Infrared Composite, die Kepler 1604 beobachtete und in seiner Schrift De Stella nova in pede serpentarii, et qui sub ejus exortum de novo iniit, Trigono igneo beschrieb.*

lige Gelehrtenkreisen aus. Heute weiß man , dass diese Erscheinungen nicht die Geburt *neuer Sterne* signalisieren, sondern - einer Metapher gleich - den *Tod* derselben. So waren es die Astrophysiker Fritz Zwicky (1898-1974) und Walter Baade, die in spekulativen Arbeiten in den 1930er Jahren erstmals die Hypothese äußerten, dass Supernovae nicht das Aufleuchten neuer Sterne sind, sondern im Gegenteil den finalen Übergang von gewöhnlichen Sternen zu Neutronensternen markieren. Genauere spektrale Beobachtungen der wachsenden Zahl entdeckter Ereignisse in benachbarten Galaxien motivierten Rudolph Minkowski (1895-1976) im Jahre 1939 zur Einführung einer groben Typisierung. Abhängig vom Vorhandensein oder Fehlen von Spektrallinien des Was-

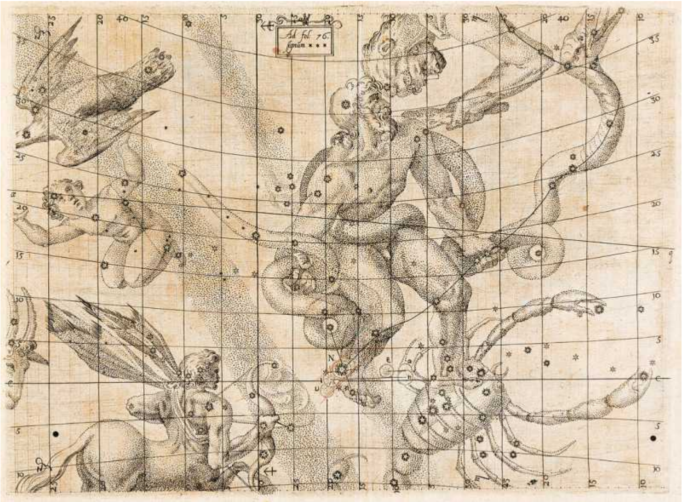


Fig. 19: *Keplers Supernova vom Typ II im Jahre 1604, wie er sie in der rechten Ferse des Schlangenträgers mit einem Stern eingetragen hat.*

serstoffs im abgestrahlten Licht während der frühen Entwicklungsphase ordnete er Supernovae entweder dem **Typ II** (Wasserstofflinien sind vorhanden) oder dem **Typ I** zu.

Astronomia Nova (1609)

Nach zehn Jahren intensiver trigonometrischer Arbeit an der Erdbahn und der Marsbahn im Bezug auf die Sonne fand Kepler die ersten beiden der drei später nach ihm benannten *Planetengesetze*:

> *Die Planetenbahn ist eine im Raum feststehende Ellipse mit der Sonne in einem Brennpunkt, und die Geschwindigkeit des Planeten variiert entlang seiner Bahn so, dass ein von der Sonne zu einem Planeten gezogene Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht.*

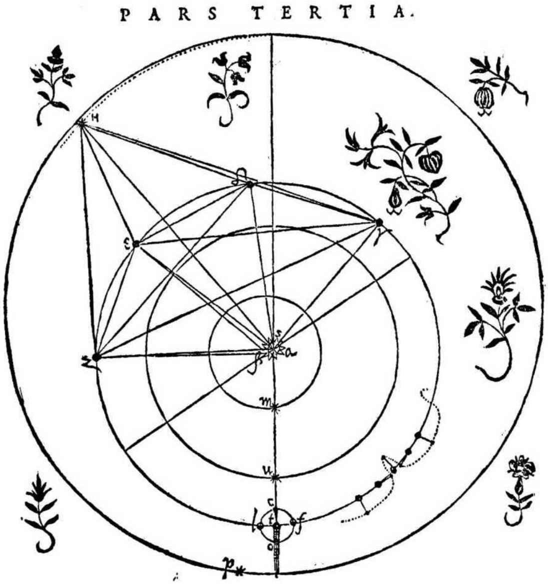


Fig. 20: *Das innere Sonnensystem und die Vermessung der Erdbahn mit Hilfe der äußeren Marsbahn in der **Astronomia Nova**. Nach einem Marsjahr steht dieser Planet immer wieder an der selben Position im Raum. Auf diese Weise kann man mit Trigonometrie die Erdbahn vermessen. Umgekehrt konnte Kepler so auch die stark exzentrische Bahn vom Mars bestimmen.*

Aus heutiger Sicht musste KEPLER mit der Polardarstellung einer Ellipse

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_P} \cos\left[\frac{v-\omega}{2}\right]^2 + \frac{1}{r_A} \sin\left[\frac{v-\omega}{2}\right]^2$$

oder

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_P} + \frac{1}{r_A}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right) \cos[v-\omega].$$

die beobachteten (berechneten) Radien (inversen Radien) mit den berechneten Winkeln zur Deckung bringen. v bedeutet hier die wahre Anomalie und ω die Länge des Perihels. Man braucht mindestens drei Bahndaten

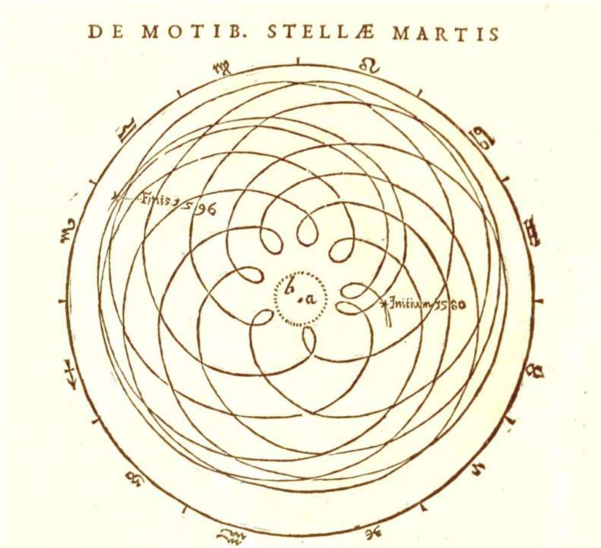


Fig. 21: *Die Relativbewegung des Planeten Mars zur Erde für das Zeitfenster 1580 bis 1596. Die Schleifen am Himmel und die Entfernungsänderungen erfahren hier eine natürliche und korrekte Erklärung.*

(Radien mit Zwischenwinkeln), um die Periheldistanz r_P, die Apheldistanz r_A und den Orientierungswinkel ω der Ellipse in der Ekliptikebene zu bestimmen. Seinen Flächensatz und seinen Ellipsensatz veröffentlichte er im 1609 erschienenen Werk *Astronomia Nova* (Neue Astronomie) bei Gotthard Vögelin in Heidelberg. Der erste dokumentierte Leser des Buches war Keplers Briefpartner Nicolaus von Vicken (1571-1625).

In der *Astronomia nova* taucht auch im Kapitel 60 (von 70) die berühmte Keplersche Gleichung

$$E - \varepsilon \sin E = \mathcal{M}$$

auf, in welcher der Winkel $\mathcal{M} = 2\pi\, t/T$ die gleichförmig mit der Zeit t ansteigende mittlere Anomalie, T die Umlaufzeit und der Winkel E die exzentrische Anomalie der Ellipse bezeichnet. ε bedeutet die Exzentrizität der Ellipse. Die wahre Anomalie v hängt mir der exzentrischen Anomalie

E durch

$$\tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,\tan\frac{E}{2}$$

zusammen. Kepler gesteht gegen Ende des Kapitels, er kenne kein Verfahren, um diese, für seine Theorie der Bewegung der Planeten überaus wichtige Gleichung nach $E \to E[\mathcal{M}]$ aufzulösen, und fügt hinzu:

> *Ist jedoch die mittlere Anomalie gegeben, so gibt es keine geometrische Methode, um zur ausgeglichenen Anomalie oder zur exzentrischen Anomalie zu gelangen. Denn die mittlere Anomalie ist aus zwei Flächenstücken zusammengesetzt, einem Sektor und einem Dreieck. Während der erstere durch den Exzenterbogen gemessen wird, erhält man das letztere, wenn man den Sinus dieses Bogens mit dem Inhalt des grössten Dreiecks multipliziert und die letzten Stellen abschneidet. Allein der Verhältnisse zwischen Bogen und zugehörigem Sinus gibt es unendlich viele. Ist also die Summe beider gegeben, so kann man nicht sagen, wie groß der Bogen und wie groß der Sinus ist, der dieser Summe entspricht, wenn wir nicht vorher ermitteln, wie gross die Fläche ist, die zu einem gegebenen Bogen gehört, d.h. wenn wir nicht Tafeln aufstellen und mit ihnen a posteriori operieren.*

Und weiter sagt Kepler:

> *Dies ist meine eigene Ansicht. Je weniger geometrische Schönheit dem Problem zuzukommen scheint, desto dringender fordere ich die Mathematiker auf, sie sollen mir folgendes Problem lösen: Wenn der Flächeninhalt von einem Teil eines Halbkreises, sowie ein Punkt auf dem Durchmesser gegeben ist, einen Bogen und einen Winkel an diesem Punkt so zu bestimmen, dass die Schenkel des Winkels und der Bogen die gegebene Fläche umschliessen. Oder: Die Fläche eines Halbkreises von einem beliebig gegebenen Punkt des Durchmessers aus in gegebenem Verhältnis zu teilen. Mir genügt die Überzeugung, dass eine Lösung apriori nicht möglich ist wegen der heterogenen Beschaffenheit von Bogen und Sinus. Wer immer mir aber einen Irrtum und einen Ausweg nachweist, der sei mir ein grosser Mathematiker gleich Apollonius.*

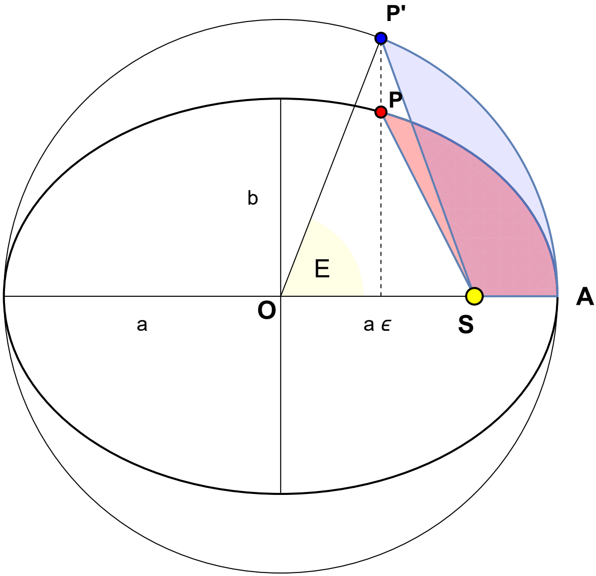


Fig. 22: *Das Problem von Kepler, mit Hilfe des Flächensatzes und einer affinen Abbildung der Ellipse auf einen Kreis die ungleichmäßige Bewegung eines Planeten um die Sonne zu berechnen. Die Position P des Planeten bezüglich des Mittelpunktes O ist durch $x = a\,\cos[E]$ und $y = b\,\sin[E]$ gegeben. Der Winkel ASP ist die wahre Anomalie v. Die Flächen des blauen Kreissegmentes und des roten Ellipsensegments sind dann identisch, wenn das Letztere mit dem affinen Vergrößerungsfaktor a/b multipliziert wird. Der eine Brennpunkt, in dem die Sonne steht, hat zum Mittelpunkt O die Entfernung $a\,\varepsilon$.*

Für Kepler bestand nach Fig. (22) das Problem, die rote Fläche des Ellipsensegmentes zu berechnen. **S** bedeutet hier die Sonne, **P** eine beliebige Position des Planeten in der Ellipsenbahn mit den Halbachsen a, b. Der Punkt $\mathbf{P}'$ ist die affine Transformation des Punktes **P** auf einen Kreis mit Radius a. Da die Gesamtfläche des Kreises $\pi\,a^2$ ist, folgt einerseits für das blaue Kreissegment als Differenz aus Kreissektor und Dreieck (E wird in Bogenmaß gerechnet) das Flächenmaß

$$A_{blau} = \pi\,a^2\,\frac{E}{2\pi} - \frac{1}{2}\,a^2\,\varepsilon\,\sin E = \frac{a^2}{2}\,\left(E - \varepsilon\,\sin E\right).$$

Andererseits gilt nach dem Flächensatz für die rote Fläche.

