Wellenmechanik der Planetenringe

Oszillatoren, Instabilitäten und Spiralwellen

Eugen Willerding

www.eugen-willerding.de

Cover: Titelbild: NASA/Cassini

Wellenmechanik der Planetenringe

Oszillatoren, Instabilitäten und Spiralwellen

Eugen Willerding

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Beobachtungen, Theorien und Entdeckungen

> *Wenn man jenen großen, über dem Äquator des Planeten ohne Zusammenhang ausgespannten Bogen einmal wirklich gesehen hat, so kommt der Geist nicht wieder zur Ruhe. Wir können nicht einfach erklären, daß es sich so verhält, und ihn als eine Beobachtungstatsache der Natur beschreiben, die keine Deutung zulässt oder verlangt. Wir müssen entweder seine Bewegung nach den Prinzipien der Mechanik erklären oder eingestehen, daß im Bereich der Saturnwelt eine Bewegung nach Gesetzen vor sich geht, die zu entschleiern wir nicht im Stande sind...*
>
> J.C. Maxwell, 1859

Als Galileo Galilei zum erstenmal im Juli 1610 sein Teleskop auf den Saturn richtet, glaubt er, das Saturn aus drei Körpern bestehen müsse, die sich untereinander weder bewegen noch berühren. Als er nach zwei Jahren den Ring wieder beobachtet, sah er sich einer *Metamorphose* gegenüber, die er nicht mehr deuten kann: Die beiden begleitenden Körper waren gänzlich verschwunden. Die Verwirrung stieg, als sich nach zwei weiteren Jahren die beiden Körper neu bildeten, aber offensichtlich in Form von Henkeln am Zentralkörper.

Die unmittelbaren Nachfolger Galileis in der Beobachtung des Saturns sind C. Scheiner (1573-1650), P. Gassendi (1592-1655), J. Hevelius (1611 - 1687), G. Riccioli (1598-1671), G. Biancani (1566-1624) und F. Fontana (1580 - 1650). Es werden eigenartige Modelle vorgeschlagen

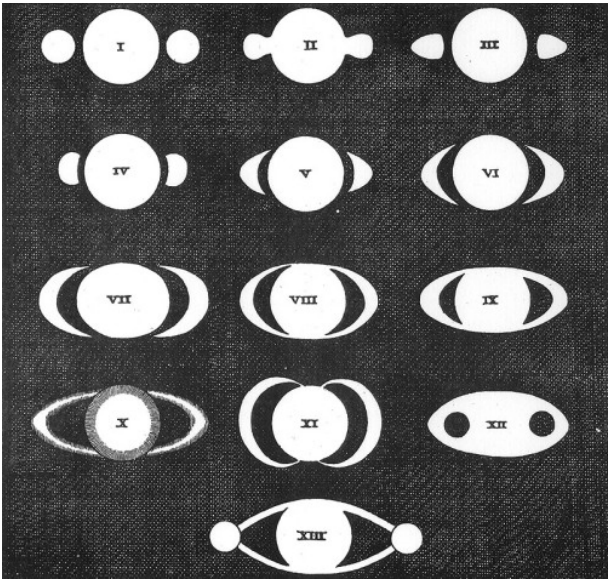

Fig. 1.1: *Die Entwicklung der Modellvorstellungen über die Gestalt des Planeten Saturn im Zeitraum 1610 - 1655. (Aus* Huygens *Systema Saturnium). I* Galileo *(1610); II* Scheiner *(1614); III* Riccioli *(1641-1643); IV-VII* Hevelius*; VIII + IX* Riccioli *(1648-1650); X* Divini *(1646-1648); XI* Fontana *(1636); XII* Biancani *(1616),* Gassendi *(1638-1639); XIII* Fontana *in Rom (1644-1645).*

und diskutiert (siehe (1.1); wie von dem Astronomen J. Hevelius, dem Mathematiker G.P. de Roberval (1602-1675), dem italienischen Priester und Astronomen G.P. Hodierna (1597-1660), dem britischen Astronomen und Architekten Sir C. Wren (1632-1722) und von dem ostfriesischen Theologen D. Fabricius (1564-1617).

Doch alle diese Modelle stellen keine befriedigende Deutung des Phänomens dar. Die endgültige Lösung des Problems gelang 1655 dem holländischen Mathematiker und Physiker C. Huygens (1629-1695) nach der Entdeckung des Saturnmondes Titan ([12]). Nach den Worten des aufgeschlüsselten Anagrammes:

> *Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente ad eclipticam inclinato*

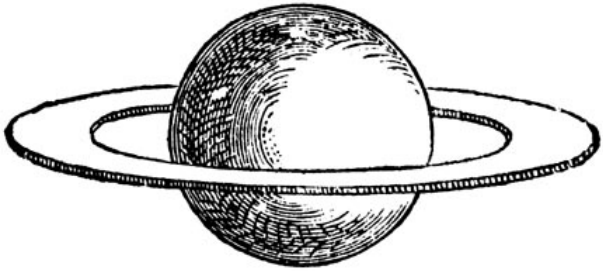

Fig. 1.2: *Der Planet Saturn in der ersten richtigen Deutung nach C. Huygens 1659 (Systema Saturnium [12]). Irrigerweise nahm Huygens an, daß der Ring als starrer Festkörper um den Planeten rotiert.*

kann er die beobachten Veränderungen am Saturn durch mit einem zur Ekliptik geneigten Ring, der im Raum seine Lage beibehält, erklären. Er fand insbesondere heraus, dass diese Ringe keine Verbindung zum Planeten haben und ihr geheimnisvolles Verschwinden alle 14 Jahre dadurch zustande kam, dass man sie beim Verschwinden genau von der Seite sah, sie aber dann zu dünn waren, um von der Erde aus wahrgenommen werden zu können. Huygens Arbeit an dem Ring des Saturns zeigt, dass das Finden von Lösungen nicht nur eine Frage von technisch überlegener Beobachtung ist, sondern auch durch das Faktum, dass in der wissenschaftlichen Wahrnehmung das Sehen der Gegenstände mit dem Auge direkt gekoppelt ist an ein *in der Theorie begründetes Verständnis.*

In den darauffolgenden Jahren wurden die Teleskope so weit verbessert, daß der italienische Mathematiker, Astronom und Ingenieur Giovanni Domenico Cassini (1625 - 1712) eine feine Teilung im Saturnring feststellen konnte. Sein Fernrohr hatte dabei einen Objektivdurchmesser von etwa 60 mm und eine Brennweite von etwa 6000 mm. Beobachtet wurde bei etwa 90facher Vergrößerung. Da die Linsen noch nicht achromatisch waren, hatten die Bilder im Teleskop immer „farbige Säume“.

Obwohl gegen Ende des siebzehnten Jahrhunderts der Saturnring schon sehr detailliert beobachtet worden ist, besteht über seine physikalische Beschaffenheit Unklarheit. Huygens hatte angenommen, daß der Ring als ein Festkörper starr um den gemeinsamen Schwerpunkt rotiert - allerdings ohne einen Stabilitätsbeweis. Cassini und der Philosoph und

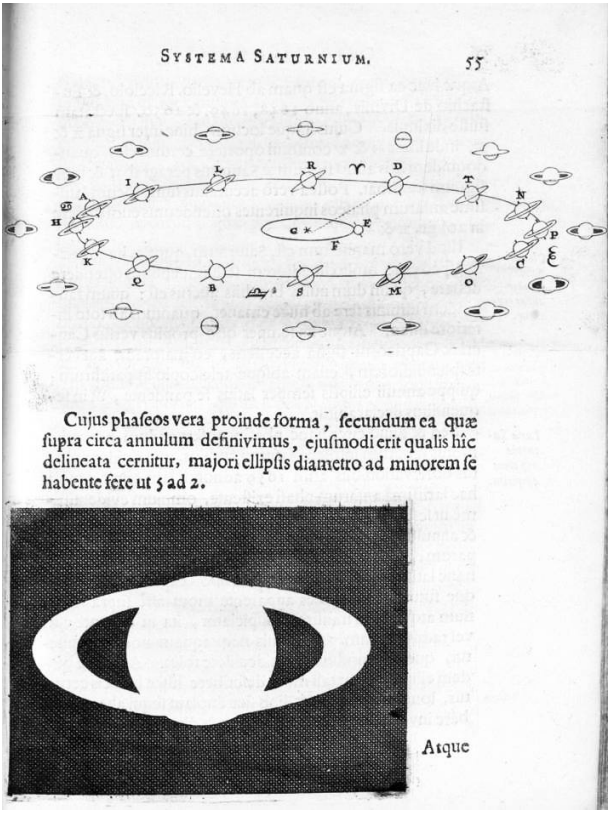

Fig. 1.3: *Der Planet Saturn und sein richtig erkanntes Ringsystem in der Schrift „Systema Saturnium“ von Christiaan Huygens aus dem Jahre 1659.*

Mathematiker THOMAS WRIGHT (1711-1786) vertreten die neue Hypothese, daß der Ring aus einer sehr großen Zahl von Teilchen besteht, die den Saturn als extrem kleine Monde umkreisen. CASSINI postuliert allerdings eine ausgedehnte Atmosphäre des Saturns hinzu, durch welche die Teilchen herumgeführt werden sollen. Ein Modell im Rahmen der Newton'schen Gravitationstheorie existierte somit noch nicht.

Der junge Philosoph IMMANEL KANT (1724-1804) entwickelt 1755 in seinem Jugendwerk *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*

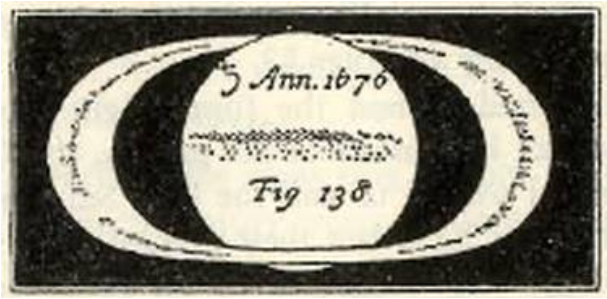

Fig. 1.4: *Die Entdeckung einer Teilung (Materielücke) im Saturnring durch G.D. Cassini im Jahre 1676 (Cassini - Teilung).*

eine Meteoritenhypothese, nach der sich Sonne und Planeten aus einer Wolke kleiner, frei beweglicher fester Teilchen gebildet haben, die sich bei Zusammenstößen mehr und mehr verdichten. Unter anderem schreibt er:

> *So sehen wir einen Raum, der zwischen zwei nicht weit voneinander abstehenden Flächen, in dessen Mitte der allgemeine Plan der Beziehung sich befindet, begriffen ist, von dem Mittelpunkte der Sonne an in unbekannte Weiten ausgebreitet, in welchem alle begriffenen Teilchen, jegliche nach Maßgabe ihrer Höhe und der Attraktion, die daselbst herrscht, abgemessene Zirkelbewegungen in freien Umläufen verrichten, und daher, indem sie bei solcher Verfassung einander so wenig als möglich mehr hindern, darin immer verbleiben würden, wenn die Anziehung dieser Teilchen des Grundstoffes untereinander nicht alsdann anfinge, seine Wirkung zu tun und neue Bildungen, die der Same zu Planeten, welche entstehen sollen, sind, dadurch veranlaßte. Denn indem die um die Sonne in parallelen Zirkeln bewegten Elemente, in nicht gar zu großem Unterschiede des Abstandes von der Sonne genommen, durch die Gleichheit der parallelen Bewegungen beinahe in respektiver Ruhe gegen einander sind, so tut die Anziehung der daselbst befindlichen Elemente von übertreffender spezifischer Attraktion sogleich hier eine beträchtliche Wirkung.*

In einer Fußnote bemerkt er dann weiter:

> *Der Anfang der sich bildenden Planeten ist nicht allein in der Newtonschen Anziehung zu suchen. Diese würde bei einem Partikelchen von so ausnehmender Feinigkeit gar zu langsam und schwach sein. Man würde vielmehr sagen, daß in diesem Raume die erste Bildung durch den Zusammenlauf einiger Elemente, die sich durch die gewöhnlichen Gesetze des Zusammenhanges vereinigen, geschehe, bis derjenige Klumpen, der daraus entstanden, nach und nach so weit angewachsen, daß die Newtonsche Anziehungskraft an ihm vermögend geworden, ihn durch seine Wirkung in die Ferne immer mehr zu vergrößern.*

Interessant ist jetzt seine Diskussion zur Stabilität des Saturnringes, von dem er natürlich annimmt, daß er aus zahllosen kleinen Teilchen besteht. Er muss hier erklären, warum nicht auch der Saturnring sich in ein Satellitensystem aufgelöst hat. Er sagt:

> *Der Mechanismus der erzeugenden Bewegung des Ringes führt auf eine Bestimmung, die denselben vermittelst eben der Ursachen, die ihn zerstören sollen, in einen sicheren Zustand versetzt, dadurch daß er in etliche konzentrische Zirkelstreifen geteilt wird, welche wegen der Zwischenräume, die sie absondern, keine Gemeinschaft mehr untereinander haben.*

Die letzten Sätze klingen aus heutiger Sicht sehr modern - KANT war seiner Zeit hier weit voraus. Man hört schon Ansätze einer *gravo - viskosen Instabilität* in differentiell rotierenden Materiescheiben oder Skizzen eines *negativen Diffusionsprozesses*, die zu „Ringletbildung“ auf 100 Meter Skalen in Planetenringen führen kann. Fast meint man bei KANT schon die Bildung von Spiralfragmenten (*„Propeller-Strukturen“*) in der Scheibe zu hören. All dies ist für das Jahr 1755 äußerst bemerkenswert. Einen Höhepunkt rein theoretischer Analyse zur Dynamik und Stabilität selbstgravitierender Materiescheiben im 19. Jahrhundert stellt sicherlich die Arbeit des jungen JAMES CLERK MAXWELL aus dem Jahre 1859 dar ([19]). Sie entstand als Antwort auf das sogenannte *Adams Prize Essay* vom 23. März 1855, welches von J. CHALLIS (1803-1882) und W. THOMSON (1822-1907), dem späteren Lord KELVIN, ausgestellt worden war ([2]). Die Begeisterung für diese tiefgreifende Analyse wird besonders durch den damaligen *Astronomer Royal* G. B. AIRY (1801-1892)

Fig. 1.5: *Das mechanische Ringmodell von J.C.*Maxwell *aus dem Jahre 1859 mit seiner mechanischen Visualisierung einer g-Wellen-Mode in einem Teilchenring.*

ausgedrückt. Er schreibt extra einen Bericht (Review) in der britischen Zeitschrift *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* für den 10. Juni 1859. ([**?**]). Im ersten Abschnitt heißt es:

> *The remarkable essay of which we have given the title was published in the beginning of the present year. The subject of it is so interesting, the difficulty of treating it in its utmost generality so considerable, and the results at which the author arrives so curious, that we think a brief abstract of it will be acceptable to the readers of the Monthly Notices.*

Sein „kurzes Referat“, das über mehrere Seiten geht, endet schließlich mit der Bemerkung:

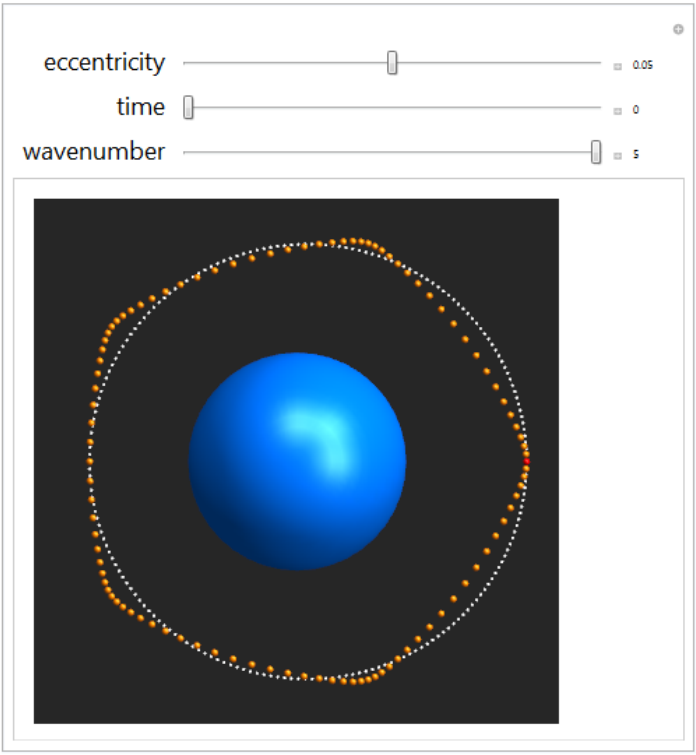

Fig. 1.6: *Eine moderne Animation des Ringmodelles von J.C.*MAXWELL *mit der Software Wolfram Mathematica. Durch Einstellen einer positiven oder negativen Wellenzahl können unterschiedliche g-Wellen in ihrer Bewegung anschaulich gemacht werden.*

> *The abstract which we have given will, we think, fully justify the opinion that the theory of Saturn's rings is now placed on a footing totally different from any that it has occupied before, and that the essay which we have abstracted is one of the most remarkable contributions to mechanical astronomy that has appeared for many years.*

Die Prophezeiung von G.B. AIRY hat sich bestätigt: Erst hundert Jahre

nach Maxwell wurden wieder theoretische Arbeiten veröffentlicht, die sich mit *Dichtewellen in Materiescheiben* beschäftigten, jetzt aber zunächst für *Spiralgalaxien*. In den einzelnen Kapiteln wird auf diese Arbeit immer wieder Bezug genommen werden.

1.2 Die Raumsonden Voyager I/II und Cassini - Huygens

Noch im Jahre 1975 kannte man nur den Saturnring als Beispiel einer Materiescheibe um einen planetaren Körper. Vielleicht war die Exotik seiner Erscheinung daran schuld, daß man bei anderen Planeten ähnliche Materieringe nicht erwartete. So war die Entdeckung des Jupiterringes durch die Raumsonde Voyager I einem glücklichem Zufall zu verdanken, während die Uranusringe 1977 durch eine günstige Sternbedeckung festgestellt wurden. Durch neue digitale Empfänger im Infratrotbereich des elektromagnetischen Spektrums ist es heute relativ leicht möglich, an jedem Großteleskop diese Uranusringe nachzuweisen. Auch erste Anzeichen eines *unvollständigen* Neptunringes haben sich 1982 durch eine Sternbedeckung ergeben. Voyager II entdeckte dann 1989 ein kompliziert verästeltes Ringbogensystem, wobei im äußeren *Adams* - Ring die drei sogenannten Ringverdichtungen *Egalité, Fraternité* und *Liberté* besonders auffällig waren. Mit der Zeit scheinen diese Phänomene aber sehr variabel zu sein. Im Jahre 2014 wurde sogar um den Asteroiden *Chariklo*, dessen Bahn sich zwischen Uranus und Neptun befindet, wiederum durch eine Sternbedeckung ein System aus zwei schmalen Ringen entdeckt. Am 15. Oktober 1997 starteten schließlich die beiden Raumsonden **Cassini - Huygens**, um eine Langzeitstudie des Ringplaneten Saturn und seiner Monde durchzuführen. Der *Lander* Huygens sollte sogar auf dem Saturnmond Titan landen. Am 1. Juli 2004 schwenkte schließlich Cassini in die Umlaufbahn um den Saturn ein, und am 14. Januar 2005 landete Huygens drei Wochen nach der Trennung von Cassini auf dem Mond Titan und sandte 72 Minuten lang Daten und Bilder, die das Verständnis über diesen seltsamen größten Mond des Saturns deutlich verbesserten. Für die Ringforschung waren besonders die Monate August und September des Jahres 2009 aufregend, als die Ringe von der Sonne während des Äquinoktiums in einem Winkel von nur 0° (also exakt von der Seite) beleuchtet wurden. Man stellte fest, dass die Ringe des Saturns entgegen früheren

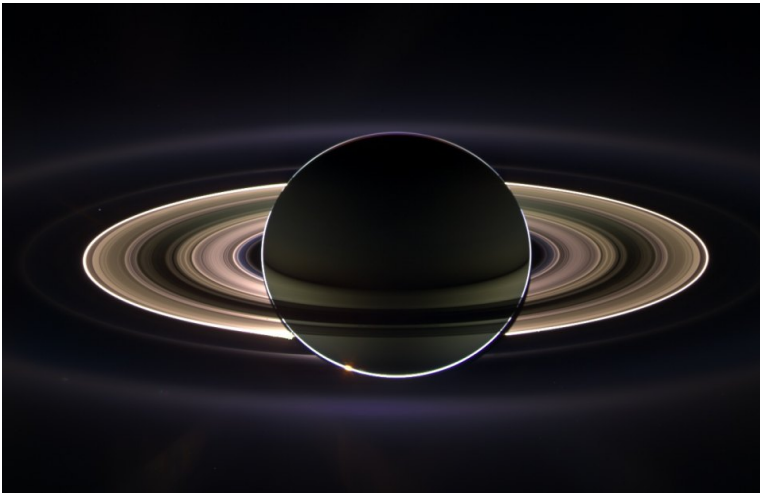

Fig. 1.7: *Der Planet Saturn mit seinem komplexen Ringsystem, aufgenommen mit der Cassini – Huygens Sonde im Gegenlicht zur Sonne. Bei Cassini – Huygens handelt es sich um eine Doppelsonde zur Erforschung des Saturn und seiner Monde, die am 15. Oktober 1997 aufgebrochen war und am 1. Juli 2004 in eine Umlaufbahn um den Planeten Saturn eintrat. Im Gegensatz zu den Voyager - Missionen ist mit der Cassini - Sonde eine Langzeitstudie des Ringsystems von Saturn möglich geworden.*

Annahmen nicht so flach sind wie angenommen. In den Hauptringen, dessen Höhe man vorher auf etwa 10 Meter abgeschätzt hatte, wurden große Cluster - Formationen entdeckt, die bis zu vier Kilometer hoch waren. Auch wurden längere Formationen entdeckt, die wie Wände bis zu drei km über die Ringebene aufragen und auch schräg zur lokalen Scherströmung stehen. Grundsätzlich bieten sich drei Modellvorstellungen an, um die dynamische Entwicklung eines Planetenringes als einer sehr flachen selbstgravitierenden Materiescheibe um einen Zentralkörper besser zu verstehen:

- **Kinetisches Modell**: Man versucht, daß Vielteilchensystem eines Planetenringes mit Hilfe der statitischen *Maxwell - Boltzmann - Theorie* zu verstehen. Dabei kommt es darauf an, für gewisse Verteilungsfunktionen, welche der Boltzmanngleichung gehorchen, Lösungen und Entwicklungstendenzen aufzuzeigen. Zentrales Problem

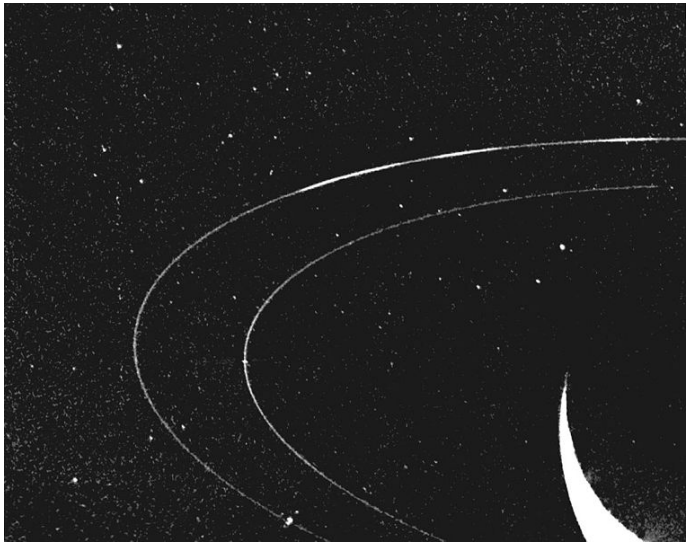

Fig. 1.8: *Der Planet Neptun und sein zeitlich stark variables Ringsystem, hier gesehen von Voyager II. Die drei Verdichtungen im äußeren Adams - Ring zeigen seit 2005 dynamische Aktivitäten, die wohl nur durch eine komplizierte Mond - Ringwechselwirkung mit Selbstgravitation des Ringes erklärt werden kann.*

sind hier die Beschreibung inelastischer Stöße zwischen unterschiedlich großen Teilchen sowie ihre inneren Freiheitsgrade (Eigenrotation). Auch können Anlagerungsprozesse (Agglomeration) eine wichtige Rolle spielen. Aufgrund der Komplexität des Problems müssen in den meisten Fällen Computersimulationen durchgeführt werden.

- **Hydrodynamisches Modell**: Man betrachtet den Planetenring als eine „Flüssigkeit“ mit innerer Reibung (Scherviskosität und Volumenviskosität). Die Stoßfrequenz muß in diesem Bild wesentlich höher als die charakteristische Umlauffrequenz sein. Mit Selbstgravitation ist die Scherströmung instabil und neigt zur Ausbildung von chaotischen „Spiralwellenfragmenten“. Hängt die Viskosität in bestimmter Weise von der Dichte ab, treten auf längeren Zeitskalen zusätzliche ringförmige Diffusionsinstabilitäten auf („Negative Diffusion“). Bei Gasscheiben ist dieses Modell sinnvoll, bei Plane-

tenringen bleiben die Prämissen umstritten. Analytische Modelle sind nur in idealisierten, aber wichtigen Fällen möglich.

- **Stoß-freies Oszillator-Modell**: In diesem idealisierten Modellbild besteht ein Planetenring zunächst aus ringförmigen Stromlinien. Jede Stromlinie ist eine Teilchenkette mit identischen Massen (Clustern), welche im gravitativen Gleichgewichtszustand einen identischen Abstand voneinander aufweisen. Wie in der Festkörperphysik werden Schwingungen („Phononen-Wellen“) längs der Kette auf ihre Stabilität bezüglich der Selbstgravitation untersucht. Auch die Wechselwirkung von zwei Teilchenringen und deren notwendige Instabilität sowie eines Teilchenringes mit einem Kleinstmond oder von mehreren Ringen kann analytisch mit Hilfe von Eigenwertmatrizen untersucht werden. Historisch wurde dieses Modell in ersten Ansätzen schon 1859 von J.C. Maxwell untersucht. Im Grenzfall von unendlich vielen Stromlinien geht das Modell rein formal in den hydrodynamischen Grenzfall über.

In diesem Buch soll fast ausschließlich das Oszillatormodell ausführlich entwickelt werden. Mit diesem Modell lassen sich auf sicherer Grundlage genaue analytische Resultate erzielen, mit denen mögliche dynamische Prozesse in Planetenringen besser verstanden werden, die man aus hydrodynamischen Modellen erhält. Die erzielten Ergebnisse sind zudem eine theoretische Erweiterung der Dissertation des Verfassern aus dem Jahre 1984. In den letzten dreißig Jahren sind neue Aspekte hinzugekommen, die besonders die umstrittene Ring - Mondwechselwirkung und die schwierige Ring - Ring Wechselwirkung betreffen. Besonders das Problem der Bildung von **Spiralwellen**, wie sie in den 1990er Jahren an der Universität Bonn durch numerische Simulationen an inelastischen Stoßmodellen studiert wurden, findet jetzt in der Untersuchung von Eigenwerten bestimmter Matrizen eine neue und unerwartete Lösung. Entsprechende analytische und numerische Untersuchungen beispielsweise Auswertungen wären noch in den 1980er Jahren nahezu unmöglich gewesen.

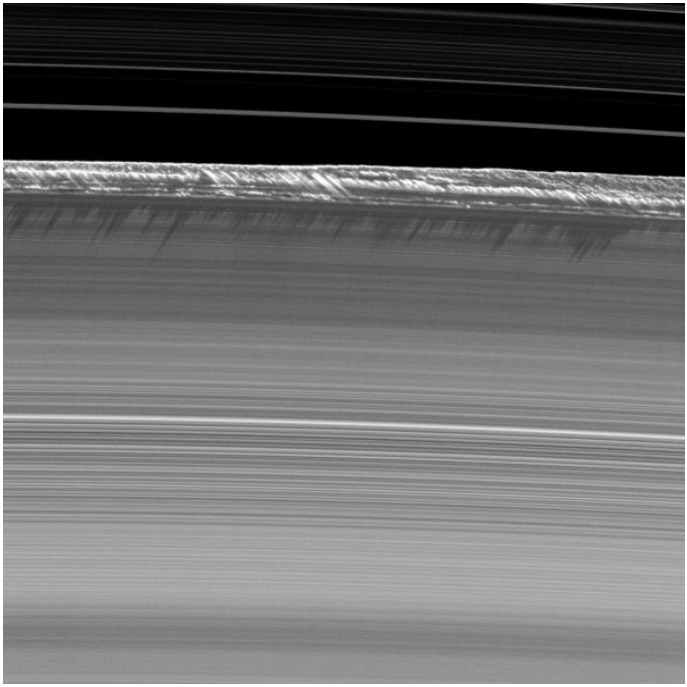

Fig. 1.9: *Die äußere Kante des B-Ringes von Saturn, dynamisch angeregt durch eine 2:1 Resonanz des Mondes Mimas. Deutlich sind starke Verdichtungen und gebirgsartige Überhöhungen zu erkennen. Aufnahme im August 2009 (Bild: NASA PIA11668)*

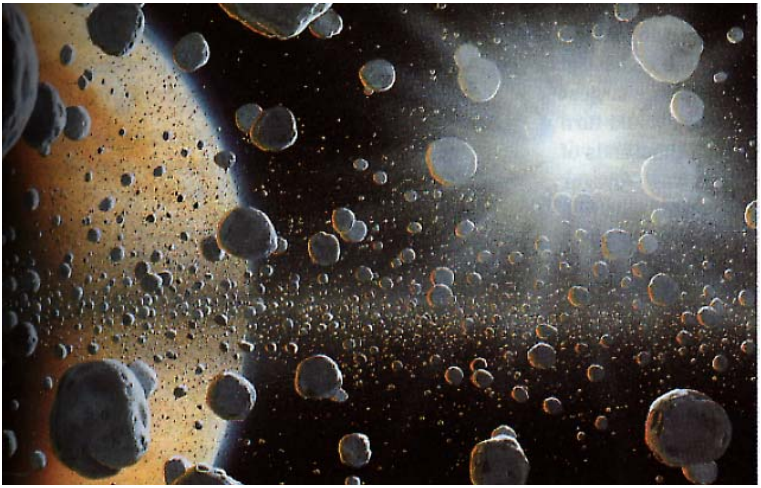

Fig. 1.10: *Eine künstlerische Vorstellung über die mikrophysikalische Struktur von Planetenringen. Eine spezielle Strukturbildung von Teilchen oder Agglomeraten in der Scherströmung des Planetenringes wird hier noch nicht gesehen. Um aussagekräftige Modelle zu konstruieren, müssen unterschiedliche mathematische Idealisierungen vorgenommen werden. (Bildquelle: NASA)*

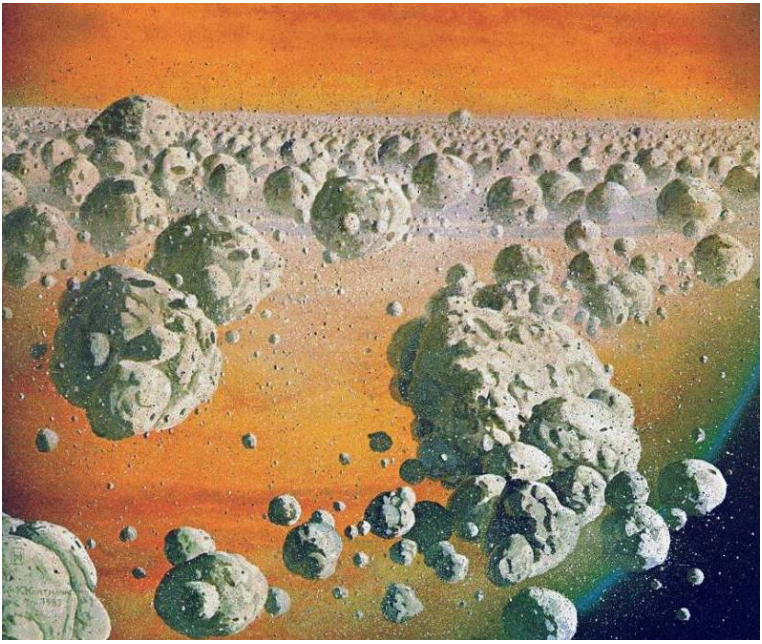

Fig. 1.11: *Eine künstlerische Vorstellung der 1980er Jahre über die mikrophysikalische Struktur von Planetenringen. Hier wird schon die Ausbildung von „dynamic ephemeral bodies“ („Propeller-Strukturen“) propagiert, die man als eine spezielle Form der Mikrospiralstruktur von Planetenringen ansehen kann. Durch die starken Gezeitenkräfte sind immer wieder andere Teilchen an der Strukturbildung schräg zur lokalen Scherströmung im Planetenring beteiligt. Auch geht man hier schon von einem durch inelastische Stöße sich bildenden „Monolayer“ von großen Clustern für die Ringscheibe aus. (Bildquelle: W. Hartmann, University Tuscon)*

2 Der Teilchenring

Im folgenden Kapitel sollen zunächst sehr überraschende gravitative Gleichgewichtfiguren von diskreten rotierenden Teilchenringen dargestellt werden, die man so im 19.Jahrhundert zur Zeit von J.C. Maxwell noch nicht kannte.