$$A_{rot} = \pi \, a \, b \, \frac{t}{T}$$

Hier bedeutet T die Umlaufzeit des Planeten und t die Zeitspanne nach dem Durchgang durch das Perihel (Punkt A). Da aber nach dem Affinitätssatz $A_{blau} = a/b \, A_{rot}$ sein muss, erhalten wir durch Gleichsetzen die *Keplergleichung*

$$E - \varepsilon \, \sin E = 2\pi \, \frac{t}{T} \equiv \mathcal{M}$$

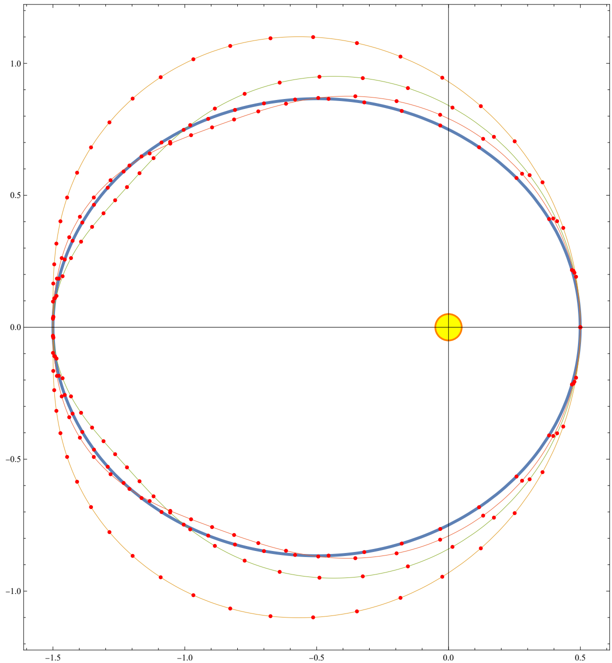


Fig. 23: *Die Annäherung der Bewegung in einer Keplerbahn (dunkelblau) durch eine Potenzreihe in erster, zweiter und dritter in der Exzentrizität ε. Hier ist $\varepsilon = 1/2$. Die Periheldistanz $a\,(1-\varepsilon)$ und die Apheldistanz $a\,(1+\epsilon)$ werden in dieser Entwicklung ab der ersten Ordnung immer exakt dargestellt.*

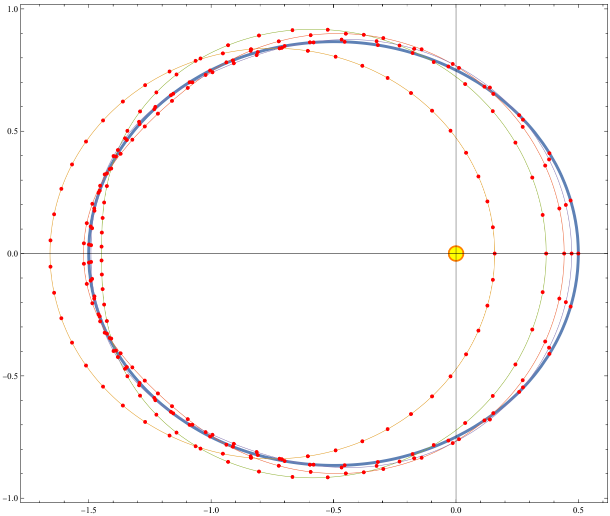


Fig. 24: *Die zeitliche Annäherung der Bewegung in einer Keplerbahn (dunkelblau) durch eine komplexe Fourierreihe, welche geometrisch eine Reihe links - und rechtsdrehender Epizyklen von erster bis vierter Ordnung darstellt. Die Exzentrizität ist hier* $\varepsilon = 1/2$.

Schon damals ahnte man, dass diese Gleichung *transzendent* und nur durch ein iteratives indirektes Verfahren nach E auflösbar ist. Natürlich ist auch eine analytische Reihenentwicklung $E \to E[\mathcal{M}]$ oder eine Fourierentwicklung rein theoretisch möglich. Die letztere hat F.W. Bessel 1818 durchgeführt[7] Die exzentrische Anomalie E und der reziproke Radius der Planetenbahn kann so als Funktion der mittleren Anomalie $\mathcal{M}$

$$E = \mathcal{M} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{J}_n[n\,\varepsilon]\,\frac{\sin[n\,\mathcal{M}]}{n},$$

$$\frac{a}{r} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{J}_n[n\,\varepsilon]\,\cos[n\,\mathcal{M}]$$

geschrieben werden. $\mathbf{J}_n[z]$ bezeichnen Bessefunktionen erster Art vom Grad n als Funktion von z.

[7] F.W. Bessel: *Analytische Auflösung der Kepler'schen Aufgabe*. Brief an B. A. von Lindenau vom Juni 1818: Zeitschrift für Astronomie **V**, p. 367-375 (1818)

Auch die Koordinaten x, y können in eine zeitliche Fourierreihe entwickelt werden. Bis zur zweiten Ordnung in ε lautet die Entwicklung für eine orientierte Ellipse längs der komplexen Koordinatenachsen ($\imath^2 = -1$)

$$\begin{aligned}\frac{x}{a} + \imath\,\frac{y}{a} = e^{\imath\,\mathcal{M}} &+ \frac{1}{2}\left\{-3 + e^{2\,\imath\,\mathcal{M}}\right\}\,\varepsilon \\ &+ \frac{1}{8}\,e^{-\imath\,\mathcal{M}}\left\{1 - 4\,e^{2\,\imath\,\mathcal{M}} + 3\,e^{4\,\imath\,\mathcal{M}}\right\}\,\varepsilon^2 + O[\varepsilon]^3\end{aligned}$$

Der erste Term beschreibt eine ideale Kreisbahn, der zweite Term proportional ε eine Verschiebung (den Exzenter) als auch die erste aufgesetzte Epizykel $e^{2\,\imath\,\mathcal{M}}$ mit doppelter Frequenz und gleichem Drehsinn wie der anfängliche Kreis.

Eine alternative Darstellung besteht in einer komplexen Fourierreihe der Gestalt

$$\frac{x}{a} + \imath\,\frac{y}{a} = -\frac{3}{2}\,\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\alpha_n[\varepsilon]\,\cos[n\,\mathcal{M}] + \imath\,\beta_n[\varepsilon]\,\sin[n\,\mathcal{M}]\right\}.$$

Die genaue mathematische Form der reellen Koeffizienten α, β lautet

$$\alpha_n[\varepsilon] = \frac{\mathbf{J}_{n-1}[n\,\varepsilon] - \mathbf{J}_{n+1}[n\,\varepsilon]}{n}; \quad \beta_n[\varepsilon] = \frac{2\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\mathbf{J}_n[n\,\varepsilon]}{n\,\varepsilon}.$$

Die Ausdrücke in den geschweiften Klammern stellen in jedem Fall Ellipsen dar, die der Keplerellipse sehr ähnlich sind. Die Planetenbewegung in einer Ellipse läßt sich somit streng in eine Reihe von prograd durchlaufenen **elliptischen Epizykeln** zerlegen, *nicht aber in reine prograde Epizykelkreise*, wie die alte Theorie von PTOLEMAIOS angenommen hatte und später auch von COPERNICUS übernommen wurde. Die Verschiebung $-3\,a\,\varepsilon/2$ des Exzenter reicht fast bis zum antifokalen Punkt der Ellipse, die von einem Brennpunkt den Abstand $2\,a\,\varepsilon$ hat.

Die NEWTONsche Theorie der Gravitation hat im Jahre 1687 die keplerschen Ellipsen deduktiv bestätigt. Im Zweikörperproblem müssen nur noch die beiden Massen als Parameter für die Umlaufzeiten eingeführt werden. Im Jahre 1915 hat A. EINSTEIN (1879-1955) die Keplerschen Ellipsen in seiner *geometrischen Gravitationstheorie* noch einmal verfeinert. Führen wir im Gegensatz zur astronomischen Konvention den Polarwinkel φ zwischen Planet - Sonne und der Aphelrichtung ein, so

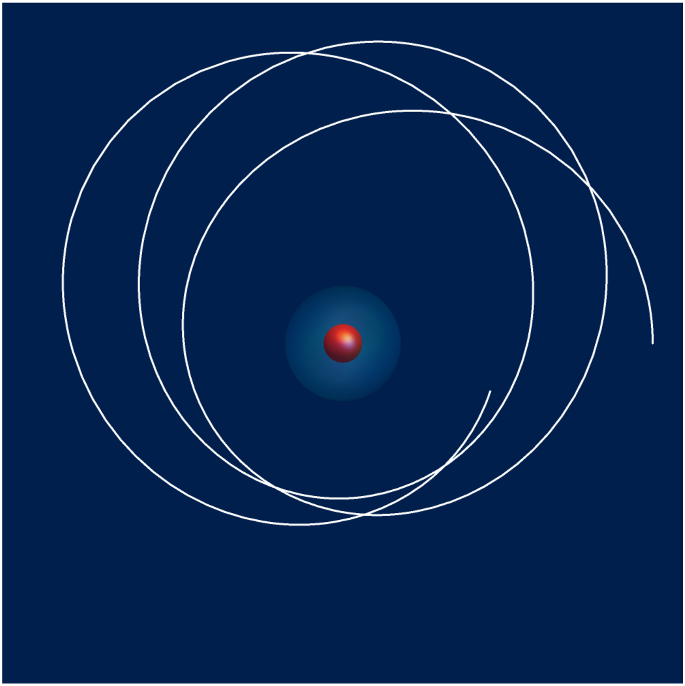


Fig. 25: *Die Bewegung eines Teilchens (zeitartige Geodäte) in der Nähe eines BHs (black hole). Der Radius der roten Sphäre beträgt $R_s = 2GM/c^2$, der diffusen genau $3\,R_s$. Die Bahn hat im Periastron $r_p = 8\,R_s$, im Apastron $r_A = 16\,R_s$. Die Bahnen sind nicht mehr geschlossene Ellipsen, sondern zeigen in der Einsteinschen Gravitationstheorie in der Nähe von BHs eine starke Drehung der Apsis.*

lautet nach Kepler - Newton die Bahngleichung der Ellipse

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_P} \sin\left[\frac{\varphi}{2}\right]^2 + \frac{1}{r_A} \cos\left[\frac{\varphi}{2}\right]^2$$

In der Einsteinschen Gravitationstheorie dagegen lautet die Bahngleichung (zeitartige Geodäte in der Schwarzschildmetrik)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_P} \,\mathbf{sn}\left[\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\varphi}{2}, k^2\right]^2 + \frac{1}{r_A} \,\mathbf{cn}\left[\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\varphi}{2}, k^2\right]^2$$

mit

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

und

$$e_1 = \frac{2}{3} - \frac{R_s}{r_P} - \frac{R_s}{r_A}; \quad e_2 = -\frac{1}{3} + \frac{R_s}{r_P}; \quad e_3 = -\frac{1}{3} + \frac{R_s}{r_A}.$$

Der platonische Glaube von KEPLER an die Geometrie und ihre Schönheit in der Natur hat sich hier in Vollendung erfüllt. Die Kreisfunktionen der KEPLER - NEWTONschen Bewegungstheorie werden in der EINSTEINschen Bahntheorie durch die erst 1829 bekannt gemachten elliptischen Funktionen $\mathbf{sn}[z, k^2]$ und $\mathbf{cn}[z, k^2]$ des Mathematikers C.G.J. JACOBI ersetzt. Mit approximativen Formeln zum Bahnverlauf gelang es dann 1915 EINSTEIN, die sehr kleine zusätzliche Periheldrehung von Merkur zu erklären. In den obigen Formeln liegt somit eine dramatische 2000 jährige Erkenntnis - und Kulturgeschichte der geistigen Beziehungen des Menschen zur Natur.

Dioptrice (1611)

Eine wichtige Arbeit KEPLERS war seine *Dioptrice*. Mit diesem 1611 erschienenen Werk zur Dioptrik des Auges legte Kepler die Grundlagen für die Optik als Wissenschaft. *Nicht vom Auge gehe ein Kegel aus, dessen Basis den Betrachtungsgegenstand umfasst, sondern von jedem Punkt des Objektes gehen Strahlen in alle Richtungen - einige davon erreichen durch die Pupille das Augeninnere.* KEPLER erkennt auch, dass die äußeren Erscheinungen beim Sehen im Auge umgekehrt auf die Netzhaut abgebildet werden. Er wies darauf hin, *dass das Bild später in den Vertiefungen des Gehirns aufgrund der Aktivität der Seele korrigiert werden würde.* Aus der Schrift ergab sich als Anwendung die Erfindung des *Kepler - Fernrohres.* Allerdings kannte KEPLER noch nicht die genaue mathematische Form des Brechungsgesetztes. Interessant ist es daher, auch die Ideen Keplers bei einem optischen Phänomen zu hören, dass seit den Zeiten von ARISTOTELES ein großes Rätsel darstellte: der **Regenbogen**, ein göttliches Symbol, das nach einem Regenschauer unerwartet erscheint. Der Mathematikhistoriker C. B. BOYER schrieb hierzu[8]

> "KEPLERS Interesse am Regenbogen scheint etwa aus der Zeit seines Mysterium Cosmographicum (1596) zu stammen,

[8] C.B. BOYER (1906-1976). The Rainbow - From Myth to Mathematics. Sagamore Press 1959