2.1 Das reguläre N-Polygon

Das einfachste Modell eines schmalen Planetenringes besteht aus einem regelmäßigen N-Polygon, bei dem sich auf jedem Eckplatz identische Massenpunkte befinden. Mit dieser Vorstellung wird später klar werden, daß es keineswegs trivial ist, nur durch gravitative Wechselwirkungen eine Vielzahl von Körpern, die sich auf nahezu identischen Bahnen um einen Zentralkörper bewegen, zu einem *einzigen* Körper (Planeten oder Mond) zu vereinigen.

Nach der Abbildung (2.1) sei der Abstand der identischen Masseteilchen mit Masse m von dem Zentralkörper mit R bezeichnet. Der Zentralkörper M liege im Koordinatenursprung, der zunächst auch gemeinsamer Schwerpunkt des Systems sein soll. Da sich die Teilchen gegenseitig gravitativ anziehen, ist nur bei einer bestimmten Rotationsfrequenz Ω des Teilchenringes dynamisches Gleichgewicht zwischen der Gravitationskraft und der Zentrifugalkraft gegeben, bei der sich alle Massen in einer Kreisbahn um den Zentralkörper bewegen. Sind genau N Teilchen ringförmig in einem Polygon platziert, so wirkt auf ein Teilchen die rein radiale Gravitationsbeschleunigung

$$a_R = G\frac{M}{R^2} + G\,m\sum_{n=1}^{N-1}\frac{\sin(\pi n/N)}{4R^2\,\sin^2(\pi n/N)}. \tag{2.1}$$

Dabei ist der Abstand r_n der Teilchen im Ring durch

$$r_n = 2\,R\,\sin(\varphi/2). \tag{2.2}$$

gegeben, wenn φ den gegenseitigen Winkelabstand der beiden Radiusvektoren bezeichnet. Durch Gleichsetzen mit der Zentrifugalbeschleunigung

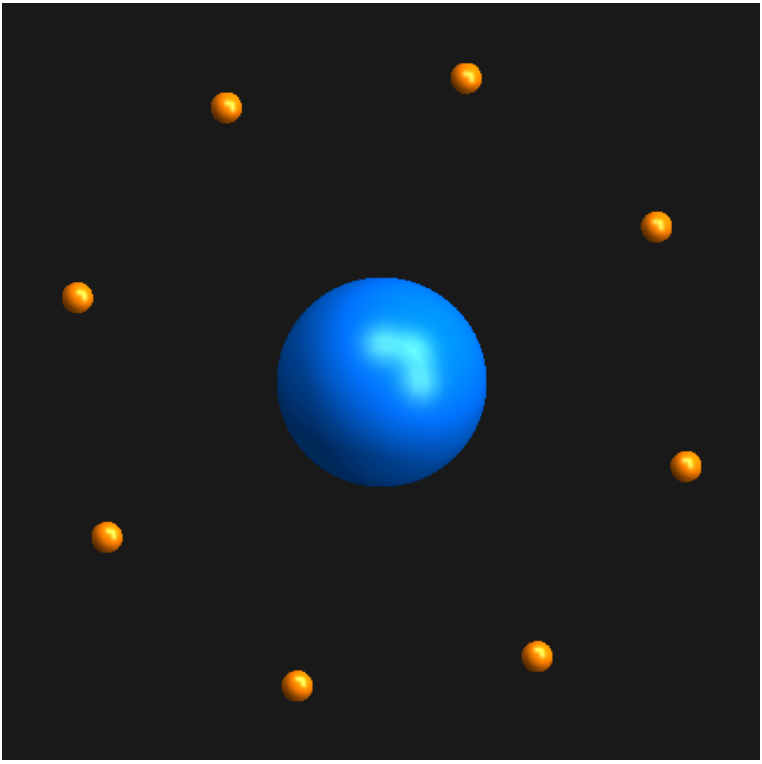

Fig. 2.1: *Beispiel eines Teilchenringes mit acht identischen Punktmassen. Nur bei einer bestimmten Rotationsfrequenz und unterhalb eines kritischen Massenverhältnisses ist ein derartiges selbstgravitierendes Gebilde im Gleichgewicht und dynamisch stabil.*

erhält man für das Quadrat der Rotationsfrequenz die Gleichung

$$\Omega^2 R^3 = G\,M + G\,m \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{4\sin(\pi n/N)}. \tag{2.3}$$

Man kann die Rotationsfrequenz Ω auch mit dem Virialsatz der Mechanik

$$2\,E_{kin} + E_g = 0 \tag{2.4}$$

berechnen, wobei E_{kin} die kinetische Energie des rotierenden Kettenringes und E_g die potentielle Gravitationsenergie des Systems bezeichnet. In unserem Fall gilt nun

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m\,N\,R^2\Omega^2 \tag{2.5}$$

und

$$E_g = -G\frac{Mm}{R}\,N - \frac{1}{2}\,Gm^2 N \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{r_n}. \tag{2.6}$$

Der gegenseitige Abstand r_n ist wieder durch (2.2) gegeben. Mit Hilfe von (2.4), (2.5) und (2.6) erhält man für die Rotationsfrequenz des Teilchenringes im dynamischen Gleichgewicht den Ausdruck

$$\Omega^2 = G\left(\frac{M + Nm_e}{R^3}\right) \tag{2.7}$$

mit m_e als gravitative Effektivmasse der Kettenteilchen. Es ergibt sich dafür der Wert

$$m_e = m\frac{1}{4\,N}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sin(\pi n/N)}. \tag{2.8}$$

Nach (2.7) ist also die Rotationsfrequenz des Teilchenringes und damit auch seine Dynamik nicht allein durch die Gesamtmasse des Systems und seiner Geometrie (hier Radius R) gegeben, sondern auch von der Anzahl N der Teilchen abhängig. Für große N läßt sich die obige Summe asymptotisch berechnen. Man kann sich dann auf den Fall beschränken, daß N eine gerade Zahl ist. Dann können wir schreiben

$$m_e = m\,\frac{1}{4\,N}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sin(\pi n/N)}. \tag{2.9}$$

Mit Hilfe der Euler - Mascheroni Formel ergibt sich asymptotisch

$$\frac{1}{4N}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sin(\pi n/N)} \simeq \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{2}{\pi}\,e^{\gamma}\,N\right) - \frac{\pi}{144\,N^2} + \ldots \tag{2.10}$$

und daher für die Effektivmasse genügend genau

$$m_e \approx m \, \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{2}{\pi} \, e^{\gamma} \, N\right) \qquad \mathrm{N} \to \infty. \tag{2.11}$$

Die Eigengravitation des Ringes ist somit logarithmisch divergent und ein Grenzübergang in ein fadenartiges Kontinuum mit $N \to \infty$ ist nicht möglich. Erst ab $N = 473$ gilt $m_e > m$. Bei $N = 10^6$ ist $m_e/m \approx 2.22$.

Man hat hier ein schönes Beispiel für die Tatsache, daß ein Grenzübergang in ein *eindimensionales hydrodynamisches Kontinuum* physikalisch unmöglich ist. Dabei müßte zudem die Dichte der einzelnen Masseteilchen gegen unendlich gehen. Später werden wir sehen, dass auch aus Stabilitätsgründen für einen diskreten Teilchenring ein solcher Grenzübergang unphysikalisch wäre.

2.2 Irreguläre Ringstrukturen

J.C. Maxwell hat in seinem Essay von 1859 bei der Untersuchung eines einzelnen „Teilchenringes“ aus punktförmigen Körpern vorrausgesetzt, daß ihre Masse identisch und ihre Anzahl sehr groß ist. Unter dieser Prämisse ist sicherlich ein reguläres N-Eck (N-Polygon) die einzig mögliche Gleichgewichtsfigur. Befinden sich aber nur wenige identische Teilchen im Ring, könnten auch völlig *asymmetrische Verteilungen der Massen längs der Ringperipherie* bei einer bestimmten Rotationsfrequenz die Bedingungen einer Gleichgewichtskonfiguration erfüllen. Bei zwei Teilchen in derselben Bahn sind ja die Lagrange - Positionen **L4** und **L5** dafür schöne Beispiele. Von daher sollen in diesem Kapitel allgemeine Bedingungen für das Gleichgewicht eines rotierenden Ringes um einen Zentralkörper abgeleitet werden.

Wir werden jetzt zeigen, daß speziell regelmäßige N-Ecke mit gleichartigen Teilchenmassen nicht die einzigen möglichen Gleichgewichtsfiguren mit einer dominierenden Zentralmasse $M \gg mN$ darstellen. In den Fällen $N = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ und 8 gibt es neben dem regulären Vieleck als Gleichgewichtsfigur auch noch Konfigurationen, in denen die Teilchen mehr auf der einen Hälfte des Ringes bei bestimmten Winkeln platziert sind. Der entscheidende Unterschied zu den regulären Fällen ist aber dann, daß der gemeinsame Schwerpunkt des Systems nicht mehr exakt mit dem Mittelpunkt der dominierenden Zentralmasse M übereinstimmt.

Wir nehmen wieder an, daß eine dominierende Zentralmasse M sich im

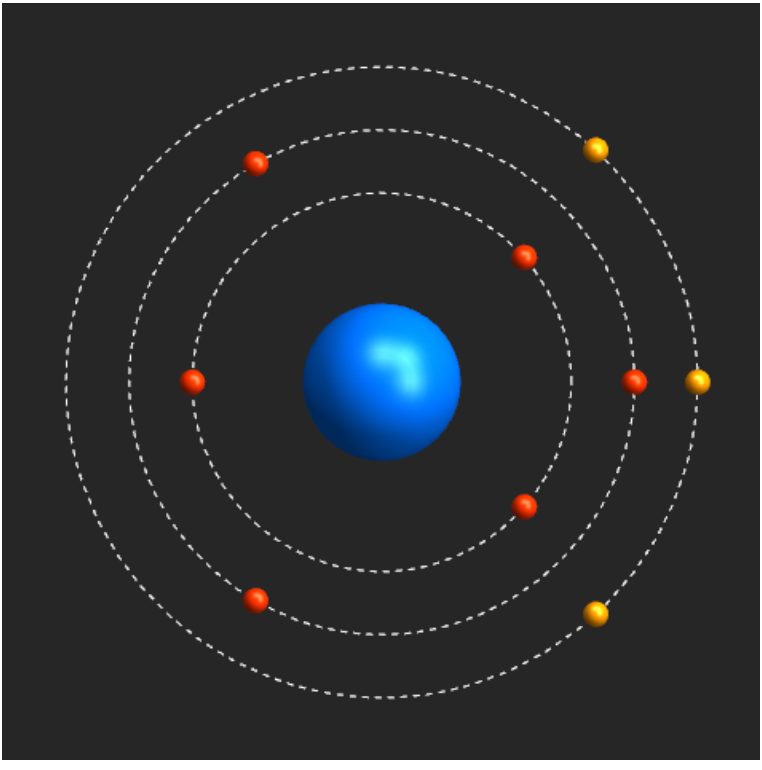

Fig. 2.2: *Die drei möglichen Konfigurationen für drei identische Punktmassen auf demselben Orbit. Nur der einseitige Ringbogen (gelb) kann auch dynamisch stabil sein.*

Koordinatenursprung befindet. Die Positionen der kleinen Ringteilchen werden durch die Vektoren $\mathbf{r}(n)$ beschrieben. Der Schwerpunkt $\mathbf{s}$ des Systems liegt dann bei

$$\mathbf{s} = \frac{m}{M + mN} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{r}(n). \tag{2.12}$$

Eine erste Kraftbilanz kann nun für den Zentralkörper aufgestellt werden.

Denn es muß im Gleichgewicht gelten

$$\Omega^2\,\mathbf{s} = G\,m\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathbf{r}(n)}{|\mathbf{r}(n)|^3}. \tag{2.13}$$

Einsetzen von $\mathbf{s}$ führt schließlich zu

$$\Omega^2\sum_{n=1}^{N}\mathbf{r}(n) = G\,(M+mN)\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathbf{r}(n)}{|\mathbf{r}(n)|^3}. \tag{2.14}$$

Für jedes Ringteilchen mit der Marke $j = 1, 2, \ldots, N$ gilt dann entsprechend die Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned}\Omega^2\,[\mathbf{r}(j)-\mathbf{s}] \quad &= \quad G\,M\,\frac{\mathbf{r}(j)}{|\mathbf{r}(j)|^3} + \\ &\qquad G\,m\sum_{n\neq j}^{N}\frac{\mathbf{r}(j)-\mathbf{r}(n)}{|\mathbf{r}(j)-\mathbf{r}(n)|^3}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

oder mit (2.13)

$$\begin{aligned}&\left(\Omega^2-\frac{GM}{|\mathbf{r}(j)|^3}\right)\mathbf{r}(j) = G\,m\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathbf{r}(n)}{|\mathbf{r}(n)|^3} + \\ &G\,m\sum_{n\neq j}^{N}\frac{\mathbf{r}(j)-\mathbf{r}(n)}{|\mathbf{r}(j)-\mathbf{r}(n)|^3}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Diese Gleichung multiplizieren wir zunächst vektoriell mit $\mathbf{r}(j)$ und erhalten die N Beziehungen ($j = 1, \ldots, N$)

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathbf{r}(n)\times\mathbf{r}(j)}{|\mathbf{r}(n)|^3} = \sum_{n\neq j}^{N}\frac{\mathbf{r}(n)\times\mathbf{r}(j)}{|\mathbf{r}(j)-\mathbf{r}(n)|^3}. \tag{2.17}$$

Skalare Multiplikation von (2.16) mit $\mathbf{r}(j)$ führt dagegen auf

$$\begin{aligned}&\Omega^2\mathbf{r}(j)^2 = \frac{GM}{|\mathbf{r}(j)|} + G\,m\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathbf{r}(n)\circ\mathbf{r}(j)}{|\mathbf{r}(n)|^3} + \\ &G\,m\sum_{n\neq j}^{N}\frac{|\mathbf{r}(j)|^2-\mathbf{r}(n)\circ\mathbf{r}(j)}{|\mathbf{r}(j)-\mathbf{r}(n)|^3}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

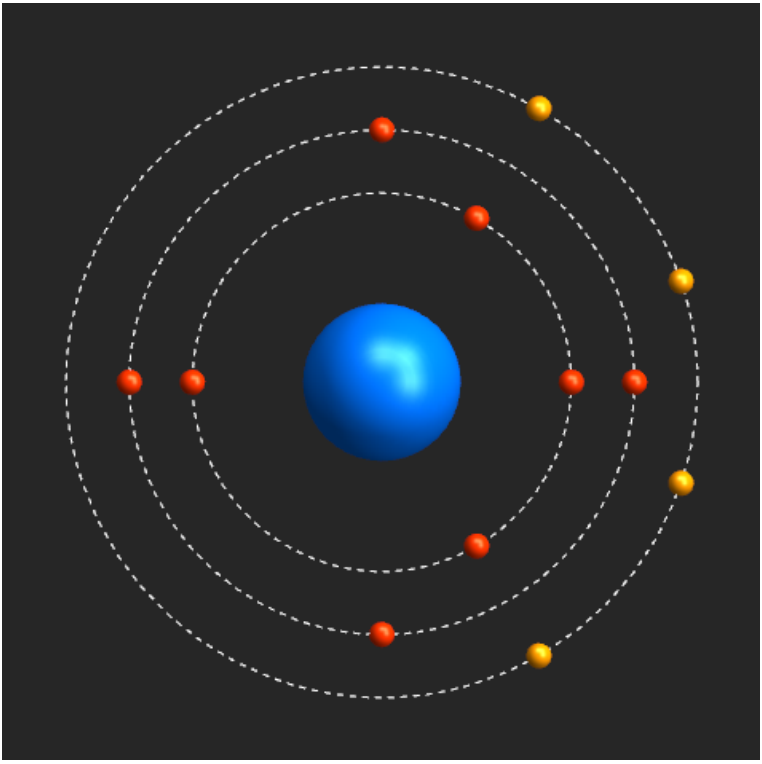

Fig. 2.3: *Die drei möglichen Konfigurationen für vier identische Punktmassen auf demselben Orbit. Die stabile Konfiguration ist gelb markiert.*

Die Relationen (2.17) und (2.20) sind 2N Bedingungsgleichungen für die $2N$ unbekannten Vektorkomponenten von $\mathbf{r}(j)$ und die zusätzliche Unbekannte Ω. Diese Größe läßt sich aber dadurch bestimmen, daß wir uns auf ein bestimmtes Teilchen mit der Marke $j = \alpha$ setzen und auch den Vektor $\mathbf{r}(\alpha)$ vorgeben. Im Abschnitt über die Energiezustände gehen wir darauf noch näher ein. Hier nehmen wir zunächst an, daß alle Teilchen bei sehr kleinem Massenverhältnis $\mu = m/M \ll 1$ in nullter Ordnung auf einem Kreis liegen.

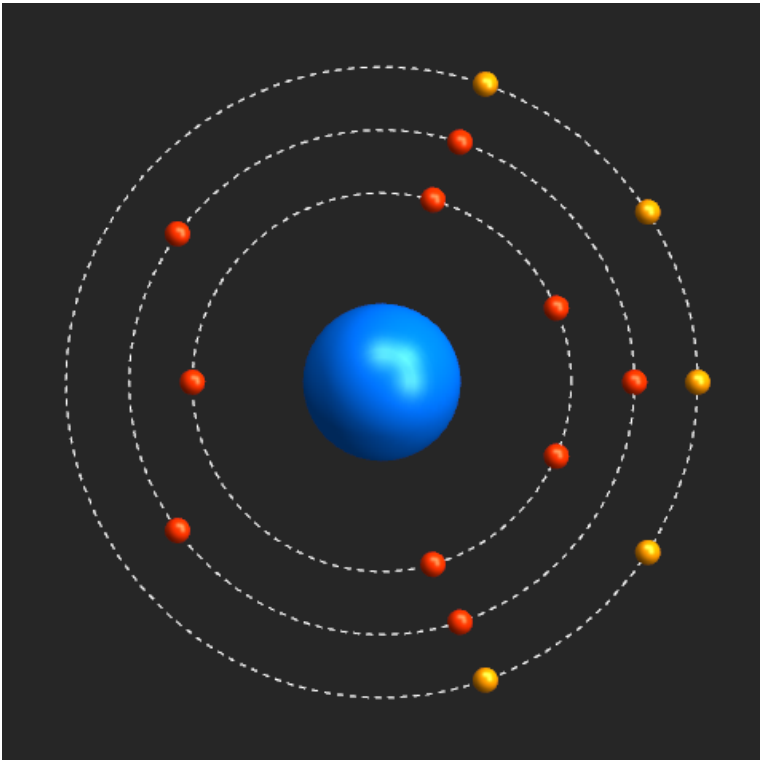

Fig. 2.4: *Die drei möglichen Konfigurationen für fünf identische Punktmassen auf demselben Orbit. Die stabile Konfiguration ist gelb markiert.*

Wir machen also den Ansatz

$$\mathbf{r}(j) = (R(\alpha) + \mu\, \delta R(j))\, \mathbf{e}(j) + \ldots, \tag{2.19}$$

wo $\mathbf{e}(j)$ Einheitsvektoren darstellen und definitionsgemäß $\delta R(\alpha) = 0$ ist. Einsetzen von (2.19) in (2.17) führt in nullter Ordnung in μ auf die bemerkenswerten Beziehungen

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} [\mathbf{e}(n) \times \mathbf{e}(j)] = \sum_{n \neq j}^{N} \frac{\mathbf{e}(n) \times \mathbf{e}(j)}{|\mathbf{e}(n) - \mathbf{e}(j)|^3}.} \tag{2.20}$$

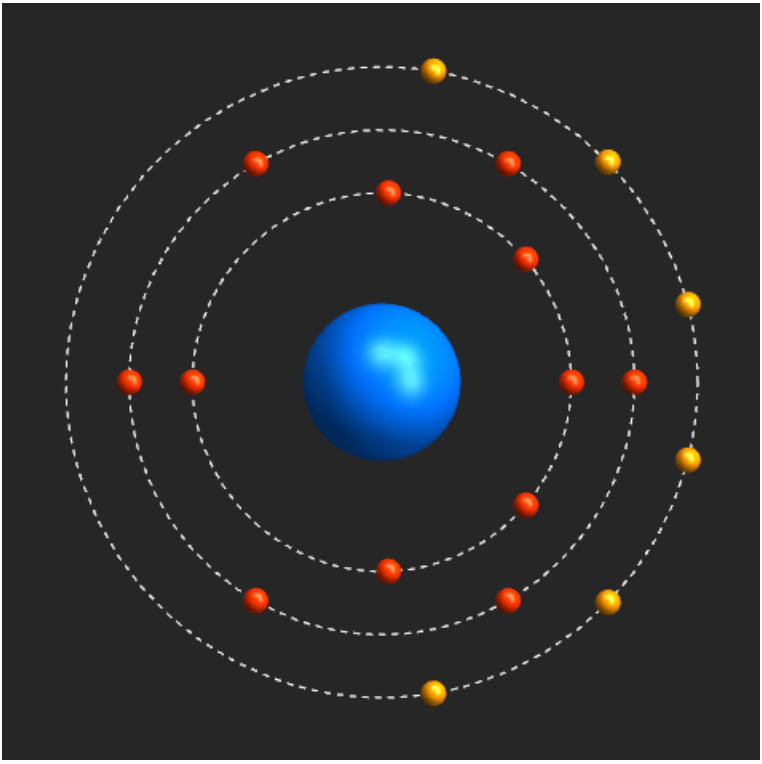

Fig. 2.5: *Die drei möglichen Konfigurationen für sechs identische Punktmassen auf demselben Orbit. Die stabile Konfiguration ist gelb markiert.*

Dies sind genau N Gleichungen für die N unbekannten Winkel $\varphi(j)$ der Einheitsvektoren $\mathbf{e}(j) = (\cos(\varphi(n)), \sin(\varphi(n)))$. Durch Einführung dieser Winkel kann die obige Gleichung in die Form

$$8 \sum_{n=1}^{N} \sin[\varphi(n) - \varphi(j)] = \sum_{n \neq j}^{N} \frac{\sin[\varphi(n) - \varphi(j)]}{\left|\sin\left[\frac{\varphi(n)-\varphi(j)}{2}\right]\right|^3}. \tag{2.21}$$

gebracht werden. Aus den obigen N gekoppelten Gleichungen ist sofort zu entnehmen, daß man einen Winkel $\varphi(j)$ willkürlich festlegen muß. Denn wenn ein Satz von Lösungen $\varphi(j) : (j = 1, 2, \ldots N)$ bekannt ist, so ist

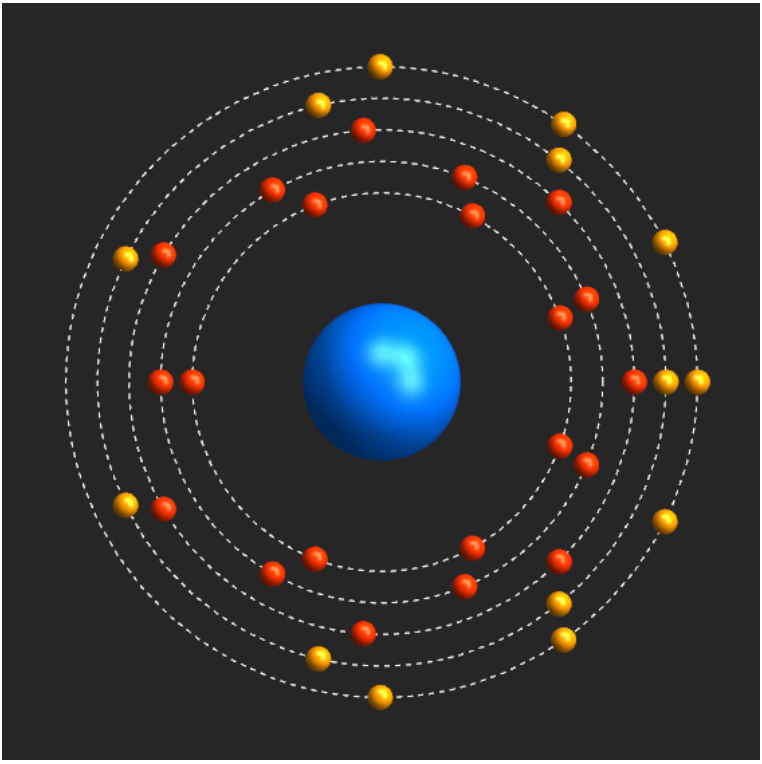

Fig. 2.6: *Die fünf möglichen Konfigurationen für sieben identische Punktmassen auf demselben Orbit. Die stabilen Konfigurationen sind gelb markiert. Zum erstenmal ist die Polygonkonfiguration möglich.*

auch

$$\varphi(j) \to \varphi(j) + \alpha \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{2.22}$$

eine Lösung, wo α einen beliebigen Winkel darstellt. Wir müssen somit zum Beispiel $\varphi(1) = 0$ vorgeben und verbleiben mit $N-1$ Unbekannten. Je nachdem ob N gerade oder ungerade ist, können weitere Vereinfachungen durch Symmetriebetrachtungen durchgeführt werden. Sehr einfach ist der Fall $N = 2$. Hier ergibt (2.21) für den Winkel $\varphi(2) = \varphi$ außer $\sin(\varphi) = 0$

die Gleichung

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2} \tag{2.23}$$

mit der Lösungen $\varphi = 180°$ und $\varphi = 60°$. Relativ einfach ist auch noch der Fall $N = 3$ zu überblicken. Hält man hier die Position einer Masse im Ring fest, während die beiden anderen symmetrisch um diese einen Winkelabstand φ einnehmen, so folgt aus (2.21) die Gleichung

$$8\left[\sin(\varphi) + \sin(2\varphi)\right] = \frac{\sin(\varphi)}{\left|\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right|^3} + \frac{\sin(2\varphi)}{\left|\sin(\varphi)\right|^3}. \tag{2.24}$$

Diese schon recht komplizierte Gleichung besitzt nicht nur die Lösung $\varphi = 120°$, welche dem gleichseitigen Dreieck entspricht, sondern auch noch zwei weitere Lösungen mit $\varphi \approx 47°$ und $\varphi \approx 139°$ (siehe Abbildung 2.2 für $N = 3$). Bemerkenswert ist weiterhin, daß ab $N = 9$ die Massenpunkte im Ring *nur noch N-Ecke* mit dem Schwerpunkt im Zentrum von M bilden, wenn man identische Massen voraussetzt ([32],[25]). Wir haben in den Abbildungen (2.2) bis (2.7) die entsprechenden Gleichgewichtsfiguren berechnet und dargestellt. Man könnte sie als *"gravitative Ringmoleküle"* bezeichnen. Dabei stellen die Fälle $N = 7$ und $N = 8$ wirklich eine Strukturisomerie dar, weil in beiden Fällen sowohl die Hufeisenform als auch die Polygonform stabile gravitative Bindungen darstellen können ([25]). Zudem zeigt das gravitative System die analogen Eigenschaften wie die eines atomaren Festkörpers aus nur wenigen Atomen: Überschreitet die Anzahl der beteiligten Körper im Ring eine kritische Zahl, werden nur noch *regelmäßige "Kristallstrukturen"* gebildet. Die mögliche Existenz von 2 Körpern auf einer identischen Bahn um einen Zentralkörper hatte schon der Mathematiker J.L. Lagrange 1772 als einen Spezialfall des allgemeinen Dreikörperproblems in der Himmelsmechanik näher untersucht. Die obigen neuen Ergebnisse werfen aber nun die Frage auf, warum eigentlich jedes *"Orbital"* im Sonnensystem immer nur mit einem Planeten besetzt ist und nicht mit zweien oder dreien? Im Saturnsystem gibt es ja tatsächlich den Fall, wo zwei fast gleich große Kleinstmonde sich auf identischer Bahn um den Saturn bewegen (Janus und Epimetheus). Offensichtlich hat der Entstehungsprozeß in der protoplanetaren Scheibe es nicht zugelassen, daß sich am Ende mehrere planetare Körper auf fast identischen Bahnen um die Sonne bewegen. *Ein* Grund hierfür könnte sein, dass einige der obigen Konfigurationen zwar *dynamisch* stabil, dafür

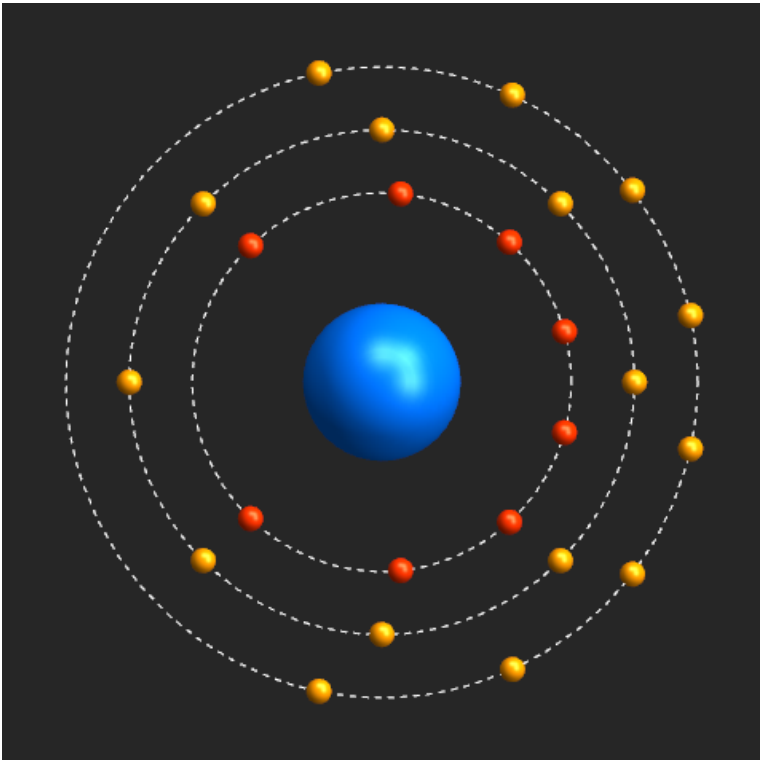

Fig. 2.7: *Die drei möglichen Konfigurationen für acht identische Punktmassen auf demselben Orbit. Die dynamisch stabilen Konfigurationen sind gelb markiert. Ab $N = 9$ gibt es nur noch die Polygonkonfiguration.*

aber immer *säkular* instabil sind (bei Reibung mit dem umgebenden Scheibengas).