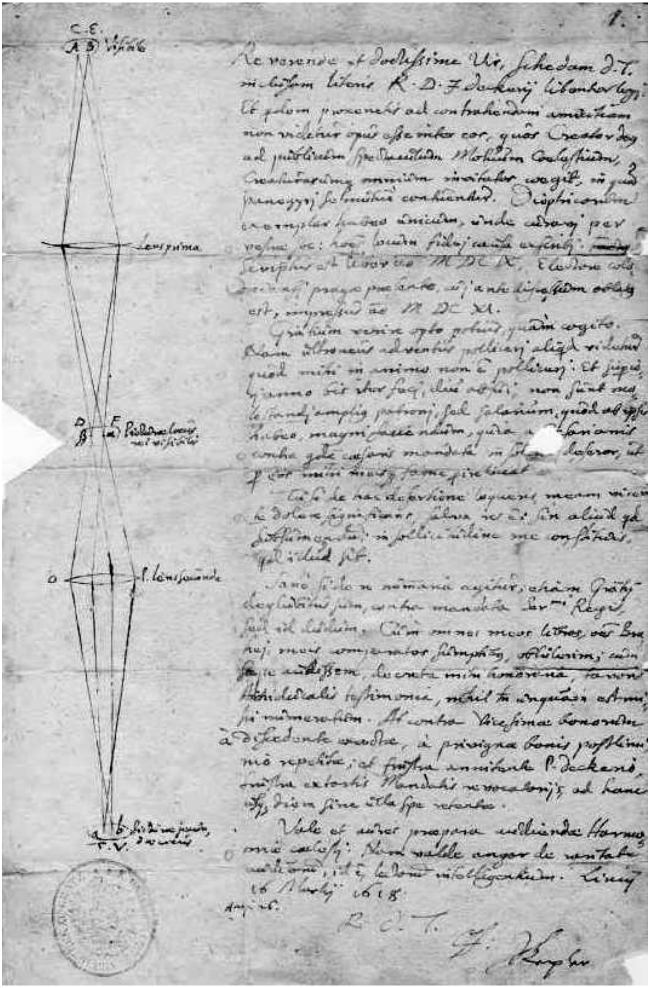


Fig. 26: *Brief von* KEPLER *aus dem Jahre 1618 an den Schweizer Mathematiker, Astronomen und Jesuiten P.* GULDIN *(1577-1643) über die Sehstrahlen in einem Linsenfernrohr. Nur noch elf Briefe zwischen Kepler und Guldin, geschrieben zwischen 1618 und 1628, sind erhalten.*

> als der Glaube an die mathematischen Harmonien des Universums eindrucksvoll bestätigt schienen. Kurz nachdem die Veröffentlichung dieses Werks Keplers erfolgreiche astronomische Karriere eingeleitet hatte, versuchte er, die Harmonien von Astronomie und Musik auf die Phänomene der Farbe auszudehnen. In Randnotizen zum Mysterium, die offenbar gegen Ende des 16. Jahrhunderts entstanden, wird die Farbpalette des Regenbogens mit der Unendlichkeit der Töne in der musikalischen Oktave verglichen. Gelb wird als eine Art Mittelwert betrachtet; von diesem gelangt man nach außen über Rot zu Schwarz, wenn der Sonneneinfluss abnimmt und die Beimischung des groben Materials in der Wolke zunimmt. Von Gelb gelangt man nach innen über Grün, Blau, Purpur und Violett zu Schwarz, und dieser Übergang hat eine ganz andere Ursache: die Brechung. Kepler fügte hinzu, er habe oft darüber nachgedacht, ob die Proportion des Brechungswinkels die Grenzen zwischen den Farben Grün, Blau usw. bestimmt. Direktes Sehen, bei dem der Brechungswinkel Null ist, führt zu gelbem Licht; und wenn der Brechungswinkel ein rechter Winkel ist, erlischt alles Licht, was der Schwärze entspricht. Aber, fügte Kepler hinzu, es sei schwer zu sagen, wie der größte Brechungswinkel in Bezug auf die Farben zu unterteilen sei. Dennoch glaubte er, dass die fünf Farben Gelb, Grün, Blau, Purpur und Violett wären, wenn der rechte Winkel in Teile unterteilt würde, die den einfachen Einheitsbrüchen 1/6, 1/5, 1/4, 1/3 und 1/2 entsprechen. „Und siehe, beträgt die Größe des Regenbogens nicht immer etwa 45°, was dem Maß eines halben rechten Winkels entspricht?“ Kepler fügte jedoch vorsichtig hinzu: *„Aber das könnten nur Vorstellungen sein.“*

Keplers Ansichten sind zu Beginn des 17. Jahrhunderts noch stark von den Lehren des Aristoteles geprägt. Vielleicht ist dies - neben dem Mangel an experimentellen Messungen an Wasserkugeln - der Grund für das fehlende korrekte Brechungsgesetz. So schreibt C.B. Boyer weiter:

> “1602 veröffentlichte er in seinem klassischen Kommentar zur Optik Witelos – *Ad Vitellionem Paralipomena Quibus Astronomiae Pars Optica Traditur* – eine grobe qualitative Modifikation, die auf Brechung beruhte und einer von Grosseteste

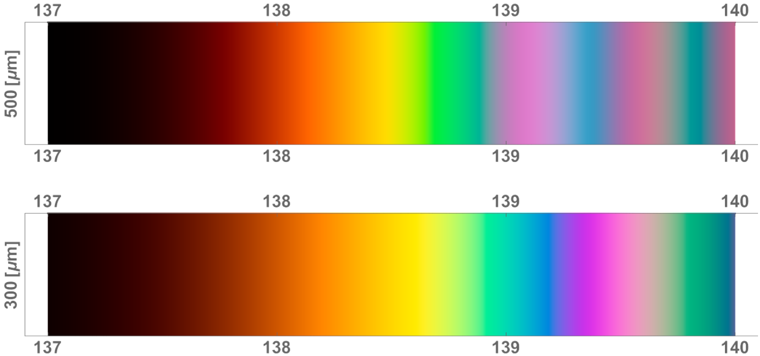


Fig. 27: *Die winkelabhängige Farbfolge beim Regenbogen (hier Wassertropfen von 1,0 mm und 0,6 mm Durchmesser) setzte Kepler spekulativ mit der zeitlichen Farbfolge des Lichtes von Tychos Supernova von 1572 in Verbindung. Links (137 Grad) ist hier der äußere, rechts (140 Grad) der innere Rand des Regenbogens.*

und anderen mittelalterlichen Aristoteles - Kommentatoren vorgeschlagenen ähnelt. Hier wiederholte Kepler erneut die Idee, dass die Farben des Regenbogens auf zwei verschiedene Ursachen zurückzuführen seien – die Abschwächung des Lichts und die Einbringung von Wasser – und behauptete kategorisch, dass der Durchmesser des Regenbogens immer 90° betrage. Dann sagte er, dass die Krümmung auf die Brechung der Lichtstrahlen durch Regen oder Wasser zwischen dem Betrachter und der Sonne zurückzuführen sei. Es sei daher nicht wahr, argumentierte er, dass der Regenbogen durch die Reflexion oder Brechung der Sonnen- oder Sichtstrahlen in dem Teil der Wolke entsteht, in dem der Bogen erscheint – und wiederholte damit eine These, dessen Für und Wider in Gelehrtenkreisen seit langem diskutiert wurde. In derselben Abhandlung zitierte Kepler naiv die Farben des Regenbogens als Beleg für seinen quasi-mittelalterlichen Glauben, dass Kometen und Novae wässrigen Ursprungs und Wesens seien. In einer Beschreibung der Farbvariationen der Nova von 1572 durch Cornelius Gemma Frisius (1535–1577) hatte Kepler gelesen, dass der neue Stern zunächst rot war, dann leuchtend gelb, dann grün wurde und schließlich verschwand, nachdem er eine violette Farbe angenommen hatte. Doch genau dies ist die Reihenfolge der Farben im Regenbogen, die durch die Luftfeuchtigkeit bedingt ist.

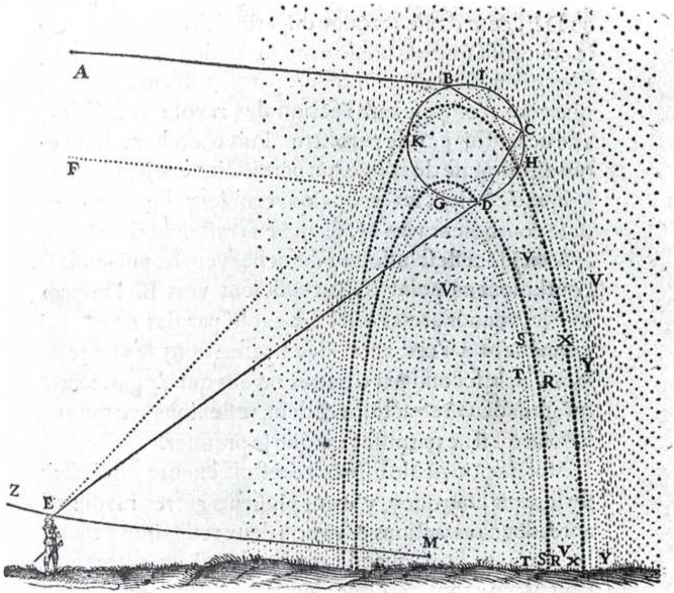


Fig. 28: *Die geometrische Optik des Regenbogens nach R. Descartes (1596-1650), die dieser 1637 als Anhang Les Météores seiner philosophischen Schrift Discours de la méthode gegeben hat. Kepler war 1611 schon sehr nahe an diesem richtigen Modell. Es fehlte ihm das mathematisch korrekte Brechungsgesetz.*

Das Reflexionsgesetz war seit Aristoteles bekannt; das Brechungsgesetz jedoch, der Grundstein der Optik, war trotz der Bemühungen von Ptolemäus, Alhazen, Grosseteste, Witelo, Maurolycus und Porta unentdeckt geblieben. Das Gesetz war für Kepler aufgrund der astronomischen Bedeutung der atmosphärischen Brechung von besonderem Interesse, und daher unternahm er große und letztendlich vergebliche Anstrengungen, es zu entdecken.”

Soweit die Bemerkungen von C.B. Boyer. Erst Willebrord van Roijen Snell (1580 - 1626) und dann R. Descartes (1596-1650) gelang es, die Regenbogentheorie auf ein sicheres Fundament der Strahlengeometrie mit einem Reflexions - und einem Brechungsgesetz zu stellen - analog vergleichbar mit den drei Keplerschen Planetengesetzen.

Strena seu de Nive Sexangula (1611)

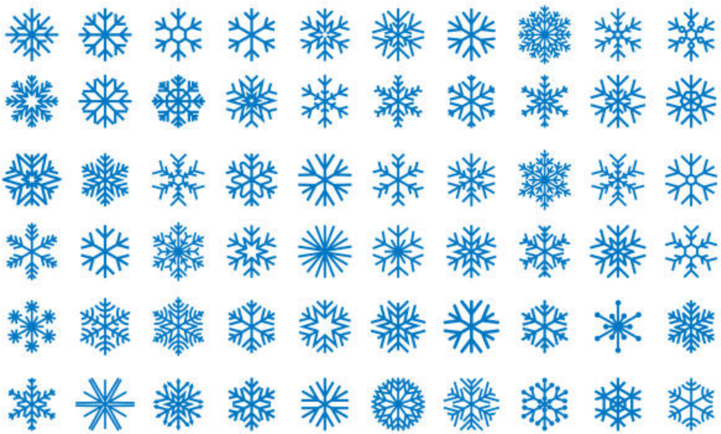


Fig. 29: *1611 veröffentlichte Kepler eine Monografie über die Entstehung von Schneeflocken, das erste bekannte Werk zu diesem Thema. Er vermutete richtig, dass ihre hexagonale Gestalt von der Kälte herrührt, konnte sie aber noch nicht durch die atomare Struktur der Wassermoleküle physikalisch genauer begründen. Die unendliche Vielfalten von Schneekristallen in ihrer gleichbleibenden Symmetrie faszinierte Kepler in besonderem Maße. Jede Flocke, die vom Himmel fällt, ist ein Individuum.*

Im Jahre 1611 verfasste Kepler als Neujahrsgeschenk für seinen Gönner, dem Berater bei Hofe, Rechtsanwalt und Diplomaten J. M. Wackher von Wackenfels , die kleine Schrift *Neujahrsgabe oder Über den sechseckigen Schnee*. Er versuchte, dieses Phänomen geometrisch durch dichteste Kugelpackungen auf kristaliner Grundlage zu erklären. In dieser Schrift untersuchte Kepler die mathematischen Konstruktionsprinzipien von *Schneeflocken*, *Bienenwabenzellen* und *Granatapfelkernen*.

Er suchte nach einer allgemeinen Theorie der Selbststrukturierung der Natur und formulierte nicht nur das Prinzip der dichtesten Packung, sondern auch das Prinzip der geringsten Wirkung. Heute wissen wir, dass

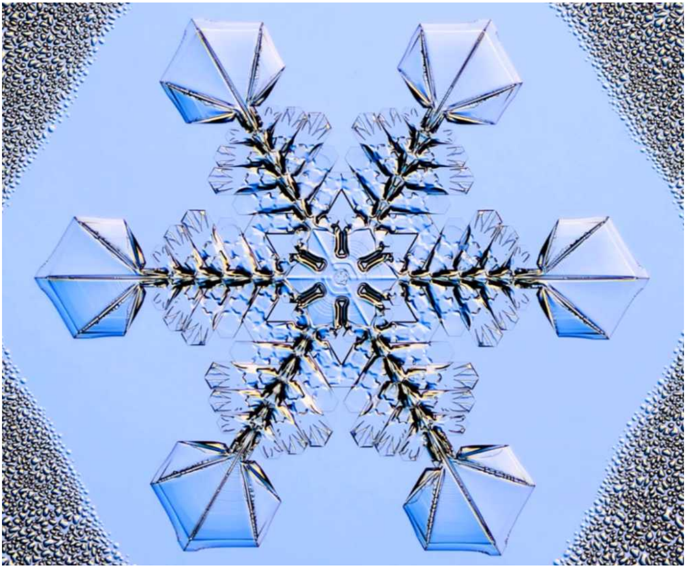


Fig. 30: *Die hexagonale Struktur eines dendritischen Schneekristalls fazinierte* Kepler *in besonderem Maße. Ein Schneekristall entsteht, wenn Wasserdampf in der Luft direkt zu Eis kondensiert, ohne vorher flüssig zu werden. Die genauen Gründe für das Wachstum unterschiedlicher Schneekristalle, Säulen oder Nadeln bei unterschiedlichen Temperaturen sind bis heute ein Mysterium geblieben. (Bildquelle:* Kenneth Libbrecht*: snowcrystals, CALTECH, Pasadena).*

die sechsfache Symmetrie, die man in einem Schneekristall sieht, durch die Anordnung der Wassermoleküle im 3D-Eiskristallgitter entsteht. Im Eiskristallmodell befinden sich somit lauter Sechsecke. Aber ein Kristall ist eine dreidimensionale Struktur, und Schneeflocken sind ebenfalls dreidimensional. Sternplättchen sind dünn und flach, andere Schneekristalle (Eiskristalle) jedoch sind bei sehr tiefen Temperaturen sechseckige Säulen (Halophänomen).