2.3 Die Bindungsenergie eines Teilchenringes

Es ist nun interessant, die Gesamtenergie der N-Teilchenringe bei gleichem Drehimpuls zu berechnen und zu vergleichen. Sehr einfach gelingt dies für die Polygonfiguren. Bezeichnen wir die Gesamtmasse des N-Teilchenringes

mit m_r, so gilt

$$m_r = N\,m. \tag{2.25}$$

Der Drehimpuls des Systems ist dann gegeben durch

$$L = m_r\,R^2\,\Omega \tag{2.26}$$

und es gilt schließlich

$$L^2 = G m_r^2 (M + m_r S_P(N))\,R. \tag{2.27}$$

Die Funktion $S_P(N)$ ist gegeben durch (siehe (2.8)

$$S_P(N) = \frac{1}{4N} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sin(\pi n/N)}. \tag{2.28}$$

Die gravitative Gesamtenergie des Ringes lautet nun

$$E = -\frac{1}{2}\,G\,m_r \left(\frac{M + m_r S_P(N)}{R} \right). \tag{2.29}$$

Der positive Betrag dieser Energie ist die *Bindungsenergie* der speziellen Konfiguration. Elimination des Ringradius ergibt bis zur ersten Ordnung in (m_r/M)

$$E = -\frac{1}{2}\,\frac{G^2\,M^2\,m_r^3}{L^2} \left[1 + 2\left(\frac{m_r}{M}\right)\,S_P(N) + \ldots \right] \tag{2.30}$$

Wie man anhand dieser Beziehung leicht erkennt, ist bei gleichem Drehimpuls die Bindungsenergie umso höher, je höher die Besetzungszahl N im Ring ist. Ein Ring kann seine Besetzungszahl N nicht durch Energieabgabe bei *gleichzeitigem* Drehimpulserhalt *erniedrigen*. Dieser Vorgang ist nur möglich, wenn er gleichzeitig Drehimpuls abgibt, also kontrahiert und die Teilchen nach innen wandern. Der allgemeine Fall ist komplizierter. Der Drehimpuls ist zunächst gegeben durch

$$L = M\,\Omega\,\mathbf{s}^2 + m\,\Omega \sum_{j=1}^{N} [\mathbf{r}(j) - \mathbf{s}]^2. \tag{2.31}$$

Andererseits folgt für die Gesamtenergie des Systems

$$E = -\frac{1}{2} M\,\Omega^2\,\mathbf{s}^2 - \frac{1}{2} m\,\Omega^2 \sum_{j=1}^{N} [\mathbf{r}(j) - \mathbf{s}]^2. \tag{2.32}$$

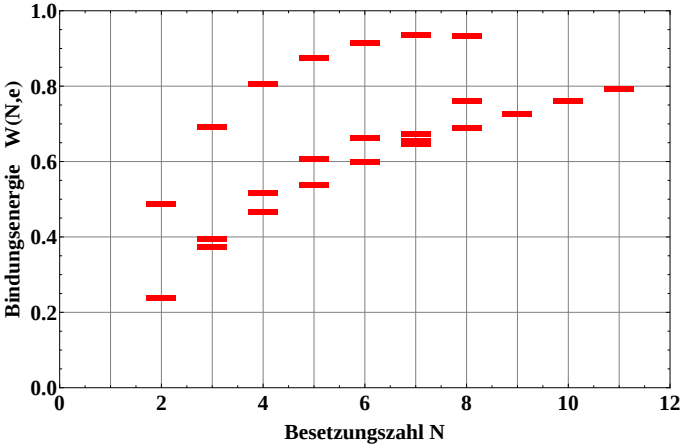

Fig. 2.8: *Die Energieniveaus $W(N, \mathbf{e})$ als Funktion der Besetzungszahl N im Ring. Im Falle $N = 7$ erreicht die „Hufeisenförmige“ Ringstruktur maximale Bindungsenergie. Für $N > 8$ gibt es nur noch die reguläre Polygonstruktur.*

Für das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit bis zur ersten Ordnung in μ gilt nun, wenn wir uns auf ein bestimmtes Teilchen setzen,

$$\begin{aligned} \Omega^2 \quad \approx \quad & \frac{GM}{R(\alpha)^3}\Big(1 + \mu \sum_{n=1}^{N} [\mathbf{e}(n) \circ \mathbf{e}(\alpha)] + \\ & \frac{1}{2}\,\mu \sum_{n \neq \alpha}^{N} \frac{1}{|\mathbf{e}(n) - \mathbf{e}(\alpha)|}\Big). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Dabei haben wir die Vektor - Identität

$$1 - \mathbf{e}(n) \circ \mathbf{e}(\alpha) = \frac{1}{2}\,|\mathbf{e}(n) - \mathbf{e}(\alpha)|^2 \tag{2.34}$$

benutzt. Durch suksessives Einsetzen der Größen $r(j)$ und Ω erhalten wir nun bis zur ersten Ordnung in m_r/M für die Gesamtenergie des Systems

$$\begin{aligned} & E(N, \mathbf{e}) = \\ & -\frac{1}{2}\frac{G^2\,M^2\,m_r^3}{L^2}\left[1 + \left(\frac{m_r}{M}\right)\,W(N, \mathbf{e}) + \ldots\right], \end{aligned} \tag{2.35}$$

Tab. 2.1: *$W(N, \mathbf{e})$ für N = 2 - 9. Bei gleichem Drehimpuls und Masse hat der Ring mit N = 7 in der Hufeisenform die höchste Bindungsenergie.*

N	2	3	4	5
$W(N, \mathbf{e_P})$	0.250000	0.384900	0.478553	0.550553
$W(N, \mathbf{e_2})$	0.500000	0.405998	0.529006	0.616969
$W(N, \mathbf{e_3})$	–	0.704335	0.816860	0.885313
N	6	7	8	9
$W(N, \mathbf{e_P})$	0.609117	0.658504	0.701216	0.738851
$W(N, \mathbf{e_2})$	0.674724	0.664278	0.772553	–
$W(N, \mathbf{e_3})$	0.926791	0.666255	0.944766	–
$W(N, \mathbf{e_4})$	–	0.684732	–	–
$W(N, \mathbf{e_5})$	–	0.947514	–	–

wobei die Funktion $W(N, \mathbf{e})$ durch

$$\boxed{W(N, \mathbf{e}) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{n=1}^{N}{}' \frac{1}{|\mathbf{e}(n) - \mathbf{e}(j)|}} \tag{2.36}$$

gegeben ist. Diese Funktion ist proportional der gravitativen Wechselwirkungsenergie der Ringteilchen untereinander. Ihr Wert ist abhängig von der Anzahl der Teilchen im Ring sowie von der betrachteten Konfiguration. In den folgenden zwei Tabellen sind die numerischen Werte der Funktion $W(N, \mathbf{e})$ für die unterschiedlichen Konfigurationen und für $N = 2$ bis $N = 9$ berechnet. Die Polygonlösungen haben immer den niedrigsten Wert, während die Hufeisenkonfigurationen jeweils den höchsten Wert einnehmen. Zudem tritt das Kuriosum auf, daß von allen *Hufeisenlösungen* bei gleicher Gesamtmasse der Ringteilchen und gleichem Drehimpuls diejenige mit N=7 energetisch den günstigsten Wert einnimmt.

Es wird nun auch klar, daß es im Allgemeinen ohne Drehimpulsverlust nicht möglich ist, die Besetzungszahl im Ring bei Massenerhaltung um eins zu erniedrigen. Insbesondere der Fall $N = 1$ hat die niedrigste Bindungsenergie.

2.4 Irreguläre Massenverteilungen

Es ist leicht, die statischen Gleichgewichtsbedingungen eines rotierenden N-Teilchenringes mit identischen Massen auf den allgemeinen Fall von irregulären ungleichen Massen zu verallgemeinern. Voraussetzung ist nur die extreme Kleinheit der Gesamtmasse des Ringes gegenüber der Zentralmasse. Bezeichnet man die einzelnen Massen im Ring mit m_n, so folgt mit (2.21) jetzt allgemeiner für $j = \{1, \ldots, N\}$

$$8 \sum_{n=1}^{N} m_n \sin[\varphi(n) - \varphi(j)] = \sum_{n \neq j}^{N} m_n \frac{\sin[\varphi(n) - \varphi(j)]}{\left|\sin\left[\frac{\varphi(n)-\varphi(j)}{2}\right]\right|^3}. \tag{2.37}$$

Wir haben somit N gekoppelte nichtlineare Gleichungen zur Bestimmung der N Winkelpositionen der Teilchen im Ring. Das System kann nur iterativ numerisch gelöst werden, wobei man als Startwert bequem die reguläre Polygonlösung nehmen kann. Im Prinzip kann jede gefundene Lösung wieder um einen beliebigen Winkel gedreht werden. In den Figuren (2.9) und (2.10) sind zwei Beispiele für derartige irreguläre Massenstrukturen bildlich dargestellt. Generell kann man sagen, daß je größer eine isolierte Masse aus ihrer Umgebung herausragt, desto mehr drängt sie die kleineren Teilchen von sich weg. Sind dagegen alle Ringteilchen in einem engeren Massenspektrum eingegrenzt, so ist die Massendichte pro Länge in etwa konstant. Kleinere Teilchen stehen etwas enger, größere entsprechend etwas weiter auseinander.

Das Problem der dynamischen Stabilität wurde schon in der Literatur für einige Spezialfälle ausführlich untersucht. Wir interessieren uns nun für diskrete idealisierte Teilchenringe mit identischen Massenpunkten und sehr hohen Besetzungszahlen N. Die Teilchen haben dann gleichen Abstand und es ergibt sich zwangslos die Frage, welche *Schwingungen* oder *Wellen* sich in einer solchen Teilchenkette („Oszillatorkette“) bei kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage entwickeln können. Dies soll der Hauptgegenstand dieses Kapitels sein.

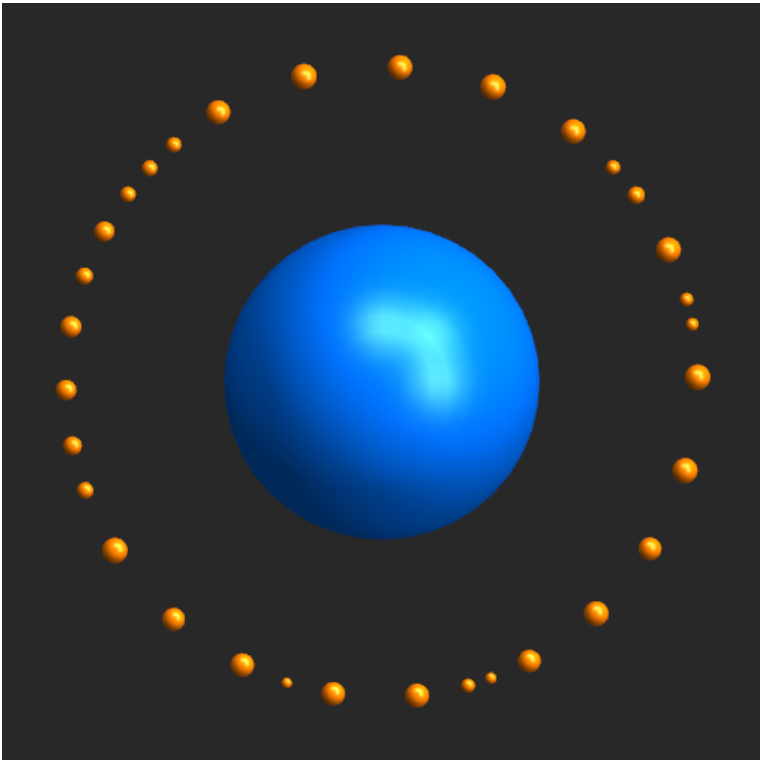

Fig. 2.9: *Ein Ring aus 32 ungleichen Punktmassen mit einer Variationsbreite von 1:10 im rotierenden Gleichgewichtszustand. Deutlich ist zu sehen, daß die Abstände der ungleichen Teilchen nahezu proportional ihrer Massen sind. Die Massendichte pro Länge bleibt somit nahezu konstant.*

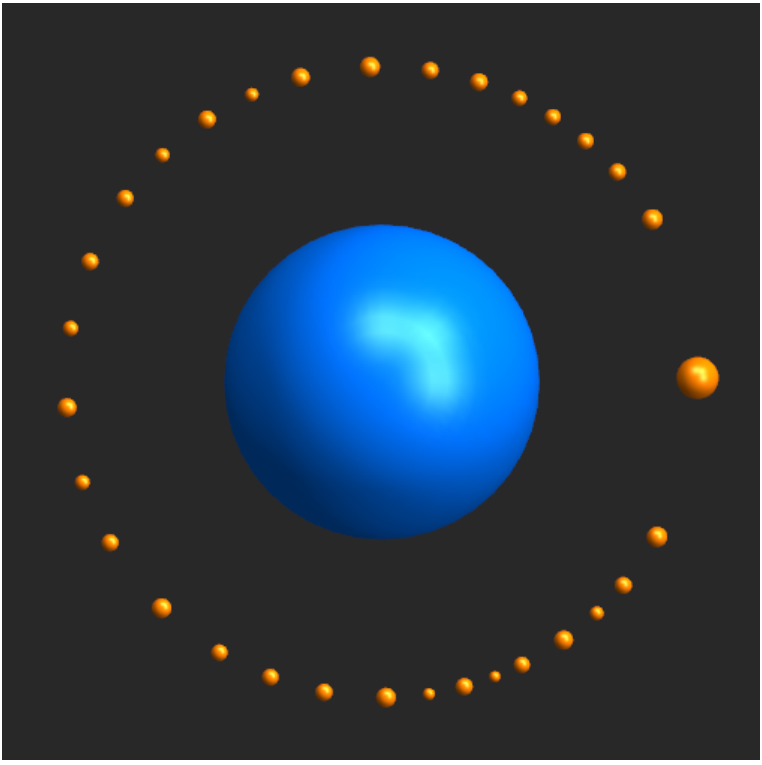

Fig. 2.10: *Die Struktur eines Teilchenringes aus ungleichen Massen, wenn eine Masse wesentlich größer als alle anderen ist. Es bildet sich eine „hufeisenförmige“ Verteilung, wobei die große Masse die kleineren von sich wegdrängt.*

3 Wellenmechanik eines Teilchenringes

Wir haben im vorhergehenden Kapitel für sehr niedrige Besetzungszahlen im Bereich $2 < N < 10$ statische Gleichgewichtskonfigurationen für rotierende Ringe mit *identischen Massen* betrachtet. Nun wollen wir annehmen, dass die Teilchenzahl im idealisierten Massenring sehr groß ist und ihre Abstände identisch gleich d sind.

3.1 Bewegungsgleichungen einer Teilchenkette

Wir beginnen unsere Untersuchung mit der Bewegungsgleichung eines Massenpunktes, dessen Bahn nur sehr wenig von einer Kreisbahn abweicht. Der Planet soll kugelförmig sein und eine Masse M besitzen. Dann beträgt die Winkelgeschwindigkeit in der Kreisbahn

$$\Omega^2 = \frac{G\,M}{R^3}.$$

Nach Fig. (3.1) führen wir jetzt kleine Verschiebungen ξ, η, ζ in radialer, tangentialer und vertikaler Richtung ein. Die allgemeine Bewegungsgleichung eines extrem kleinen Massenpunktes m_0 mit $m_0 \ll M$ um den Zentralkörper M lautet mit

$$\mathbf{r}[t] = \{x[t], y[t], z[t]\} \tag{3.1}$$

nach Newton

$$\ddot{\mathbf{r}} + G\,M\,\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = 0. \tag{3.2}$$

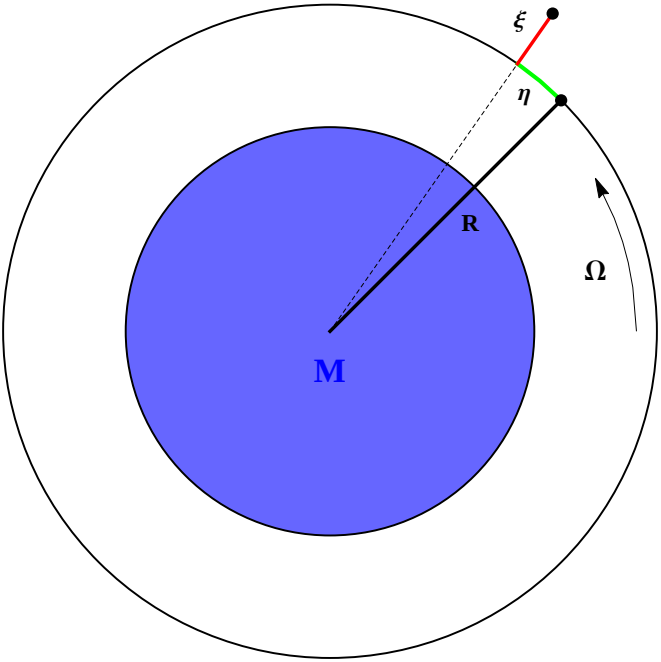

Fig. 3.1: *Die Abweichung von einer Kreisbahn wird durch die sehr kleinen Verschiebungen ξ und η in radialer wie tangentialer Richtung von der ungestörten Position beschrieben. $\xi > 0$ bedeutet eine Verschiebung nach außen, $\eta > 0$ eine Verschiebung in Rotationsrichtung längs der Kreisbahn. Der Rotationssinn wird hier gehen den Uhrzeigersinn angenommen.*

Als Abweichung von einer exakten Kreisbahn betrachten wir nun die Funktionen

$$\begin{aligned} x[t] &= (R + \xi[t]) \cos\left[\Omega\, t + \frac{\eta[t]}{R}\right], \\ y[t] &= (R + \xi[t]) \sin\left[\Omega\, t + \frac{\eta[t]}{R}\right], \\ z[t] &= \zeta[t]. \end{aligned}$$

Werden diese Funktionen in die Bewegungsgleichung eingesetzt und bis einschließlich erster Ordnung in ξ, η, ζ entwickelt, so erhalten wir in der

sogenannten *Hillschen Approximation* die drei linearisierten Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\xi} - 2\,\Omega\,\dot{\eta} - 3\,\Omega^2\,\xi = 0; \quad \ddot{\eta} + 2\,\Omega\,\dot{\xi} = 0; \quad \ddot{\zeta} + \Omega^2\,\zeta = 0 \tag{3.3}$$

für kleine Abweichungen von einer ungestörten Kreisbahn im rotierenden Koordinatensystem. Deutlich ist hier der *Coriolis-Term* und ein *Gezeitenterm* $3\,\Omega^2\,\xi$ im rotierenden System zu erkennen.