Schneekristalle sind keine gefrorenen Regentropfen; das nennt man Graupel. Ein Schneekristall entsteht, wenn Wasserdampf in der Luft direkt zu Eis kondensiert, ohne vorher flüssig zu werden. Wenn weiterer

Wasserdampf an einem entstehenden Schneekristall kondensiert, wächst und entwickelt er sich, und dabei entstehen seine kunstvollen Muster. Diese komplexen Sternenschneekristalle entstehen zunächst als kleine, sechseckige Platten. An den sechs Ecken wachsen dann Arme, während der Kristall größer wird. Auf seinem Weg durch die Wolken ist er ständig wechselnden Temperaturen und Luftfeuchtigkeiten ausgesetzt, und jede Veränderung beeinflusst das Wachstum der Arme. Die genaue Form des fertigen Schneekristalls wird durch seinen exakten Weg durch die Wolken bestimmt. Da aber alle sechs Arme denselben Weg zurückgelegt haben, waren sie gleichzeitig denselben Veränderungen ausgesetzt. So wachsen die sechs Arme synchron und bilden eine komplexe, aber dennoch symmetrische hexagonale Form. Und da kein Schneekristall auf seinem Weg durch die Wolken exakt den gleichen Weg begeht, gleicht auch kein Kristall dem anderen. Durch Anlagerung zweier Schneekristalle in der Wolke können auch 12-armige Schneekristalle entstehen. Die hexagonale

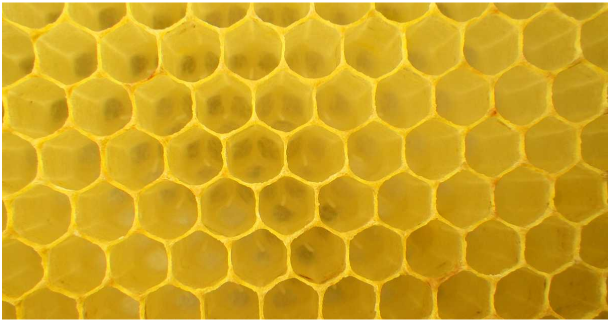
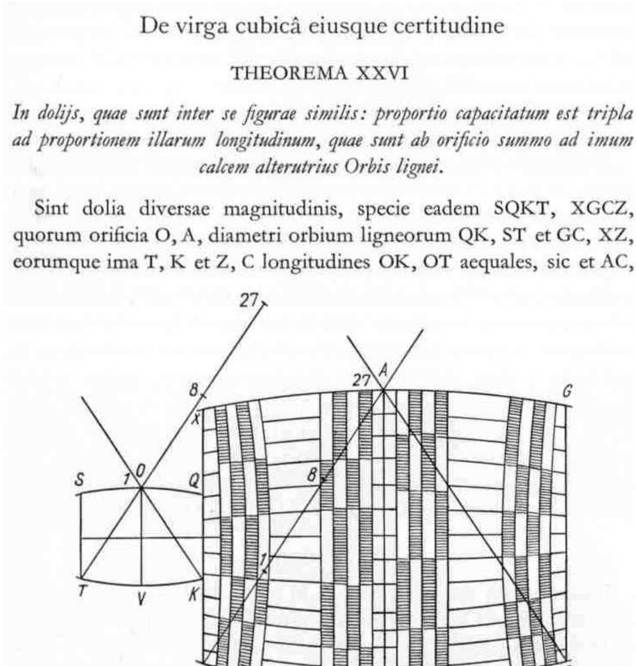


Fig. 31: *Die hexagonale Struktur von Bienenwaben war für* Kepler *auch ein Hinweis auf harmonisch periodische Strukturen, die in der Natur bevorzugt werden.*

globale Symmetrie mit einem Innenwinkel von 120 Grad ist immer periodisch fortsetzbar. Die *Keplersche Vermutung*, dass $\pi/\sqrt{18}$ die dichteste Kugelpackung von *Kanonenkugeln* darstellt, scheint seit 2017 mit Hilfe von Computern bewiesen worden zu sein.

Stereometria (1612)

Im Jahre 1612 wunderte sich J. Kepler über die Art, wie Weinhändler den Inhalt von Weinfässern unterschiedlicher Gestalt ausmessen:[9] *Als*



De virga cubicâ eiusque certitudine

THEOREMA XXVI

In dolijs, quae sunt inter se figurae similis: proportio capacitatum est tripla ad proportionem illarum longitudinum, quae sunt ab orificio summo ad imum calcem alterutrius Orbis lignei.

Sint dolia diversae magnitudinis, specie eadem SQKT, XGCZ, quorum orificia O, A, diametri orbium ligneorum QK, ST et GC, XZ, eorumque ima T, K et Z, C longitudines OK, OT aequales, sic et AC,

Schema XXII

Fig. 32: *Volumenbestimmung eines vollen Weinfasses durch eine quer durch ein Spundloch geschobene Visierrute mit kubischer Skala um das Jahr 1600 in Österreich (virga cubica). Optimal war diese Methode für gefüllte zylindrische Fässer mit der Proportion* $\sqrt{2}:1$*, doch auch für leicht abweichende Fassformen war die Methode für bestimmte Fässer erstaunlich genau. Die approximative Formel für das Volumen war dann* $\mathbf{V} \sim \pi/(3\sqrt{3})\,\mathbf{s^3} \sim 0.6\,\mathbf{s^3}$*, wo s die Länge der Visierrute vom Spundloch zur linken oder rechten unteren Daubenkante bedeutet.*

ich im vergangenen November eine neue Gattin in mein Haus eingeführt

[9] Klug, H.: *Neue Stereometrie der Fässer*, Leipzig 1908

hatte, gerade zu der Zeit, da nach einer reichen und ebenso vorzüglichen Weinernte viele Lastschiffe die Donau herauffuhren und Österreich die Fülle seiner Schätze an unser Norikum verteilte, sodaß das ganze Ufer in Linz mit Weinfässern, die zu erträglichem Preis ausgeboten wurden, belagert war, da verlangte es meine Pflicht als Gatte und guter Familienvater, mein Haus mit dem notwendigen Trunk zu versorgen. Ich ließ daher etliche Fässer in mein Haus schaffen und daselbst einlegen. Vier Tage hernach kam nun der Verkäufer mit einer Meßrute, die er als einziges Instrument benutzte, um ohne Unterschied alle Fässer auszumessen, ohne Rücksicht auf ihre Form zu nehmen oder irgendwelche Berechnung anzustellen.

Er steckte nämlich die Spitze des Eisenstabes in die Einfüllöffnung des vollen Fasses schief hinein bis zum unteren Rand der beiden kreisförmigen Holzdeckel, die wir in der heimischen Sprache die Böden nennen. Wenn dann beiderseits diese Länge vom obersten Punkt des Faßrunds bis zum untersten Punkt der beiden kreisförmigen Bretter gleich erschien, dann gab er nach der Marke, die an der Stelle, wo diese Länge aufhörte, in den Stab eingezeichnet war, die Zahl der Eimer an, die das Faß hielt, und stellte dieser Zahl entsprechend den Preis fest.

Mir schien es verwunderlich, ob es möglich sei, aus der durch den Körper des halben Fasses quer gezogenen Linie den Inhalt zu bestimmen, und ich zweifelte an der Zuverlässigkeit dieser Messung.

Kepler entwickelte darauf genauere Formeln für das Volumen unterschiedlicher Rotationskörper, die noch heute unter der Bezeichnung *Keplersche Fassregeln* (*Integralformeln*) bekannt sind. Kepler sagt:

> *..Nimm zwei Maßstäbe für den mittleren Umfang und einen für den Umfang an den Böden, teile die Summe durch drei und berechne damit das Zylindervolumen..*

Bezeichnet man also die Spundtiefe (Durchmesser) des Fasses mit D , die identischen Boden - Deckeltiefen mit d und die Länge des Fasses mit L, so lautet die genäherte Volumenformel

$$V = \pi\, L \, \left(\frac{2\, D + d}{6} \right)^2 .$$

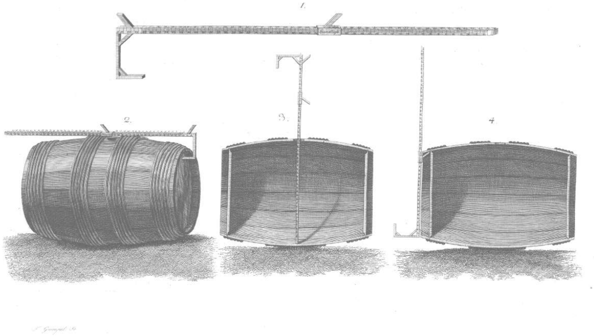


Fig. 33: *Volumenbestimmung eines vollen Weinfasses in Preußen um 1800. J.A. Eytelwein (1765-1849): Abhandlung über das Visieren der Fässer, mit Bezug auf den bei uns eingeführten Visierstab. Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften und Schönen Künste. Berlin Brandenburg. Seite 92-107, (1803).*

Dies ist die klassische und praxistaugliche Fassformel nach Kepler. Nach dem geheimen Oberbaurath und Ingenieur J.A. Eytelwein (1764-1848) hat sich die obige Formel in der Praxis als die beste Approximation für ein Fassvolumen erwiesen[10]

Die früher in der Schulmathematik erwähnte Formel

$$V = \pi \, L \, \left(\frac{2 \, D^2 + d^2}{12} \right)$$

stammt eigentlich von dem Mathematiker J. Simpson (1710-1768) , der sie 1743 ableitete, aber eigentlich I. Newton zuschrieb. Sie gilt exakt für ein Fass mit elliptischem Profil - was aber der Krümmung der Dauben nicht exakt entsprechen muss. Umfangreiche Untersuchungen zum Fassvolumen stammen auch von J. Lambert (1728-1777)[11]

[10] Eytelwein: Abhandlung über das Visieren der Fässer, mit Bezug auf den bei uns eingeführten Visierstab. Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften und schönen Künste. Berlin im November 1803

[11] Lambert: *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Kapitel II: Die Visierkunst.* Band I, Seite 314- 368, Berlin, 1765.

Epitome Astronomiae Copernicanae (1618/1621)

Das Buch *Epitome Astronomiae Copernicanae* behandelt das heliozentrische System, das Kepler in der Zeit von 1618 bis 1621 veröffentlicht hat. Der erste Band (Bücher I–III) wurde 1618 gedruckt, der zweite (Buch IV) 1620 und der dritte (Bücher V–VII) 1621. Die *Epitome Astronomiae Copernicanae* gliedert sich in drei Teile mit sieben Büchern:

- Teil 1: *De Doctrina Sphaerica* (Sphärik) mit Buch I, II und III von 1618
- Teil 2: *Physica Coelestis* (Himmelsphysik) mit Buch IV von 1620
- Teil 3: *Doctrina Theoretica* (Theoretische Lehre) mit Buch V, VI und VII von 1621.

Bemerkenswert sind seine Bemerkungen zu der Größe des Sternengewölbes. So schreibt er im Kapitel 22 seiner *Epitome*:

> *...Aus diesem Grunde also: Je mehr Fixsterne es gibt, desto weniger kann jeder einzelne für uns leuchten, weil sie auf die Enge der Oberfläche einer Sphäre zusammengedrängt werden, gleichsam eine Art runder Schale. Daher, wenn die Fixsterne unendlich sind, an Zahl und Menge, in kontinuierlicher und zusammhängender Ordnung ins Unendliche ausgedehnt, dann muss notwendigerweise die Himmelsfläche selbst, wo sie an diese Sphäre angrenzt, ebenso hell leuchten wie die Sonne, oder vielmehr, dann muss die ganze Fläche die Sonne selbst sein, und sie würden kein schwarzes oder leeres Zwischenstück übrig lassen...*

Da der Nachthimmel aber dunkel ist und die einzelnen Sterne nur als Lichtpunkte vor einem schwarzen Hintergrund erscheinen, muss die Anzahl der Sterne endlich und das Universum eine begrenzte, kugelförmige Struktur aufweisen. So folgert zumindest Kepler im Jahre 1606.

Damit steht er im Gegensatz zu Giordano Bruno Nolano (1548-1600), der in seiner in London 1584 veröffentlichten Schrift *De l'infinito, universo et mondi* sich ein unendlich großes Universum mit zahllosen Sternen und bewohnten Planeten vorstellte. Das obige später benannte

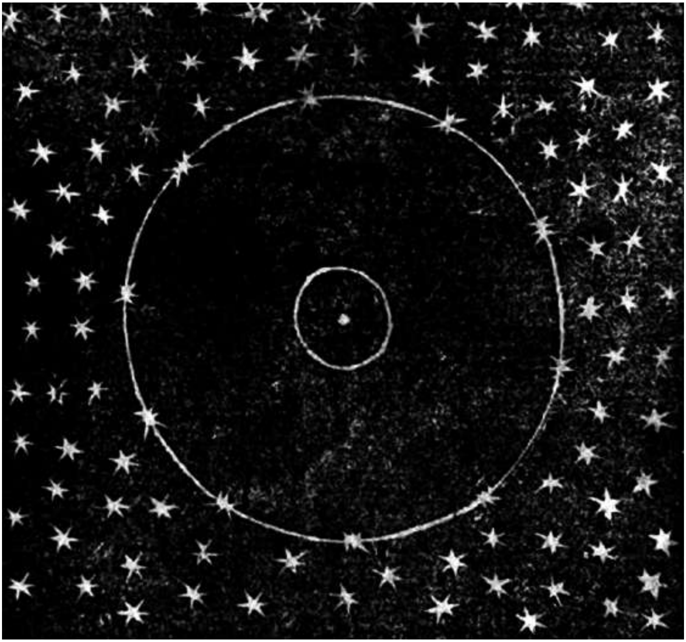


Fig. 34: *Keplers Vorstellung von der Stellung des Sonnensystems in einem kugelförmigen Gewölbe der Fixsterne. Aus: De Doctrina Sphaerica. De Figura Coeli. (Seite 34)*

Olbersche Paradoxon verdrängte BRUNO im Gegensatz zu KEPLER in anderer Form: Das Licht wird irgendwie abgeschwächt und die Sterne sind nicht gleichmäßig, sondern durch immer größer werdende riesige Leerräume im Kosmos verteilt.

Harmonices mundi (1619)

Nach intensivem Studium der Daten zur Umlaufbahn der Planeten Mars und Erde entdeckte KEPLER am 15. Mai 1618 das dritte der nach ihm benannten Gesetze, das er in dem im Jahr 1619 veröffentlichten Werk *Harmonices mundi libri V* (*Fünf Bücher zur Harmonik der Welt*) erläuterte. Danach verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten wie die

Kuben der großen Halbachse der Planeten. In heutiger Formel

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \quad \rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{3/2}$$

Kepler schreibt hierzu:

> *... Am 8. März dieses Jahres ist die Proportion in meinem Kopf aufgetaucht. Ich hatte aber keine glückliche Hand, als ich sie der Rechnung unterzog und verwarf sie als falsch. Schließlich kam sie am 15. Mai wieder und besiegte in einem neuen Anlauf die Finsternis meines Geistes, wobei sich zwischen meinen Arbeiten mit den 17jährigen Beobachtungen von Brahe und meiner gegenwärtigen Überlegung eine so treffliche Übereinstimmung ergab, dass ich zuerst glaubte, ich hätte geträumt und das Gesuchte in den Beweisunterlagen vorausgesetzt. Allein es ist ganz sicher und stimmt vollkommen, dass die Proportion, die zwischen den Umlaufzeiten irgend zweier Planeten besteht, genau das Anderthalbfache der Proportion der mittleren Abstände, d.h., der Bahn selber, ist.*
> *Nachdem ich diese Gesetzmäßigkeit gefunden habe, verfalle ich der heiligen Raserei...*

Genau dies Gesetz war später für Newton eine wichtige Stütze, sein Bild der Gravitation abzuleiten und zu festigen (*und nicht der fallende Apfel*).

> *Die Geometrie ist vor der Erschaffung der Dinge, gleich ewig wie der Geist Gottes selbst und hat in ihm die Urbilder für die Erschaffung der Welt geliefert.*

Kepler unterteilt *Die Harmonien der Welt* in fünf lange Kapitel: Das erste handelt von regelmäßigen Polygonen und Polyhedern; das zweite von der Kongruenz von Figuren; das dritte vom Ursprung harmonischer Proportionen in der Musik; das vierte von harmonischen Konfigurationen in der Astrologie; das fünfte von der Harmonie der Planetenbewegungen. In seiner *Weltharmonik* stellte Kepler ebenso wie im *Mysterium Cosmographicum* eine Verbindung zwischen den platonischen Körpern und der klassischen Auffassung der Elemente her. Das Tetraeder entsprach dem Feuer, das Oktaeder der Luft, der Würfel der Erde, das Ikosaeder symbolisierte das Wasser und das Dodekaeder stand für den Kosmos als Ganzes oder den Äther. Diese Analogien sind antiken Ursprungs, wie Platon von einem gewissen Timaeus von Locri erklärt, der sich das Universum vorstellte als von einem gigantischen Dodekaeder umgeben, während die anderen vier Körper die *Elemente des Feuers, der Luft, der Erde und des Wassers darstellen.*

Arnold Sommerfeld (1868-1951) schrieb über die Balmerformel bezüglich der Linienspektren und die Orbitalstruktur von Elektronen von Atomen im Jahre 1931 in seinem berühmten Buch *Atombau und Spektrallinien*:

> *...Was wir heutzutage aus der Sprache der Spektren heraushören, ist eine wirkliche Sphärenmusik des Atoms, ein Zusammenklingen ganzzahliger Verhältnisse, eine bei aller Mannigfaltigkeit zunehmende Ordnung und Harmonie....*

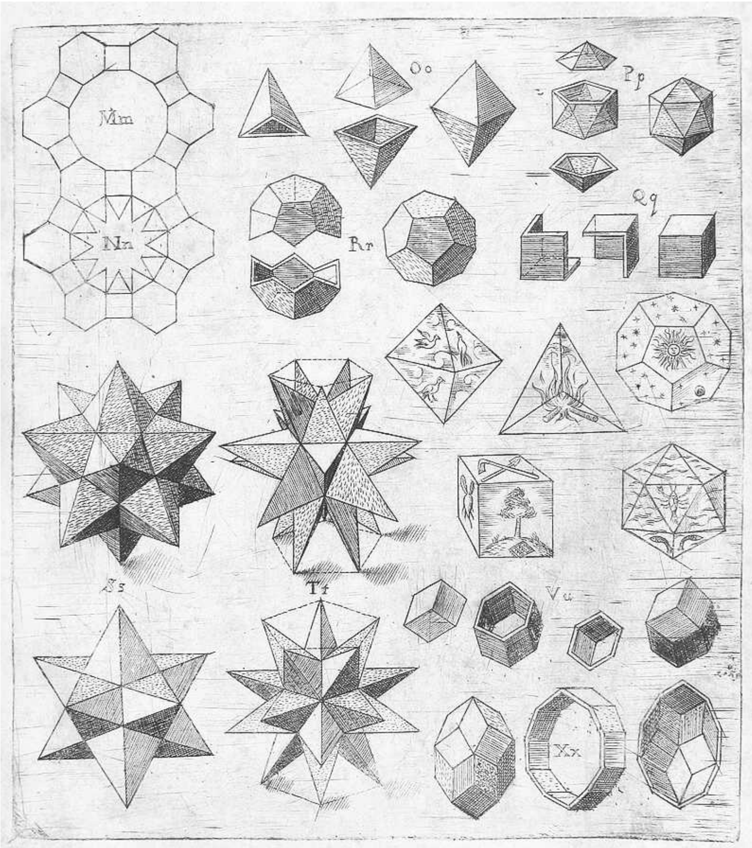


Fig. 35: *Verallgemeinerte Platonischer Körper in den Harmonices mundi. Verschiedene Polyheder und ihre räumlichen Symmetrien und Netze nach* KEPLER.

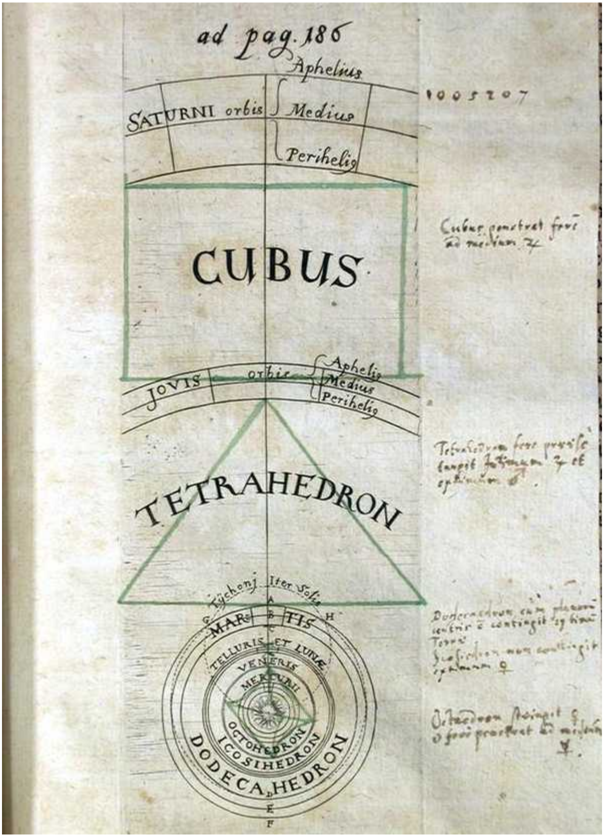


Fig. 36: *Wiederum bestimmen Platonische Körper die Bahnstruktur. Doch jetzt spielt auch die Exzentrizität der Planetenbahnen und ihre jeweiligen Geschwindigkeiten zur Harmonie der Frequenzen bei. Die systematische entgegengesetzte Driftbewegung der Planeten Jupiter und Saturn aufgrund ihrer gegenseitigen gravitativen Störungen (große Ungleichheit) konnte erst von* Newton *und endgültig von* Laplace *geklärt werden.*

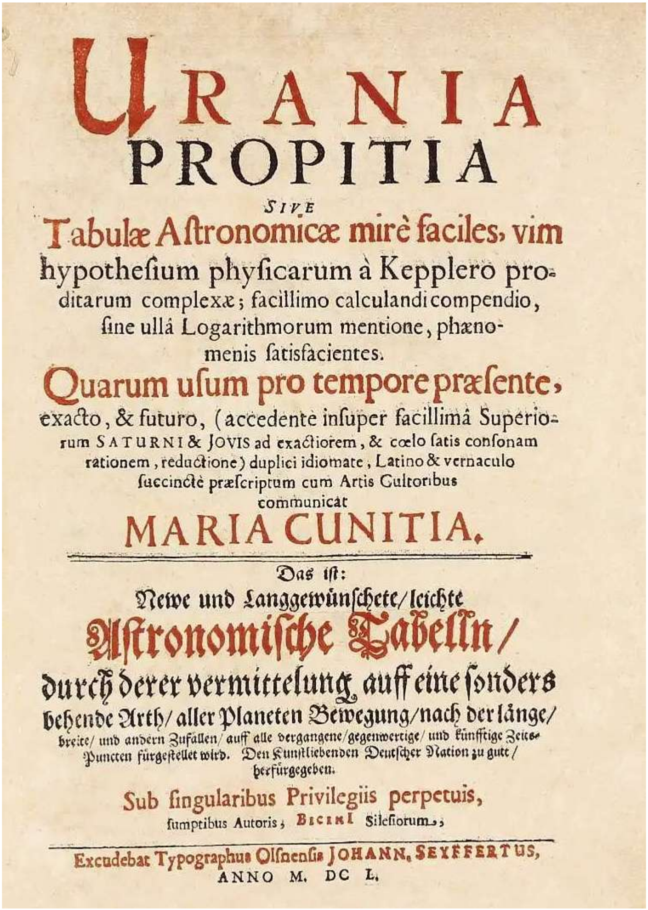

URANIA
PROPITIA
SIVE
Tabulæ Aſtronomicæ mirè faciles, vim hypotheſium phyſicarum à Kepplero proditarum complexæ; facillimo calculandi compendio, ſine ullâ Logarithmorum mentione, phænomenis ſatisfacientes.
Quarum uſum pro tempore præſente, exacto, & futuro, (accedente inſuper facillimâ Superiorum SATURNI & JOVIS ad exactiorem, & cœlo ſatis conſonam rationem, reductione) duplici idiomate, Latino & vernaculo ſuccinctè præſcriptum cum Artis Cultoribus communicat
MARIA CUNITIA.
Das iſt:
Newe und Langgewünſchete/ leichte
Aſtronomiſche Tabellen/
durch derer vermittelung, auff eine ſonders behende Arth/ aller Planeten Bewegung/ nach der länge/ breite/ und andern Zufällen/ auff alle vergangene/ gegenwertige/ und künfftige Zeit-Puncten fürgeſtellet wird. Den Kunſtliebenden Deutſcher Nation zu gutt/ herfürgegeben.
Sub ſingularibus Privilegiis perpetuis,
ſumptibus Autoris; BICINI Sileſiorum,
Excudebat Typographus Olſnenſis JOHANN. SEYFFERTUS,
ANNO M. DC L.