Ohne gravitative Wechselwirkung der Teilchen untereinander gilt für jedes Teilchen in einem Ring diese Bewegungsgleichung. Doch nun müssen wir noch diese gravitative Wechselwirkung mit einbeziehen. Um die Untersuchungen nicht unnötig zu verkomplizieren, soll der Kettenring mit $N >> 9$ durch eine lineare, beiderseits ins Unendliche gehende gerade Teilchenkette ersetzt werden. Dieses Vorgehen ist sicherlich erlaubt, solange die Teilchenzahl im Ring sehr groß ($N > 1000$) ist und die gravitative Kopplung zwischen den Teilchen im Ring mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt. Wir betrachten also eine unendlich ausgedehnte gerade Teilchenkette, welche aus identischen Massen m_0 mit identischen Abständen d besteht. Es soll ein lokaler Ausschnitt aus einem rotierenden Teilchenring darstellen, dessen Krümmung man vernachlässigt und an beiden Enden in das Unendliche erstreckt. Die positive ξ Achse zeige nach außen, die positive η Achse tangential in Richtung der Rotationsbewegung und die positive ζ Achse in Richtung des Drehimpulsvektors (*Hill'sche Approximation*). Zwei benachbarte Teilchen der Masse m_0 ziehen sich dann mit der Gravitationskraft

$$F[d] = \frac{G\,m_0^2}{d^2} \tag{3.4}$$

an. Im allgemeinen Fall beliebiger Auslenkungen lauten dann die Kraftbilanzen in allen drei Koordinatenrichtungen für ein Teilchen der Marke n mit nur seinen beiden nächsten Nachbarn

$$F_\xi = \frac{F[d]}{d}\,(\xi_{n+1} - 2\,\xi_n + \xi_{n-1}) \tag{3.5}$$

$$F_\eta = F'[d]\,(\eta_{n+1} - 2\,\eta_n + \eta_{n-1}) \tag{3.6}$$

$$F_\zeta = \frac{F[d]}{d}\,(\zeta_{n+1} - 2\,\zeta_n + \zeta_{n-1}) \tag{3.7}$$

Dabei ist $F'[d] = -2\,G\,m_0^2/d^3$. Da die gravitative Wechselwirkung im

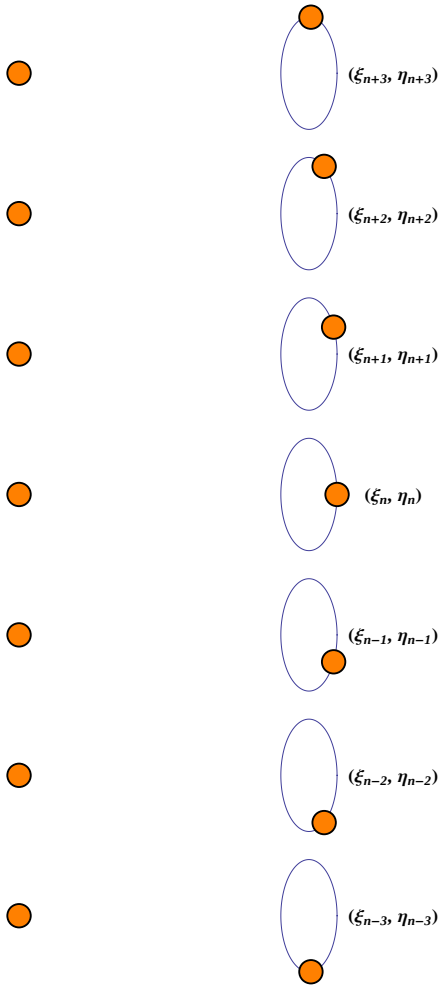

Fig. 3.2: *In der Ruhelage haben alle Ringteilchen in unserem idealisierten Modell den gleichen Abstand d. Kleine Auslenkungen aus diesen Ruhelagen sind in der zweiten Graphik verdeutlicht. Der Umlaufsinn in den kleinen „Ellipsen“ ist entgegengesetzt zum Umlaufsinn des Ringes um den Planeten. Entscheidend ist hier weiterhin, daß die differentiellen Auslenkungen benachbarter Teilchen kleiner als ihr Abstand d bleiben.*

Prinzip eine unendliche Reichweite hat, lauten mit dem „Dichteparameter“

$$\varrho = \frac{m_0}{d^3} \tag{3.8}$$

die linearisierten Bewegungsgleichungen für die kleinen Auslenkungen x_j, y_j und z_j eines Teilchens der Marke $j = 0$ aus der Ruhelage (*Hill'sche Approximation*)

$$\ddot{\xi}_n - 2\,\Omega\,\dot{\eta}_n - 3\,\Omega^2\,\xi_n - G\varrho \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_{n+j} - 2\,\xi_n + \xi_{n-j}}{j^3} = 0, \tag{3.9}$$

$$\ddot{\eta}_n + 2\,\Omega\,\dot{\xi}_n + 2\,G\varrho \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_{n+j} - 2\,y_n + y_{n-j}}{j^3} = 0, \tag{3.10}$$

$$\ddot{\zeta}_n + \Omega^2\,\zeta_n - G\varrho \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\zeta_{n+j} - 2\,\zeta_n + \zeta_{n-j}}{j^3} = 0. \tag{3.11}$$

Für alle Teilchen der Marke n gelten dieselben Bewegungsgleichungen. Deutlich ist der *Coriolis-Term* zu sehen. Ω ist hier die lokale Umlauffrequenz (*Keplerfrequenz*) der Teilchen, die im Falle eines Keplerfeldes gleich der Epizykelfrequenz der Teilchen ist. Die obigen Gleichungen stellen ein gekoppeltes lineares System von Differentialgleichungen - genauer *Integrodifferentialgleichungen* - dar. Sie gelten für eine freie unendlich ausgedehnte gerade Kette ohne äußere gravitative Störungen.

3.2 Die Dispersionsrelationen

Die Lösungen der drei linearen Gleichungen (3.9, 3.10) und (3.11) sind fortschreitende Wellen, wobei die Frequenz ω dieser Wellen in bestimmter Weise von der Wellenlänge (Wellenzahl k) abhängt. Wir machen den komplexen Ansatz

$$\begin{aligned} \xi_n[t] &= C_1\, e^{\imath\,(k\,n\,d + \omega\,t)} \\ \eta_n[t] &= C_2\, e^{\imath\,(k\,n\,d + \omega\,t)} \\ \zeta_n[t] &= C_3\, e^{\imath\,(k\,n\,d + \omega\,t)} \end{aligned} \tag{3.12}$$

wobei $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl, λ die Wellenlänge und ω die Kreisfrequenz der Welle (Eigenfunktion) bezeichnen. Die Vorzeichen sind im

Wellenansatz so definiert, dass bei positivem ω und positivem k die Phase (z.B. der „Wellenberg“) der Welle rückwärts fortschreitet. Die Welle bewegt sich also dann in Richtung kleiner werdender Marken n - also gegen die *Rotationsrichtung des Ringes*. Die Größen C_1, C_2 und C_3 bezeichnen komplexe Konstanten, deren Größen für die freien Wellen (Eigenschwingungen) unbestimmt bleiben. Damit die Verschiebungen reell sind, muss später der Realteil dieser Größen genommen werden. Anwachsraten möglicher *linearer Instabilitäten* sind dann durch $\Im[\omega] < 0$ gegeben.

Die ersten beiden Gleichungen (3.9) und (3.10) sind gekoppelt, während die die dritte Gleichung (3.11) isoliert dasteht. Durch Einsetzen von $\zeta[n]$ aus (3.12) in (3.11) erhält man sofort die Dispersionsrelation für Wellen senkrecht zur Ringebene zu ($\varrho = Gm_0/d^3$)

$$\boxed{\omega_\zeta^2 = \Omega^2 + G\varrho\,\mathbf{S}[k\,d].} \tag{3.13}$$

Die neue Funktion $\mathbf{S}[\kappa]$ ist definiert durch ($\kappa = k\,d$)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}[\kappa] &= 4\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin^2[j\,\kappa/2]}{j^3} = 2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-\cos[j\,\kappa]}{j^3} \\ &= 2\,\zeta[3] - 2\,\Re\{\mathbf{Li}_3\,[e^{\imath\,\kappa}]\}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Das Symbol $\Re$ bezeichnet den Realteil und die Funktion $\mathbf{Li}_3[\kappa]$ den sogenannten *Trilogarithmus* vom Argument κ. In der Sprache der Festkörperphysik ist an der *Brillouingrenze* $\kappa = \pi$

$$\mathbf{S}[\pi] = \frac{7}{2}\,\zeta[3] \tag{3.15}$$

und es gilt für kleine κ die Reihenentwicklung

$$\mathbf{S}[\kappa] = \left(\frac{3}{2} - \ln[\kappa]\right)\kappa^2 + \frac{\kappa^4}{144} + \ldots \tag{3.16}$$

Bei vorgegebener Wellenzahl k bestimmt so die Dispersionsrelation (3.13) die Wellenfrequenz ω der *transversalen Biegewellen* senkrecht zur Ringebene.

Für die kollektiven Schwingungen der gekoppelten Oszillatoren in der Ringebene sind die beiden Gleichungen (3.9) und (3.10) relevant. Einsetzen des Wellenansatzes (3.12) führt auf das System

$$\begin{aligned} C_1\,(-\omega^2 + G\varrho\,\mathbf{S}[kd] - 3\,\Omega^2) + C_2\,(-2\,\imath\,\Omega\,\omega) &= 0, \\ C_1\,(2\,\imath\,\Omega\,\omega) + C_2\,(-\omega^2 - 2\,G\varrho\,\mathbf{S}[kd]) &= 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Nicht verschwindende Lösungen können nur dann existieren, wenn die Determinante des Systems (3.17) gleich Null ist. Aus dieser Bedingung ergibt sich für die Wellen in der $x - y$ Ebene die wichtige Dispersionsrelation

$$\boxed{\omega^4 - (\Omega^2 - G\varrho\,\mathbf{S}[kd])\,\omega^2 + 6G\varrho\,\Omega^2\mathbf{S}[kd] - 2G^2\varrho^2\,\mathbf{S}[kd]^2 = 0.} \tag{3.18}$$

Es ergeben sich zwei Dispersionszweige für die p-Moden und die g-Moden in der Gestalt

$$\begin{aligned} \omega_p^2 = \frac{1}{2}\left(\Omega^2 - G\varrho\,\mathbf{S}[kd]\right) - \\ \frac{1}{2}\sqrt{\Omega^4 - 26\,G\varrho\,\Omega^2\mathbf{S}[kd] + 9\,G^2\varrho^2\mathbf{S}[kd]^2} \end{aligned} \tag{3.19}$$

und

$$\begin{aligned} \omega_g^2 = \frac{1}{2}\left(\Omega^2 - G\varrho\,\mathbf{S}[kd]\right) + \\ \frac{1}{2}\sqrt{\Omega^4 - 26\,G\varrho\,\Omega^2\mathbf{S}[kd] + 9\,G^2\varrho^2\mathbf{S}[kd_0]^2} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Im Grenzfall $k \to 0$, also für große Wellenlängen, ergeben sich daraus mit den Biegewellen die Näherungen

$$\begin{aligned} \omega_p^2 &= 6\,G\,\tau\,k^2\left(\frac{3}{2} - \ln[kd]\right) + \ldots \\ \omega_g^2 &= \Omega^2 - 7\,G\,\tau\,k^2\left(\frac{3}{2} - \ln[kd]\right) + \ldots \\ \omega_z^2 &= \Omega^2 + G\,\tau\,k^2\left(\frac{3}{2} - \ln[kd]\right) + \ldots \end{aligned} \tag{3.21}$$

wobei $\tau = m/d$ die Liniendichte (Masse pro Länge) der Teilchenkette (Ringkette) bedeutet. In Analogie zur Festkörperphysik oder zur Theorie der Sternpulsationen wollen wir ω_p den *akustischen Ast* (p - Mode)

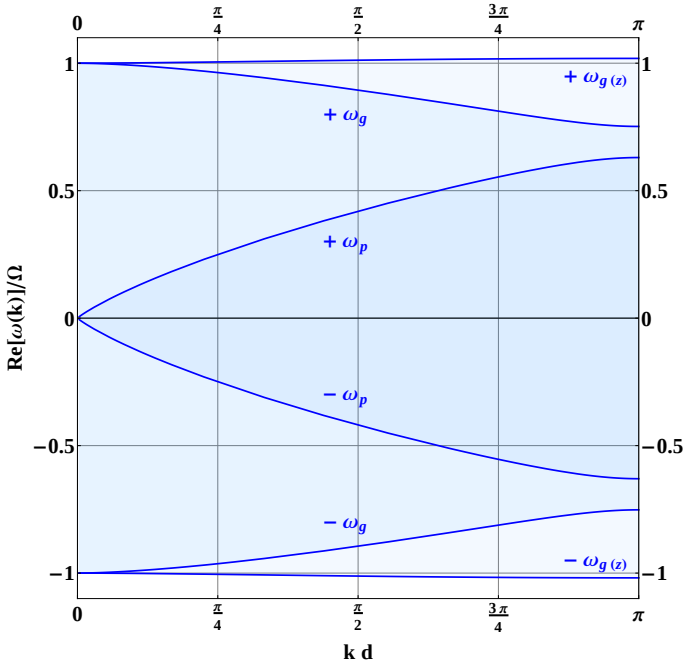

Fig. 3.3: *Die drei Dispersionszweige des selbstgravitierenden N-Teilchenringes. Der Parameter $G\varrho/\Omega^2$ beträgt hier 0.009. Ein lineares Stabilitätskriterium bestimmt als obere Grenze für diese Zahl den Wert ~ 0.0092669. Der Index „p“ bedeutet hier den akustischen Ast (pressure mode), der Index „g“ den gravitativen Ast (gravity mode). Für die „Biegewellen“ gilt nahezu $\omega_z^2 \approx \Omega^2$ (3.13).*

und ω_g den *gravitativen Ast* (g - Mode) nennen. In Fig.(3.3) sind die drei Dispersionszweige graphisch veranschaulicht. Der kritische Kopplungsparameter $G\varrho/\Omega^2$ beträgt hier **0.009**. Da die Frequenz positiv oder negativ sein kann, die Wellenzahl k aber positiv definit sein soll, kann die Phasengeschwindigkeit ω/k einer Welle sowohl positiv wie negativ sein. Dichtewellen können sich also sowohl mit der Rotationsrichtung als auch entgegengesetzt längs des Ringes bewegen. In Fig. (3.4) ist der entsprechende Fall für $G\varrho/\Omega^2 = \mathbf{0.01}$ dargestellt, der im Kurzwellenbereich schon „Instabilitäten“ zeigt.

Da bekanntlich die Ansätze (3.12) invariant gegenüber der Transforma-

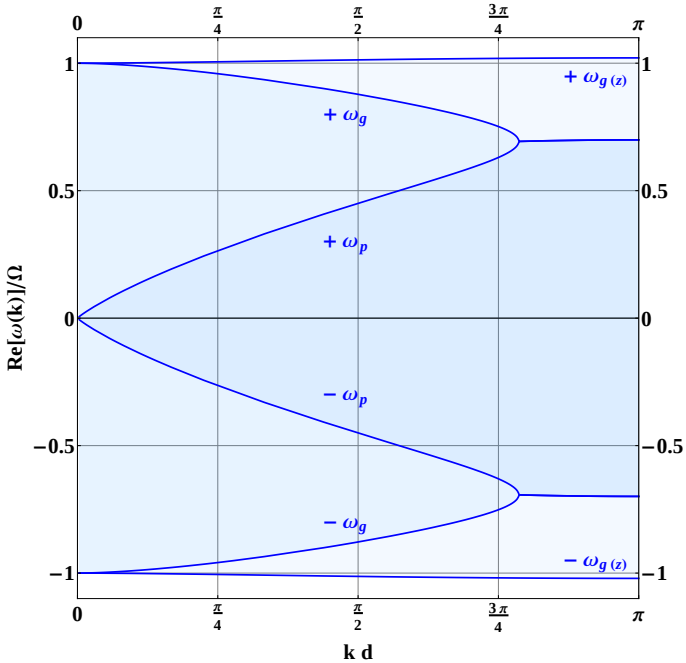

Fig. 3.4: *Die drei Dispersionszweige des selbstgravitierenden N-Teilchenringes für den überkritischen Fall. Der Parameter $G\varrho/\Omega^2$ beträgt hier 0.01. Oberhalb einer bestimmten Wellenzahl ist der Teilchenring nun instabil und die Frequenzen der „p“ und „g“ Moden werden in der Umgebung der „Brillouin-Zone“ $k = \pi/d$“ identisch.*

tion $k' \to k + 2\pi/d$ sind, kann man sich bei der Wellenzahl k auf einen Bereich

$$-\frac{\pi}{d} < k < \frac{\pi}{d} \tag{3.22}$$

beschränken (in der Sprache der Festkörperphysik: *Brillouin - Zone*). Bis jetzt wurde auch stillschweigend angenommen, daß die k - Werte ein kontinuierliches Spektrum bilden. Für eine unendlich ausgedehnte lineare Punktmassenketten ohne Randbedingungen trifft dies auch zu. Da sie aber *asymptotisch* das Verhalten eines Kettenringes beschreiben soll, müssen aufgrund der Ringtopologie periodische Randbedingungen

gefordert werden. Diese lauten einfach

$$\xi_{n+N} = \xi_n; \qquad \eta_{n+N} = \eta_n; \qquad \zeta_{n+N} = \zeta_n. \tag{3.23}$$

Werden diese Randbedingungen in (3.12) eingesetzt, ergibt sich eine Gleichung für die erlaubten k - Werte zu

$$\exp[\imath\, N\, k\, d] = 1. \tag{3.24}$$

N ist hier die Anzahl der Massenpunkte in der Kreiskette. Die allgemeine Lösung der obigen Bedingungsgleichung sind die N-ten Einheitswurzeln in der Form

$$k = \frac{2\pi}{d}\,\frac{m}{N}; \qquad m = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\} \tag{3.25}$$

m ist jetzt die ganzzahlige *azimuthale Quantenzahl* der Ringwellen[1]. Da $N\, d = 2\,\pi\, R$ ist, wo R den Ringradius bezeichnet, gilt auch

$$k = \frac{m}{R}, \qquad k\, d = m\,\frac{d}{R} \tag{3.26}$$

Der Strecke $n\, d$ in der idealisiert gedachten geraden Kette entspricht so in der kreisförmigen Ringkette die Strecke $R\,\varphi$, wobei φ den Polarwinkel vom Planetenzentrum aus bezeichnet. Darum gilt

$$k\, n\, d = m\,\varphi. \tag{3.27}$$

Diese Relation wird im übernächsten Abschnitt benötigt.

3.3 Das Stabilitätskriterium

Bis jetzt wurde angenommen, daß für alle Parameterkombinationen die Wellenfrequenzen reelle Zahlenwerte darstellen. Für die z - Schwingungen senkrecht zur Ringebene ist dies auch sofort einsichtig (siehe 3.13). Für die Schwingungen in der Bahnebene ist die Situation zunächst nicht klar. Die Diskriminante der entsprechenden Dispersionsrelation (3.18) vierten Grades in ω lautet

$$32\,\Omega^{12}\alpha\,\mathbf{S}[kd](3 - \alpha\,\mathbf{S}[kd])(9\,\alpha^2\,\mathbf{S}[kd]^2 - 26\,\alpha\,\mathbf{S}[kd] + 1)^2, \tag{3.28}$$

[1] nicht zu verwechseln mit der Teilchenmasse m_0

wobei wir zur Abkürzung den wichtigen Parameter

$$\alpha = \frac{G\varrho}{\Omega^2} \equiv \frac{G\,m_0}{\Omega^2\,d^3} \tag{3.29}$$

eingeführt haben. Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für reelle Eigenfrequenzen der g-Moden und p_Moden ist dann

$$9\,\alpha^2\,\mathbf{S}[kd]^2 - 26\,\alpha\,\mathbf{S}[kd] + 1 > 0. \tag{3.30}$$

Daraus folgt die schärfere Bedingung

$$\alpha\,\mathbf{S}[kd] < \frac{1}{9}\left(13 - 4\sqrt{10}\right). \tag{3.31}$$

Die Funktion $\mathbf{S}[kd]$ erreicht ihr Maximum an der Brillouingrenze $k = \pm\pi/d$. Es gilt dann[2]

$$\mathbf{S}[\pi] = \frac{7}{2}\,\zeta(3), \tag{3.32}$$

wobei $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion vom Argument s bedeutet. Damit haben wir mit (3.29) die kritische Bedingung

$$\frac{G\varrho}{\Omega^2} \quad < \quad \frac{2}{7(13+4\sqrt{10})\zeta[3]} = \mathbf{0.009266903}\ldots \tag{3.33}$$

Erfüllt der Parameter α die obige Bedingung, haben der gravitative und der akustische Ast der Dispersionsrelation (3.18) für alle Wellenzahlen reelle Eigenfrequenzen. Das N-Teilchensystem oder der Teilchenring ist dann dynamisch stabil.

Für einen Teilchenring mit N Teilchen läßt sich das Kriterium noch zweckmäßig umformen[3]. Mit $\varrho = m_0/d^3$, $\Omega^2 = GM/R^3$ sowie $Nd = 2\pi R$ gilt anstatt (3.33) auch

$$\frac{m_0}{M} < \frac{C_0}{N^3} \qquad (N \gg 1) \tag{3.34}$$

mit $C_0 = 16\pi^3/(7(13+4\sqrt{10})\zeta[3]) \approx \mathbf{2.298657}\ldots$. Diese Stabilitätsbedingung ist nur dann gültig, wenn die Teilchenzahl im Ring sehr groß

[2] Die Zahl $\mathbf{S}[\pi]$ kann als eindimensionale Madelungkonstante der Kette angesehen werden

[3] So hat es Maxwell ausgedrückt

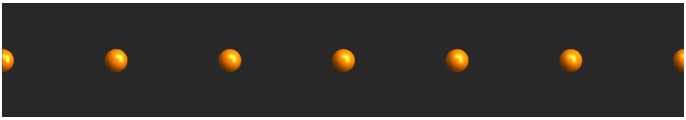

Fig. 3.5: *Bei einem stabilen Teilchenring muss nach (3.36) das Verhältnis aus Abstand zu Durchmesser der maßgebenden Ringteilchen mindestens* $5:1$ *sein. Der Geophysiker H.* JEFFREYS *hat 1947 bei seiner Untersuchung zur Konstitution der Saturnringe auf Grundlage von Maxwell's Arbeit diese wichtige Bedingung nicht oder falsch berücksichtigt ([13])*

ist. Bei Teilchenzahlen kleiner 10 können ja, wie weiter oben gezeigt wurde, asymmetrische Gleichgewichtskonfigurationen auftreten, in denen der gemeinsame Schwerpunkt immer stärker von dem Massenzentrum des Zentralkörpers (hier Saturn) abweichen kann. Das Kriterium (3.34) wurde zum erstenmal von Maxwell in seinem berühmten Essay zur Stabilität des Saturnringes von 1859 abgeleitet ([19]). Obwohl das Modell identische Massenteilchen annimmt, dürfte das Kriterium bei ungleichen Teilchenmassen auch noch anwendbar sein, indem man m jetzt als mittlere Teilchenmasse interpretiert. Das Stabilitätskriterium hat eine wichtige Konsequenz: *Ein extrem schmaler Planetenring ist nur dann dynamisch stabil, wenn er längs seiner Ringperipherie eine große Population von größeren Brocken besitzt, welche der obigen Stabilitätsbedingung genügen.* Um eine bessere Vorstellung von den Größenverhältnissen zu bekommen, substituieren wir für die Masse m_0 der Ringteilchen und M des Planeten

$$m_0 \propto \varrho_m\, r^3; \qquad M \propto \varrho_M\, R_M^3. \tag{3.35}$$

Dabei nehmen wir die Körper als kugelförmig mit den Dichten ϱ_m und ϱ_M und den Radien r und R_m an. Das Stabilitätskriterium (3.34) lautet jetzt alternativ

$$\frac{d_0}{r} > \frac{2\pi}{C_0^{1/3}}\,\frac{\varrho_m}{\varrho_M}\,\frac{R}{R_M} \tag{3.36}$$

Diese großen Brocken können von unzähligen kleinen Staubteilchen "umhüllt" sein, so daß der Ring aus der Ferne eine scheinbar kontinuierliche Massenverteilung repräsentiert ([30]). Beobachtungen von *Voyager* II am Neptunring scheinen dieses nur aus der Theorie deduzierte Modellbild am besten zu verwirklichen ([**?**]). Die sogenannten "Ringbögen" in Planetenringen können dabei als eine oder mehrere überlagerte p–Moden

interpretiert werden, die von einem kleinen Mond resonant angeregt werden. Gerade in den Ringbögen vom Neptunring hat *Voyager* II große diskrete Materieklumpen entdeckt, welche von einer diffusen Staubhülle umgeben sind.

Es ist vielleicht noch interessant zu bemerken, daß unabhängig vom Stabilitätskriterium ein Grenzübergang $a \to 0$ oder $N \to \infty$ nicht möglich ist. Der Grund ist in (3.21) zu sehen, wo die Selbstgravitation wegen $\ln[kd]$ logarithmisch divergent ist, während die *Liniendichte*' $\tau = m/d$ bei diesem Grenzprozess konstant bleiben muss. Natürlich verbietet auch das Stabilitätskriterium einen solchen Grenzübergang, da die Gesamtmasse $N\, m_0$ eines stabilen Teilchenringes wegen (3.34) immer noch von der Anzahl der Teilchen abhängig ist.

3.4 Wellenstruktur der g-Moden

Mit der Dispersionsrelation $\omega \to \omega[k\, d]$ liegt die „Wellenmechanik“ in kollektiven Teilchensystemen oder Medien fest. Wenn die Wellen stabil sind, ist nur die Frage der *Anregung* dieser Wellen noch ein offenes Problem. Man muss so zwischen *freien* und *angeregten* Oszillationen unterscheiden, denn beide können unterschiedliche Strukturen und Zeitabhängigkeiten haben. Allerdings werden wir im Kapitel über zwei wechselwirkende Ringe sehen, dass ein Mond als ein *Ring mit nur einem Teilchen* angesehen werden kann und so der Unterschied zwischen freien und angeregten Schwingungen „künstlich“ ist.

Da in den Bedingungsgleichungen (3.17) beim Coriolisterm die imaginäre Größe $\imath$ eingeht, sind die freien Schwingungen in tangentialer y - Richtung gegenüber denjenigen in radialer x - Richtung um die Phase $\pi/2$ verschoben. Die Eigenschwingungen um die Gleichgewichtspunkte stellen Ellipsen dar, deren große Halbachse im Sinn der Umlaufbewegung ausgerichtet ist. Für das Amplituden - Phasenverhältnis in der Ellipse gilt zunächst für beide Moden allgemein

$$\begin{aligned} \frac{C_2}{C_1} &= \imath\, \frac{\omega^2 + 3\,\Omega^2 - G\varrho\,\mathbf{S}[kd]}{2\,\Omega\,\omega} \\ &= \frac{2\,\imath\,\Omega\,\omega}{\omega^2 + 2G\varrho\,\mathbf{S}[kd]} \end{aligned} \tag{3.37}$$

Für den Grenzfall großer Wellenlängen, also $k \to 0$, gilt für die g-Moden

$\omega \to \pm\Omega$ und daher

$$\frac{C_2}{C_1} = 2\,\imath\,\frac{\Omega}{\omega}. \tag{3.38}$$

Der Umlaufsinn in der Oszillatorellipse (*Epizykel*) ist - unabhängig vom Vorzeichen der Wellenfrequenz ω - immer entgegengesetzt dem Umlaufsinn der Bahnbewegung um den Planeten. Die obige Fallunterscheidung kann man vereinfachen, wenn wir $|\omega| \approx \Omega$ *immer als positiv ansehen* und den Vorzeichenwechsel der Phasengeschwindigkeit der g-Moden auf die Wellenzahl k abwälzen. Somit gilt für die g-Moden

$$\begin{aligned} \xi_n[t] &= C_1\,\cos\left[k\,n\,d + \omega\,t\right] \\ \eta_n[t] &= 2\,C_1\,\sin\left[k\,n\,d + \omega\,t\right] \end{aligned} \tag{3.39}$$

Hier ist ω immer die positive Wellenfrequenz, während k jetzt sowohl positive wie negative Werte annehmen darf. Mit der azimuthalen Wellenzahl m folgt alternativ

$$\xi[\varphi, t] = C_1\,\cos\left[m\,\varphi - \omega\,t\right]; \quad \eta[\varphi, t] = 2\,C_1\,\sin\left[m\,\varphi - \omega\,t\right] \tag{3.40}$$

Die Erscheinungsformen des N-Teilchenringes sollen jetzt in einer komplexen Zahlendarstellung beschrieben werden. Für die elliptische Bewegung um den Gleichgewichtspunkt gilt

$$\xi[\varphi, t] + \imath\,\eta[\varphi, t] = \frac{3}{2}\,C_1\,e^{\imath\,(m\,\varphi - \omega\,t)} - \frac{1}{2}\,C_1\,e^{-\imath\,(m\,\varphi - \omega\,t)} \tag{3.41}$$

Eine ungestörte Kreisbewegung eines Teilchens bei der Position φ mit dem Radius $R = 1$ gegen den Uhrzeigersinn wird dann in einer komplexen Ebene durch die Formel ($\Omega > 0$)

$$e^{\imath\,(\varphi + \Omega\,t)} \tag{3.42}$$

beschrieben. Diese komplexen Koordinaten erfahren eine Modulation durch die kleinen Verrückungen (3.41). In guter Näherung gilt dann für die Wellenbewegungen der g-Moden im rotierenden Ring mit Radius 1

$$e^{\imath\,(\varphi + \Omega\,t)} + \frac{3}{2}\,\epsilon\,e^{\imath\,(m+1)\,\varphi - (\omega - \Omega)\,t} - \frac{1}{2}\,\epsilon\,e^{-\imath\,((m-1)\,\varphi - (\omega + \Omega)\,t)} \tag{3.43}$$

Die Größe ϵ ist dabei die Exzentrizität der einzelnen Teilchenbahn. Der Realteil und der Imaginärteil bezeichnen dann die x - bzw. y - Koordinaten