Fig. 37: *Maria Cunitz oder Maria Cunitia (?1610 – 1664) war eine versierte hochgebildete schlesische Astronomin (schlesische Hypathia). Sie veröffentlichte 1650 das Buch* ***Urania propitia****, welche die Keplerschen Planetentafeln einer breiten Öffentlichkeit zugänglich machten. Um den Wirren des Dreißigjährigen Krieges zu entgehen, flohen sie auf das Gut der Zisterzienserinnen des Klosters Ołobok, um sich mit den umfangreichen Planetentafeln von Kepler in Ruhe zu beschäftigen.*

Horoskope (1601-1628)

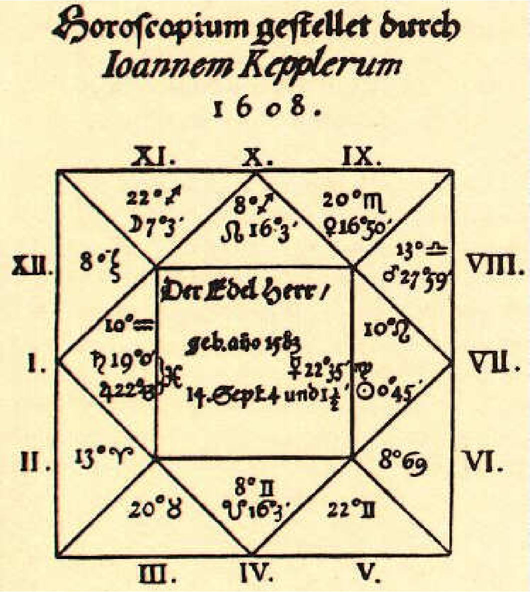


Fig. 38: *Erstes Horoskop von* KEPLER *an* WALLENSTEIN *aus dem Jahre 1608.* KEPLER*: Da mich die Mutter Astronomie im Stich lässt, muss mir die Dirne Astrologie aushelfen.*

Somnium (1608/1634)

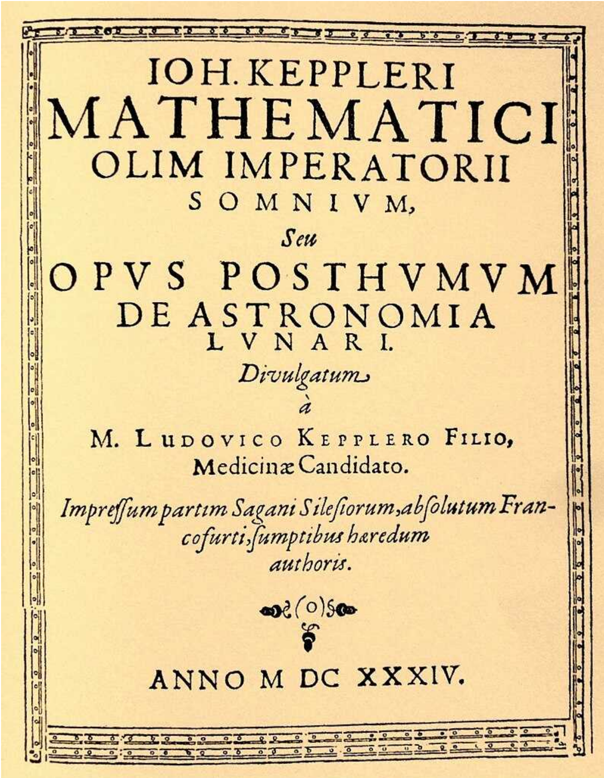

IOH. KEPPLERI
MATHEMATICI
OLIM IMPERATORII
SOMNIVM,
Seu
OPVS POSTHVMVM
DE ASTRONOMIA
LVNARI.
Divulgatum
à
M. LUDOVICO KEPPLERO FILIO,
Medicinæ Candidato.
Impressum partim Sagani Silesiorum, absolutum Francofurti, sumptibus hæredum authoris.
ANNO M DC XXXIV.

Fig. 39: *Faksimile des Somnium (Traum vom Mond), herausgegeben von seinem Sohn Ludwig 1634 in Latein. Erst 1889 wurde der Text ins Deutsche übertragen.*

1608 schrieb KEPLER eine Erzählung mit dem Titel *Somnium („Der Traum“)*, die so realistisch wie damals möglich eine Mondfahrt beschreibt. Man kann Somnium als eine der ersten Science-Fiction-Erzählungen bezeichnen. Das Werk wurde aber erst 1634 postum von seinem Sohn veröffentlicht, da man Schwierigkeiten mit der Kirche (Hexenprozess) fürchtete. Die Erzählung beginnt mit der Einleitung:

Als im Jahre 1608 die Zwistigkeiten zwischen den Brüdern

Kaiser Rudolph und Erzherzog Matthias ihren Höhepunkt erreicht hatten und deren Handlungen vielfach auf Beispiele aus der böhmischen Geschichte zurückgeführt wurden, richtete ich, durch die allgemeine Neugier bewogen, meinen Sinn der böhmischen Legende zu, und als ich dabei zufällig auf die Geschichte der durch ihre magische Kunst berühmten, heldenmüthigen Zauberin Libussa stiess, geschah es eines Nachts, dass ich, nach der Betrachtung der Sterne und des Mondes für Höheres empfänglich geworden, auf meinem Bette einschlief, und da schien es mir, als läse ich in einem auf der Messe erworbenen Buche Folgendes:

Etwas weiter heißt es dann, dass die Hexe Fiolxhilde einen Geist beschwört, der dann von der Reise zum Mond berichtet.

...Ich bat meine Mutter, damit nicht zu zögern und sofort ihren Lehrer zu rufen, damit ich Alles: die Art des Weges und die Beschreibung der Landschaft von ihm höre. Es war Frühling, der Mond zeigte die zunehmende Sichel und begann, nachdem kaum die Sonne unter dem Horizont verschwunden, sogleich aufzuleuchten, zusammen mit dem Planeten Saturn im Sternbild des Stiers. Alsbald begab sich die Mutter zum nächsten Kreuzweg, wo sie mit laut erhobener Stimme und verzückt einige Worte hervorstiess, womit sie ihre Bitte vortrug. Nach Vollendung einiger Ceremonien kehrte sie zurück und setzte sich mit ausgestreckter Hand Ruhe gebietend, neben mich. Kaum hatten wir, wie verabredet, unsere Häupter mit den Gewändern verhüllt, als plötzlich das Geflüster einer heiseren, übernatürlichen Stimme hörbar wurde und in isländischer Sprache wie folgt begann.
Der Dämon aus Levania.
Fünfzig Tausend deutsche Meilen weit im Aether liegt die Insel Levania. Der Weg zu ihr von der Erde und zurück steht sehr selten offen. Unserm Geschlecht ist er zwar dann leicht zugänglich, allein für den Erdgeborenen, der die Reise machen wollte, sehr schwierig und mit höchster Lebensgefahr verbunden. Keinen von sitzender Lebensart, keinen Wohlbeleibten, keinen Wollüstling nehmen wir zu Begleitern, sondern wir wählen solche, die ihr Leben im eifrigen Gebrauch der Jagdp-

ferde verbringen oder die häufig zu Schiff Indien besuchen und gewohnt sind, ihren Unterhalt mit Zwieback, Knoblauch, gedörrten Fischen und anderen von Schlemmern verabscheuten Speisen zu fristen. Besonders geeignet für uns sind ausgemergelte alte Weiber, die sich von jeher darauf verstanden, nächtlicherweile auf Böcken, Gabeln und schäbigen Mänteln reitend, unendliche Räume auf der Erde zu durcheilen. Aus Deutschland sind keine Männer geeignet, aber die dürren Leiber der Spanier weisen wir nicht zurück....

Kepler hatte 1609 nach vielen Jahren Vorarbeit diesen Text abgeschlossen. Im Jahre 1634 von seinem Sohn Ludwig posthum in Latein veröffentlicht. Keplers Erzählung wurde erst 1889 vom Lateinischen ins Deutsche übersetzt. Die obigen Auszüge basieren auf einer Übersetzung des Ingenieurs, Privat - Astronomen und Schriftstellers Ludwig Günther (1846-1910) aus seiner Übersetzung *„Keplers Traum vom Mond"* (Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig 1898). Angeregt dazu wurde er auch durch die Ostpreußische Schriftstellerin Julie Burow[12].

[12] Julie Burow, verheiratete Pfannschmidt, (1806 – 1868). Die historische Erzählung „Johannes Kepler“ wurde von Ihr in 3 Bänden 1857/1865 in Leipzig gedruckt.

Grabstein Keplers (1630)


In hoc agro
quiescit
VIR NOBILISSIMUS DOCTISSIMUS & Celeberrimus,
Dn: IOHANNES KEPPLERUS,
TRIUM IMPERATORUM RUDOLPHI II, MATTHIAE ET FERDINANDI II.
per annos 30. antea vero Procerum Styriae
ab anno 94. usq. 1600. postea quoq. Austriacorum Ordinum, ab anno 1612. usq. ad annum
1628. Mathematicus, toti Orbi Christiano per
monumenta publica cognitus, ab omnibus Doctis inter Principes Astronomiae numeratus, qui manu propria assignatum post se reliquit tale
EPITAPHIUM.
Mensus eram coelos, nunc terrae metior umbras,
Mens coelestis erat, corporis umbra jacet.
In Christo pie obiit Anno Salutis 1630.
die 5 Nov: Aetatis suae
Sexagesimo.

Fig. 40: *Grabinschrift: Hier ruht der hochangesehene, hochgelehrte und weltberühmte Mann Herr Johannes Keppler, 30 Jahre hindurch Mathematikus dreier Kaiser Rudolfs II. Matthias und Ferdinands II., vorher aber der steirischen Landschaft von 1594 bis 1600 dann auch der österreichischen Stände bis zum Jahr 1628, der ganzen Christenheit bekannt durch seine Schriften, von allen Gelehrten den Fürsten der Astronomie zugezählt, der sich diese Grabinschrift selbst bestimmt hat.*

Die Grabstätte von Kepler und sein Grabdenkmal auf dem städtischen Petersfriedhof außerhalb der Stadt Regensburg, unmittelbar südlich vor der Stadtmauer, nahe dem heutigen Peterskirchlein, gingen schon bald nach Beginn des Dreißigjährigen Krieges im Jahr 1633 verloren.

Der Keplerforscher M. Caspar entdeckte aber im Germanischen Nationalmuseum an einem Brief von Kepler an seinen Freund, den Arzt und Naturforscher Johann Oberndorfer (1549-1625) in Regensburg einen rückseitig aufgeklebten und beschriebenen Zettel, der nach Schriftvergleichen vom Keplersohn Ludwig stammen muss (siehe Fig. 40). Die selbst gewählte Inschrift lautet:

Mensus eram coelos, nunc terrae metior umbras.
Mens coelestis erat, corporis umbra iacet.

Die Himmel hab ich gemessen, jetzt mess ich die Schatten der Erde. Himmelwärts strebte der Geist, des Körpers Schatten ruht hier.

Grabinschrift Keplers

Kepler in der astronomischen Kulturgeschichte vom Hochmittelalter über die Renaissance zur Neuzeit

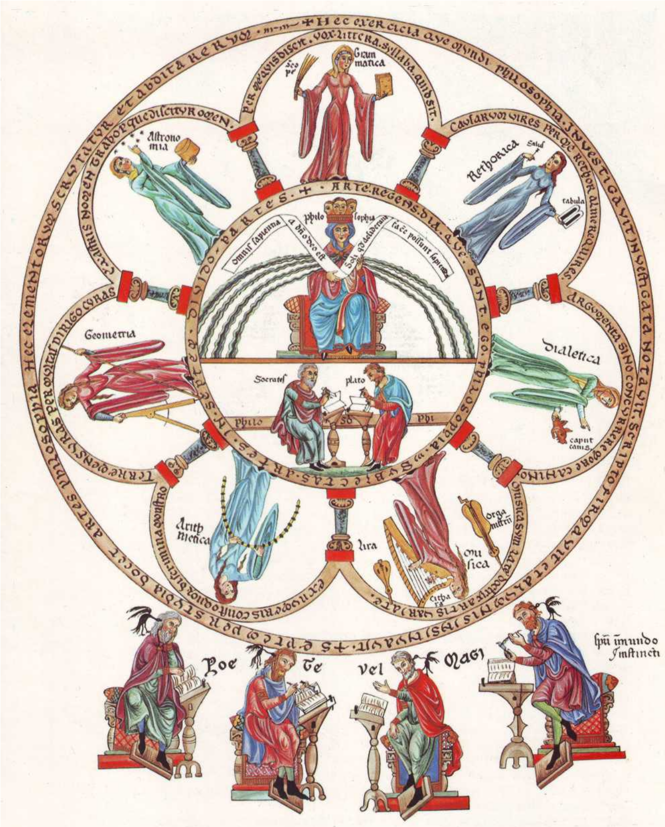


Fig. 41: *Die Philosophie - Sokrates und Platon - thront inmitten der Sieben Freien Künste – also Künste, die nur ein freier Mann ausüben konnte, der nicht auf Broterwerb angewiesen war. Darstellung aus der klösterlichen Enzyklopädie* ***Hortus Deliciarum*** *(**„Garten der Köstlichkeiten“**) der Äbtissin* HERRAD VON LANDSBERG *(1125?-1195) (um 1180) auf dem Odilienberg im Elsass. Die Künste werden hier durch weibliche Allegorien personifziert. Zum Trivium gehören:* ***Grammatik, Rhetorik und Logik****, zum Quadrivium:* ***Arithmetik, Geometrie, Musik und Astronomie****. Die Äbtissin des Klosters Hohenburg auf dem Odilienberg erlangte große Berühmtheit als Autorin und Illustratorin des um 1180 entstandenen Hortus Deliciarum. Das Original verbrannte im deutsch - französischen Krieg 1870 in Straßburg.*

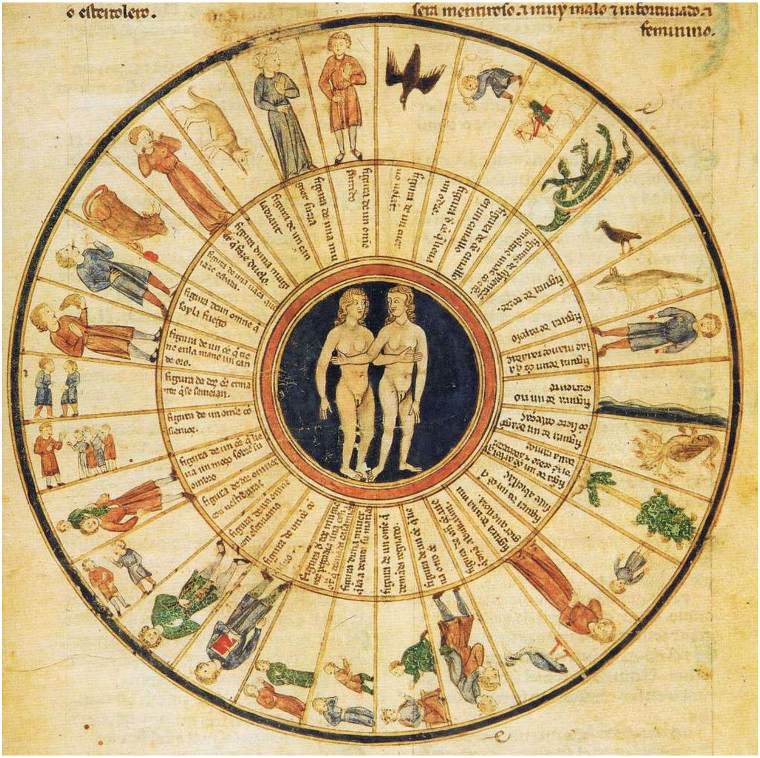


Fig. 42: *Illustration (Paranatellonta) aus einem mittelalterlichen spanischen Astrologie-Lehrbuch, das* Alfons X. dem Weisen *(1221 – 1284) , König von Kastilien, León und Galizien, zugeschrieben wird. Das Bild soll die Wirkung verschiedener anderer Sterne oder Sternbilder im Zusammenspiel mit dem Tierkreiszeichen* ***Zwillinge*** *veranschaulichen. Die Paranatellonta dienten zur Bestimmung der Jahreszeiten – bekannt ist hier der heliakische Aufgang des Sirius, mit dem die alten Ägypter den Zeitpunkt für das Einsetzen der Nilflut bestimmten – und in der Astrologie zur Verfeinerung und Differenzierung von Horoskopen. Über die farbenprächtige Buchmalerei mittelalterlicher Handschriften entwickelte sich bis ins 16. Jahrhundert eine reiche Ikonografie.*

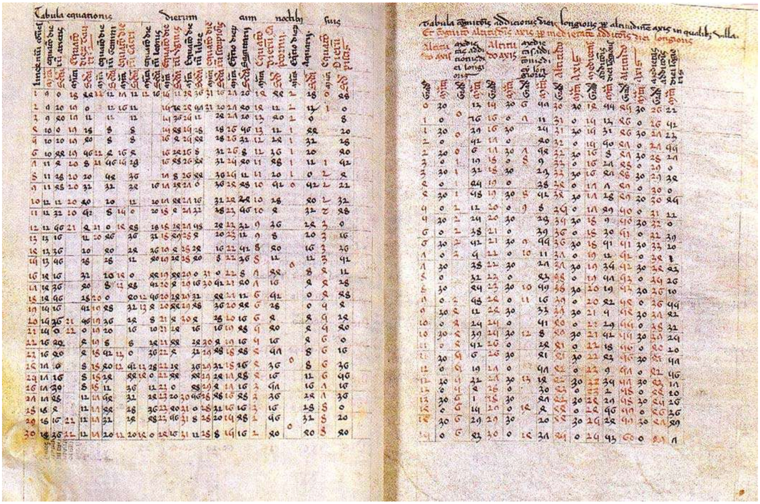


Fig. 43: *Die Alfonsinischen Tafeln (lat. Tabulae Alphonsinae) waren ein astronomisches Werk mit Tabellen zur Berechnung der Stellung von Sonne, Mond und der fünf klassischen Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn, das etwa um 1252 bis 1270 auf Anordnung* Alfons X. von Kastilien und León *(1221 – 1284) unter Leitung der jüdischen Gelehrten* Jehuda Ben Mose *und* Isaak Ben Sid *in Toledo zusammengestellt wurde.* Alfons X. dem Weisen *wird zugeschrieben:* ***"Hätte der Allmächtige mich vor Beginn der Schöpfung zu Rate gezogen, so hätte ich ihm etwas Einfacheres empfohlen".*** *Er soll diese Bemerkung gemacht haben, nachdem er sich intensiv mit dem damals vorherrschenden Ptolemäischen Weltbild (geozentrisches System) und den extrem komplexen mathematischen Berechnungen, die zu seiner Erklärung notwendig waren, auseinandergesetzt hatte. Die komplizierten Epizykel- und Deferenten-Konstruktionen, die zur Erklärung der Planetenbewegungen erforderlich waren, erschienen ihm unpraktisch und umständlich. Es wird oft vermutet, dass das Zitat apokryph (nicht authentisch) ist und erst später, etwa im 16. Jahrhundert durch den Historiker Jerónimo de Zurita, erwähnt wurde, der es jedoch selbst ablehnte.*

Fig. 44: *Allegorische Darstellung der sieben freien Künste in der* ***Margarita philosophica****, einer allgemeinen Enzyklopädie aus dem Jahr 1503.* GREGOR REISCH *(1467-1525) hat sie zwischen 1489 und 1496 in lateinischer Sprache verfasst; gedruckt wurde sie erstmals 1503 in Freiburg durch den aus Straßburg stammenden Drucker Johann Schott, einen Schüler von Gregor Reisch. Neben dem Astronomen steht die Muse der Astronomie.*

INCIPIT·THEORICA·NOVA·REALEM·SPERARV·
HABITVDINEM·ATQ3·MOTVM·CV·TERMINIS
TABVLARVM·DECLARANS. ·DE·SOLE·

Fig. 45: *Georg von Peuerbach (1423 - 1461) war Humanist und Astronom an der Wiener Universität. Mit seinem Schüler Regiomontanus bemühte er sich um die Wiederentdeckung der Kenntnisse der griechischen Astronomie und um die Entwicklung einer neuen Planetentheorie. Durch seine verbesserte Planetentheorie wurde er ein Wegbereiter des kopernikanischen Weltbilds. Er baute innovative Messinstrumente, führte die Sinus-Funktion in astronomische Berechnungen ein und gilt als weltweit erster Universitätsprofessor speziell für Astronomie. Das Bild zeigt den Anfang von Peuerbachs* ***Theoricae novae planetarum*** *in der Handschrift Krakau, Biblioteca Jagiellońska, Ms. 599, fol. 1r (15. Jahrhundert)*

Fig. 46: *Johannes de Sacrobosco (auch Joannis de Sacro Bosco, englisch John of Holywood oder John of Holybush), (?1195 -?1256) war ein Mönch, Mathematiker und Astronom, der an der Universität Paris lehrte. Das Buch De Spaera mundi war für Jahrhunderte das Lehrbuch für Mathematik und Astronomie. Biblioteca Apostolica Vaticana, Pal. lat. 1400, fol. 12r (Ende des 13. Jahrhunderts)*

Fig. 47: *Astronomicum Caesareum (Astronomie der Caesars), auch übersetzt als Die Astronomie des Kaisers, ist ein Buch des Hunanisten* PETRUS APIANUS *(1495-1552), das erstmals 1540 veröffentlicht wurde. Karl V. und sein Bruder Ferdinand I., Kaiser des Heiligen Römischen Reiches, gaben beide das Werk in Auftrag. Es wurde in der Druckerei des Apianus (Academia) in Ingolstadt gesetzt und benötigte zur Fertigstellung acht Jahre. Als Grundlage für die Planetenbewegung galt noch das geozentrische System des Ptolemaios. Heute sind noch 111 Exemplare dieses prachtvollen Buches bekannt.* TYCHO BRAHE *kaufte 1599 eine Kopie, die heute in der Forschungsbibliothek Gotha, Schloss Friedenstein, aufbewart wird.*

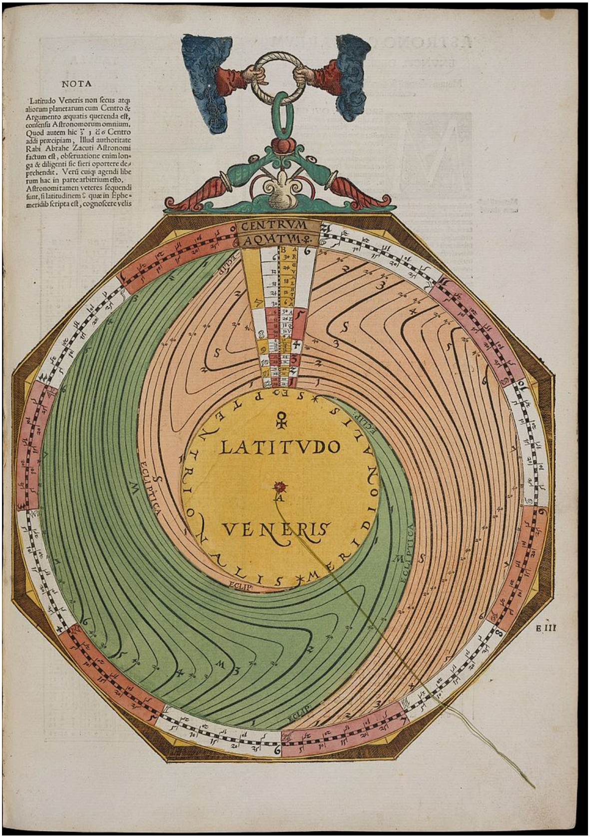


Fig. 48: *Die Bewegung der Venus im Astronomicum Caesareum von 1540 nach dem geozentrischen Modell von Ptolemaios. 21 der 36 Holzstiche sind als* ***Volvelle*** *konzipiert, eine Vorrichtung mit drehbaren (rotierenden) Elementen. Mit einem Faden konnte die Position des Planeten Venus auf der äußeren Skala abgelesen werden. Kepler urteilte über die Volvelle: “Wer gibt mir nun eine Tränenquelle, dass ich den kläglichen Fleiß des Apianus beweine, der in seinem Opus Caesareum im Vertrauen auf Ptolemäus so viele gute Stunden aufwandte und so viele höchst geistreiche Überlegungen damit verschwendete, durch Spiralen, Schleifen, Schneckenlinien, Wirbel und ein ganzes Labyrinth von höchst verwickelten Windungen darzustellen, was doch nur Menschen geschaffen haben und was die Natur in keiner Weise als ihr eigenes Bild gelten lässt.”*

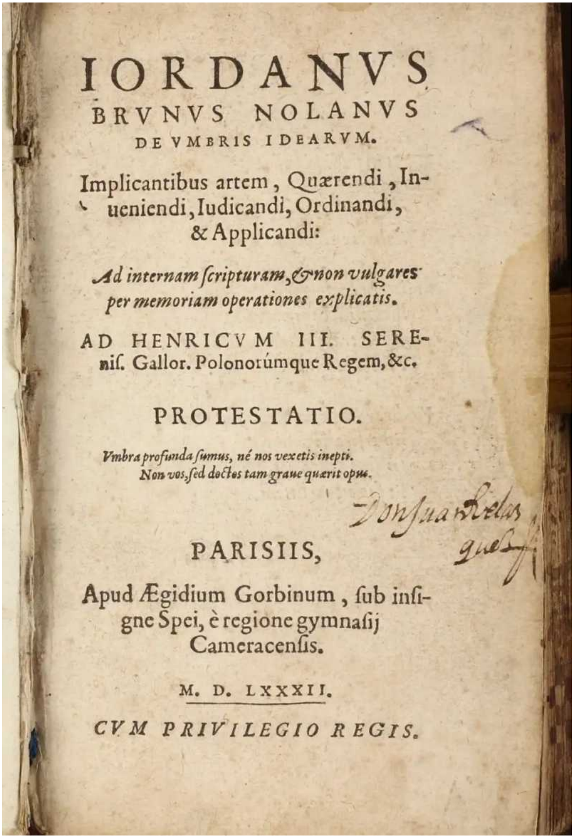
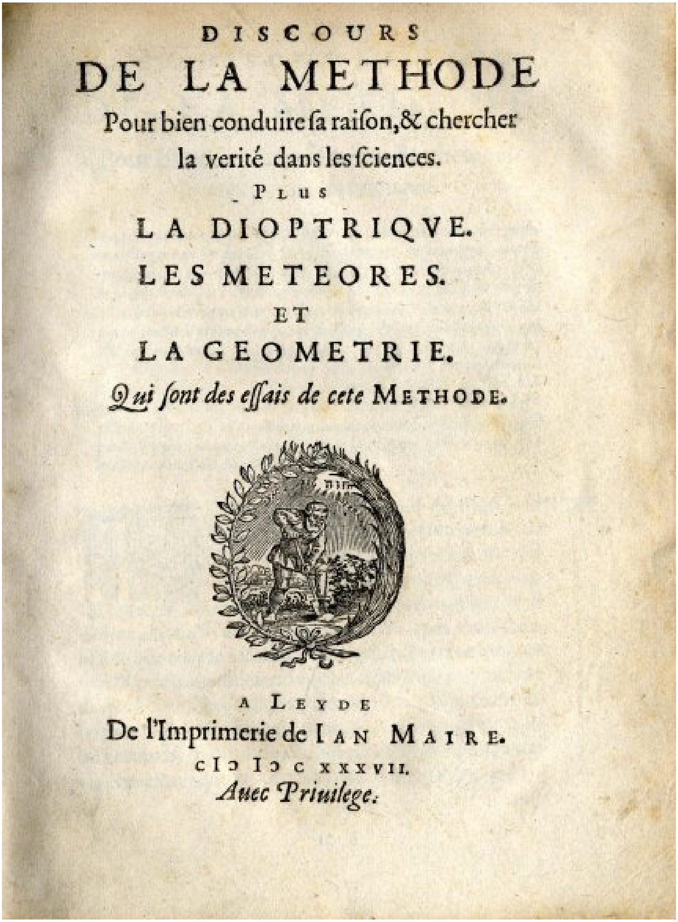


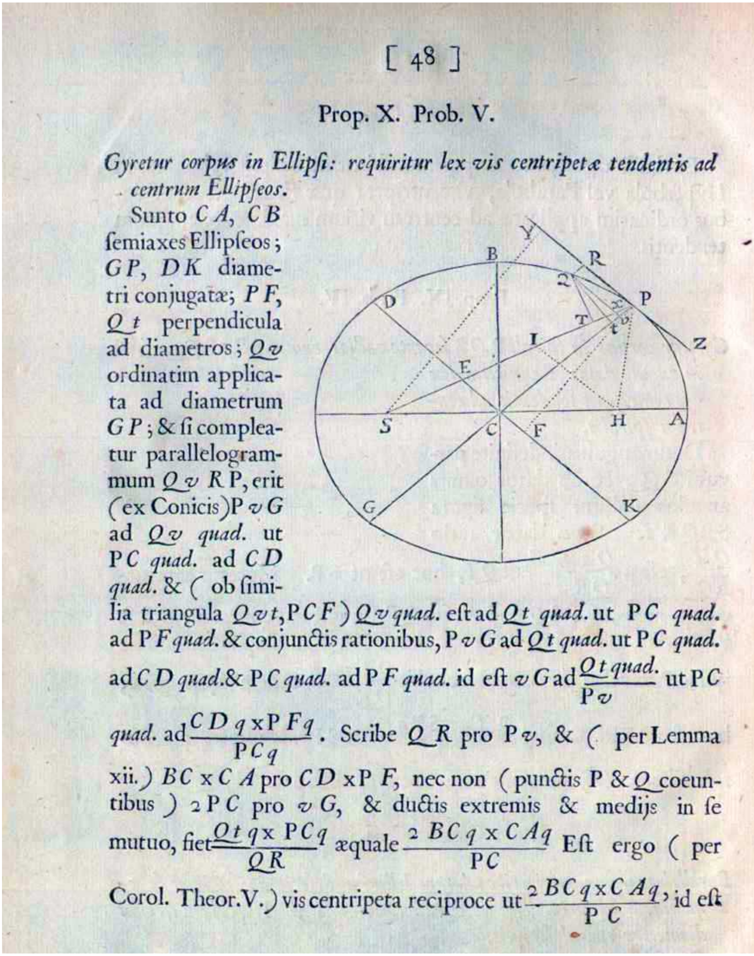
Fig. 49: *De umbris idearum ist ein Werk des italienischen Mönchs, Priesters, Philosophen, Dichters und Kosmologen* GIORDANO BRUNO *(1548–1600), das 1582 in Paris veröffentlicht wurde. Der Titel bedeutet "**Über die Schatten der Ideen**".* GIORDANO BRUNO *geht davon aus (wie Platon), dass unsere Sinne uns nicht das wahre Wesen der Dinge vermitteln können. Wir sehen nicht die wahre Substanz oder die Idee eines Gegenstandes, sondern lediglich seine Spur, sein Abbild oder seinen Schatten. Die Rückkehr zur kosmischen Wahrheit erfolgt über die ordnende und systematisierende Arbeit des menschlichen Geistes mit diesen Schatten. Aus der Annahme von* GIORDANO BRUNO*, das Universum sei unendlich und habe unendlich viele Sonnen mit unendlich vielen bewohnten Planeten, folgte für* KEPLER *und auch für* BRUNO *das Paradoxon, das später nach W.* OLBERS *(1758-1840) benannt wurde.*



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Auec Priuilege.

Fig. 50: *Der Discours de la méthode, mit vollem Titel Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences („Abhandlung über die Methode, seine Vernunft gut zu gebrauchen und die Wahrheit in den Wissenschaften zu suchen") ist ein Hauptwerk von R.* D*ESCARTES.*



[48]

Prop. X. Prob. V.

Gyretur corpus in Ellipsi: requiritur lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipseos.

Sunto CA, CB semiaxes Ellipseos; GP, DK diametri conjugatæ; PF, Qt perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & si compleatur parallelogrammum $QvRP$, erit (ex Conicis) PvG ad Qv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob similia triangula Qvt, PCF) Qv *quad.* est ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, PvG ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id est vG ad $\frac{Qt\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq}{PCq}$. Scribe QR pro Pv, & (per Lemma xii.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non (punctis P & Q coeuntibus) $2PC$ pro vG, & ductis extremis & medijs in se mutuo, fiet $\frac{Qtq \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2\,BCq \times CAq}{PC}$. Est ergo (per Corol. Theor. V.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2\,BCq \times CAq}{PC}$, id est

Fig. 51: *In seinem Werk Philosophiae Naturalis Principia Mathematica bewies I. NEWTON im Jahre 1687 rein geometrisch, dass unter der Annahme eines Kraftgesetzes umgekehrt proportional zum Abstand zur Sonne die drei Keplerschen Gesetze vollständig erklärt werden können.*

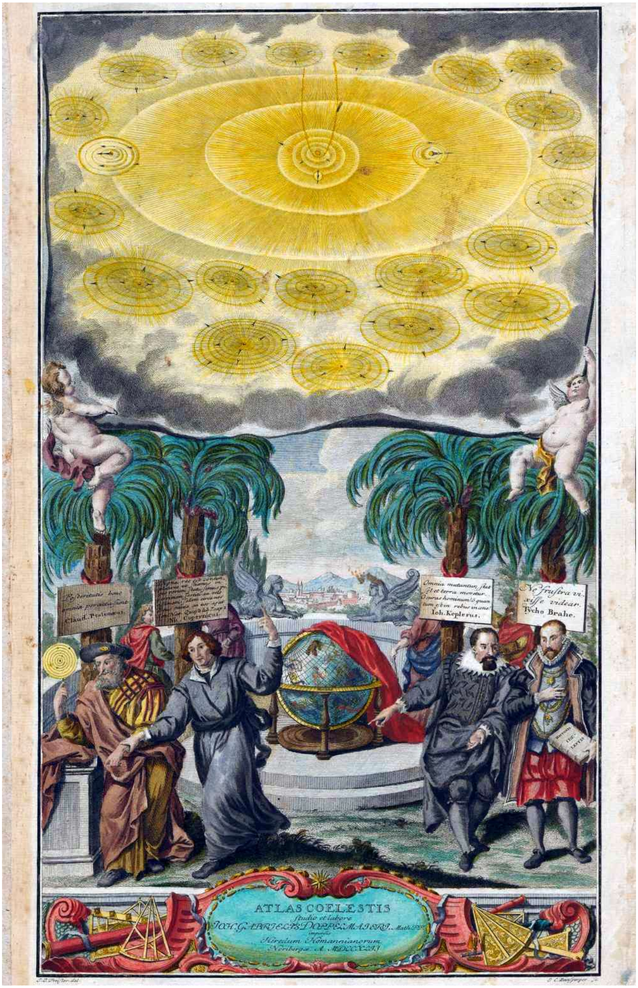


Fig. 52: *Coloriertes Titelkupfer von J.G. DOPPELMAYERs Atlas Coelestis, Nürnberg 1742. Ptolemaios und Copernicus links, Kepler und Brahe rechts. JOHANN GABRIEL DOPPELMAYR (1677 - 1750) war eigentlich Mathematiker. 1742 erschien sein Himmelsatlas, in dem auf 30 prächtigen doppelseitigen Tafeln das astronomische Wissen seiner Zeit zusammengefasst wurde. DOPPELMAYR arbeitete mit dem Kartographen JOHANN BAPTIST HOMANN (1664-1724) zusammen, einem ehemaligen Dominikanermönch, der sich in Nürnberg einen einflussreichen kartografischen Verlag aufbaute, den dessen Erben noch bis ins 19. Jahrhundert betrieben.*

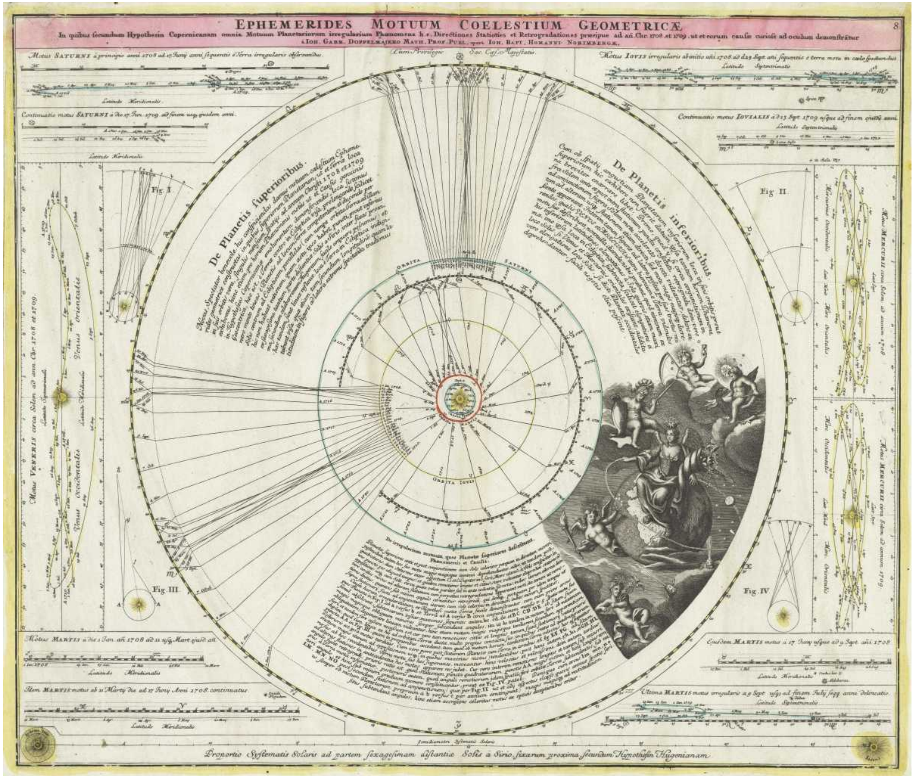


Fig. 53: *Blatt 11 des Atlas Coelestis, Nürnberg 1742. Die scheinbare rückläufige Bewegung der äußeren Planeten*

Fig. 54: *Emile de Chatelet als Mittlerin zwischen Newton und Voltaire. Frontipiz des Buches von Voltaire: Elémens de la philosophie de Newton, mis à la portée de tout le monde (Amsterdam 1738). Übersetzung der "Principia" aus dem Englischen ins Französische.*


Bernhard von Fontenelle
Dialogen
über die
Mehrheit der Welten.

Mit Anmerkungen und Kupfertafeln
von
Johann Elert Bode,
Astronom der Königl. Akademie der Wissenschaften
zu Berlin.

Berlin 1780.
Bey Christian Friedrich Himburg.

Fig. 55: *Bernhard von Fontenelle (1657-1757) : Dialogen über die Mehrheit der Welten. Mit Anmerkungen und Kupfertafeln von Johann Elert Bode, Astronom der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1780.*

Literaturverzeichnis

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler

[2] Bialas, Volker: *Johannes Kepler*. Beck, München 2004 (= Beck'sche Reihe Denker. Band 566).

[3] Duerbeck, H.W. : Verzeichnis alter Bücher (Bonn 1976).

[4] Caspar, M. : *Johannes Keplers wissenschaftliche und philosophische Stellung*. In: Corona. Band **5**. 1934/1935, S. 293–325.

[5] Caspar, M. & F. Hammer : Johannes Kepler, Gesammelte Werke. **1-26** Bde. Einige Bände speziell von M. Caspar (1880-1956) Bd. **1**: Mysterium Cosmographicum, De Stella Nova, 1938, Bd. **3**: Astronomia Nova, 1937; Bd. **4**: Kleinere Schriften 1602/1611, Dioptrice, 1941 (zusammen mit Hammer); Bd. **6**: Harmonice Mundi, 1940; Bd. **7**: Epitome Astronomiae Copernicanae, 1953. C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung München, 1937–2017.

[6] Caspar, M. & Walther von Dyck: *Johannes Kepler in seinen Briefen*. 2 Bde. Oldenbourg, München/Berlin 1930.

[7] Caspar, M. , Ludwig Rothenfelder, Martha List und Jürgen Hamel: *Bibliographia Kepleriana*. C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung München, Bd. 1 2. A. 1968, Bd. 2 1998.

[8] Caspar, M.: *Johannes Kepler*. Kepler-Gesellschaft, Weil der Stadt, 5. A. 2019.

[9] Günther, Ludwig: *Traum vom Mond*. LEIPZIG 1898. Druck und Verlag von B.G. Teubner. Digitale Ausgabe erstellt von Gabriele Dörflinger. Universitätsbibliothek Heidelberg 2013

[10] Krafft, Fritz: *400 Jahre moderne Astronomie – Johannes Kepler, der Beginn des Umbruchs*. Eröffnungsvortrag des Studium Generale WS 2009/2010 an der Friedrich Schiller Universität Jena 2009

[11] Pauli, Wolfgang: *Der Einfluss archetypischer Vorstellungen auf die Bildung naturwissenschaftlicher Theorien bei Kepler*. Jahresbericht 1947/48 des Psychologischen Clubs Zürich (S.37-44) (1948)

[12] Posch, Thomas: *Johannes Kepler: Die Entdeckung der Weltharmonie*. Verlag THEISS. Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, (2017)

[13] Begleitband zur Ausstellung *himmelwärts* zum 450ten Geburtstag von Johannes Kepler (1571-1630). Herausgeber: Kepler Gesellschaft e.V.; Universität Stuttgart; Technische Universität Darmstadt. (2022)