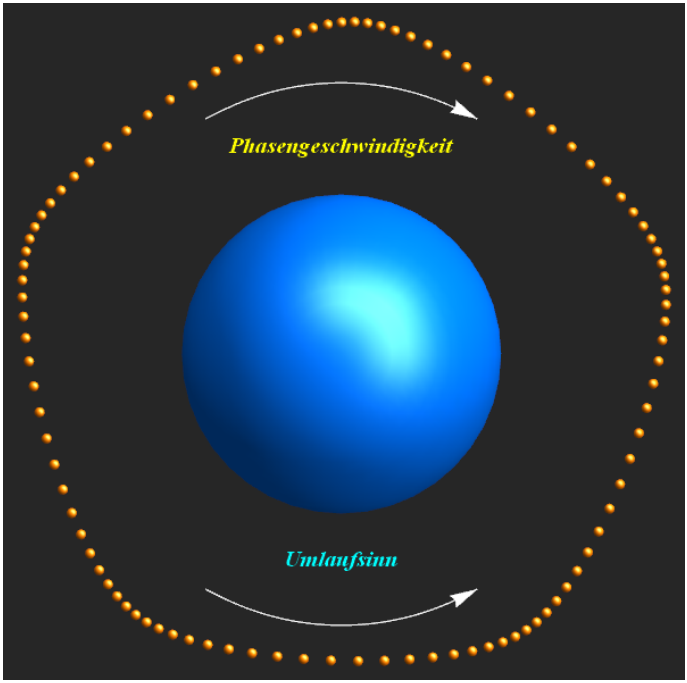

Fig. 3.6: *Eine freie g-Mode im Teilchenring mit $N = 100$ und der Wellenzahl $m = -5$, berechnet mit (3.43). Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist gegen den Umlaufsinn der Teilchen gerichtet. Die Verdichtungen liegen in den äußeren Wellenbiegungen.*

im Inertialsystem. In den Figuren (3.6) und (3.7) sind zwei Beispiele für die g-Mode mit den Wellenzahlen $m = -5$ und $m = +5$ gezeigt. Für die Winkelgeschwindigkeit der Phase gilt nun in unserer Normierung *im rotierenden Ringsystem*

$$\Omega_p = \frac{\omega}{m}; \qquad (imRingsystem) \tag{3.44}$$

Im Inertialsystem mit der Rotationsgeschwindigkeit Ω dagegen folgt gemäß unserer Festsetzung

$$\Omega_p = \frac{\omega}{m} + \Omega \equiv \frac{\omega + m\,\Omega}{m} \quad (imInertialsystem) \tag{3.45}$$

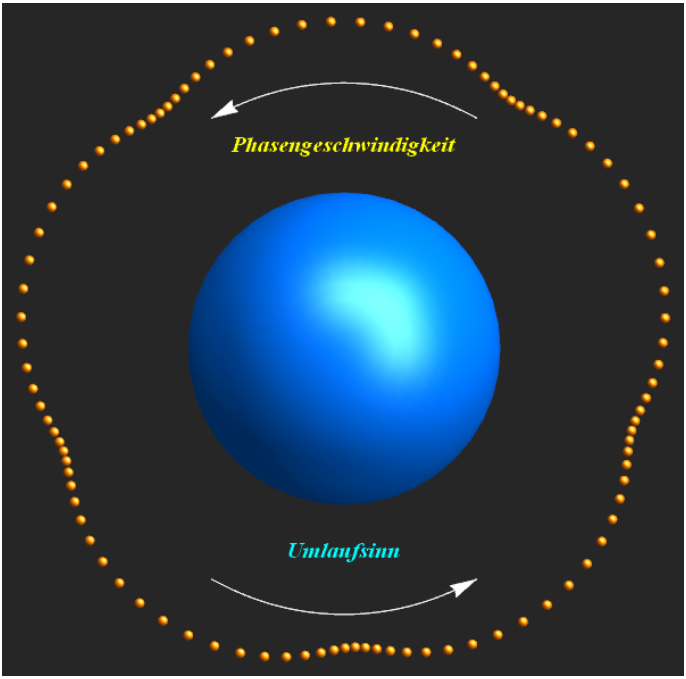

Fig. 3.7: *Eine freie g-Mode im Teilchenring mit $N = 100$ und der Wellenzahl $m = +5$, berechnet mit (3.43). Die Phasengeschwindigkeit der Welle hat den gleichen Umlaufsinn wie die Rotationsbewegung der Teilchen. Die Verdichtungen liegen jetzt in den inneren Wellenbiegungen.*

Diese Phasengeschwindigkeit spielt eine wichtige Rolle bei der gravitativen Resonanzanregung dieser Wellen (Orbitalwellen) durch begleitende Monde innerhalb des Saturnringes. Durch Wechselwirkung mit radial benachbarten „Ringen“ entstehen so mehr-armige Spiralwellen.

3.5 Wellenstruktur der p-Moden

Neben den g-Moden hat der oszillierende Punktmassenring auch noch die sogenannten akustischen p-Moden. Sie verhalten sich wie Druckwellen in einem schmalen Rohr mit der Phasengeschwindigkeit („Schallgeschwin-

digkeit“; siehe (3.21))

$$c_p^2 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \equiv 6\,G\,\tau\,\left(\frac{3}{2} - \ln[k\,d]\right) + \ldots \tag{3.46}$$

Wie man sieht, hängt die Phasengeschwindigkeit schwach logarithmisch

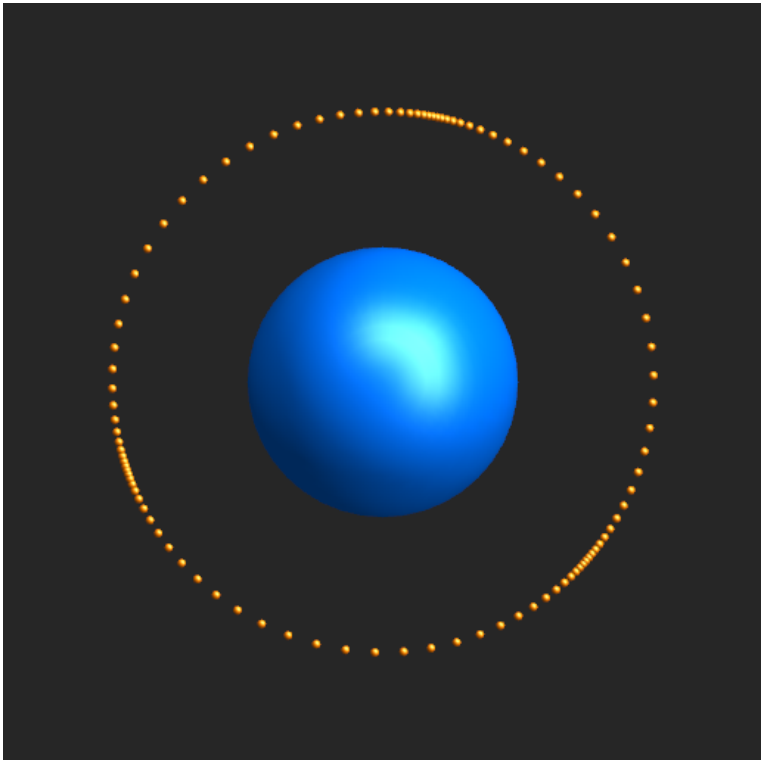

Fig. 3.8: *Eine frei angeregte akustische p-Mode mit $m = 3$ in einem Ring mit N=100 Punktmassen. Die Eigenbewegung der Teilchen ist hier nahezu vollständig auf die tangentiale Richtung beschränkt. Dichtewellen dieses Typs sind im Ring praktisch „eingefroren“ und kommen für die Deutung von Ringbögen im Neptunring in Frage. Die Anregung solcher Wellen kann nur durch begleitende Kleinstmonde geschehen.*

von der Wellenzahl ab. Die p-Wellen sind also nur genähert dispersionslos.

Mit (3.21) und (3.37) folgt für das Achsenverhältnis der Schwingungsellipse

$$\left|\frac{C_1}{C_2}\right| = \sqrt{\frac{8\,G\varrho}{3\,\Omega^2}\,k^2\,d^2\left(\frac{3}{2} - \ln[k\,d]\right)} + \ldots \tag{3.47}$$

Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, daß die Größe $G\varrho/\Omega^2$ für einen stabilen Ring kleiner als etwa 10^{-2} sein muss. In der Näherung $k\,d \to 0$ sind daher die Schwingungen der Punktmassen in guter Näherung auf die tangentiale Richtung beschränkt. Anstatt (3.40) gilt nun

$$\begin{aligned} \xi[\varphi, t] &= 0 \\ \eta[\varphi, t] &= C_1\,\sin\left[\ell\,\varphi + \omega_p\,t\right] \end{aligned} \tag{3.48}$$

In guter Näherung gilt dann analog für die Wellenbewegungen der akustischen p-Moden im rotierenden Ring

$$\boxed{\sim R\,e^{\imath\,(\varphi - \Omega\,t)}\,\exp\left[\frac{1}{2}\,\epsilon\,\left(e^{+\imath\,(m\,\varphi - \omega_p\,t)} - e^{-\imath\,(m\,\varphi - \omega_p\,t)}\right)\right]} \tag{3.49}$$

ϵ bedeutet hier zwar das Verhältnis C_1/R, hat aber nicht mehr die anschauliche Bedeutung einer Bahnexzentrizität der Ringteilchen. In Figur (3.8) ist eine akustische Mode mit $m = 3$ veranschaulicht. Die Phasengeschwindigkeit einer solchen Welle im Ring ist sehr gering, so dass die Verdichtungen dynamisch wie „*eingefroren*“ erscheinen. Ob dieser Wellentyp durch einen begleitenden Mond angeregt werden kann, muss noch genauer untersucht werden. Die Entstehung von *Ringbögen im Neptunring* kann mit Sicherheit auf eine oder mehrere p-Moden zurückgeführt werden. Doch davon in einem anderen Kapitel mehr.

4 Ein Punktmassengitter ohne Scherströmung

Mit der Lösung des N-Teilchen-Ringmodelles können wir zwar verstehen, weshalb sehr schmale Planetenringe existieren können, doch besonders der Saturnring ist eher eine *Materiescheibe*, die - wenn überhaupt - aus zahlreichen eng beieinander liegenden „Ringen“ („Stromlinien“) besteht, die zudem noch unterschiedliche Rotationsgeschwindigkeiten aufweisen. Um eine ersten Überblick bezüglich der Stabilitätsfrage zu erlangen, untersuchen wir zunächst ein *rein akademisches Modell* eines exakt quadratischen Massengitters, in der die Teilchen in tangentialer und radialer Richtung gleiche Abstände d haben. Die Trägheitskräfte wie Corioliskraft und Gezeitenkraft sollen die gleichen wie beim Einzelring sein. Bezeichnen wir jetzt die drei orthogonalen Auslenkungen ξ, η, ζ der Teilchen aus ihrer Ruhelage mit den Indizes n_1 (radiale Richtung) und n_2 (tangentiale Richtung), so gelten für ein so unendlich ausgedehntes quadratisches Teilchengitter die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
&\ddot{\xi}_{n_1,n_2} - 2\,\Omega\,\dot{\eta}_{n_1,n_2} - 3\,\Omega^2\,\xi_{n_1,n_2} \\
&\quad = G\varrho \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{-2\,j_1^2 + j_2^2}{(j_1^2+j_2^2)^{5/2}}\,\left(\xi_{n_1+j_1,n_2+j_2} - \xi_{n_1,n_2}\right) - \\
&\quad G\varrho \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{3\,j_1\,j_2}{(j_1^2+j_2^2)^{5/2}}\,\left(\eta_{n_1+j_1,n_2+j_2} - \eta_{n_1,n_2}\right),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\eta}_{n_1,n_2} + 2\,\Omega\,\dot{\xi}_{n_1,n_2} = G\varrho \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{j_1^2 - 2\,j_2^2}{(j_1^2+j_2^2)^{5/2}}\,\left(\eta_{n_1+j_1,n_2+j_2} - \eta_{n_1,n_2}\right) - \\
G\varrho \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{3\,j_1\,j_2}{(j_1^2+j_2^2)^{5/2}}\,\left(\xi_{n_1+j_1,n_2+j_2} - \xi_{n_1,n_2}\right),
\end{aligned} \tag{4.2}$$

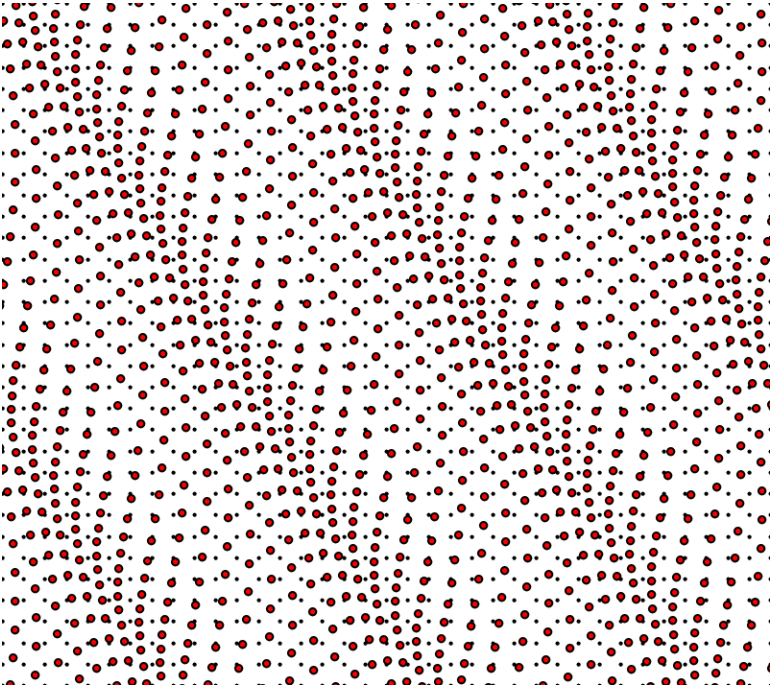

Fig. 4.1: *Die Ruhelage aller identischen Masseteilchen ist hier ein quadratisches Gitter. Im angeregten Zustand läuft eine* ***Dichte-Welle*** *durch das Gitter, wobei sich jedes Teilchen gemäß den lokalen Hillschen Bewegungsgleichungen in einer Ellipse bewegt, deren Achsen sich wie beim Einzelring in tangentialer zu radialer Richtung 2:1 verhalten.*

$$\ddot{\zeta}_{n_1,n_2} + \Omega^2\,\zeta_{n_1,n_2} = G\varrho \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{\zeta_{n_1+j_1,n_2+j_2} - \zeta_{n_1,n_2}}{(j_1^2+j_2^2)^{3/2}}. \tag{4.3}$$

Die Summation erstreckt sich über alle Zahlenpaare (j_1, j_2) außer $(0, 0)$. Für die Raumdichte gilt wieder

$$\varrho = \frac{m_0}{d_0^3}.$$

Man sieht auch hier , dass für jedes Teilchen im Gitter dieselben gekoppelten Integrodifferentialgleichungen gültig sind.

4.1 Dispersionsrelationen im Gitter

Spezielle Eigenlösungen der Gittergleichungen sind wieder Wellen der Form

$$\begin{aligned} \xi_{n_1,n_2}[t] &= C_1\, e^{\imath\,(k_1 n_1 d_0 + k_2 n_2 d_0 - \omega\, t)} \\ \eta_{n_1,n_2}[t] &= C_2\, e^{\imath\,(k_1 n_1 d_0 + k_2 n_2 d_0 - \omega\, t)} \\ \zeta_{n_1,n_2}[t] &= C_3\, e^{\imath\,(k_1 n_1 d_0 + k_2 n_2 d_0 - \omega\, t)}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei k_1 die Wellenzahl in radialer Richtung (ξ - Auslenkung) und k_2 die Wellenzahl in tangentialer Richtung (η - Auslenkung) bezeichnet. In der Sprache der Festkörperphysik können wir die Wellenzahl auf die erste *Brillouin-Zone*

$$-\frac{\pi}{d_0} < k_1 < +\frac{\pi}{d_0}; \qquad -\frac{\pi}{d_0} < k_2 < +\frac{\pi}{d_0}$$

beschränken. Einsetzen dieser Ansätze in die Bewegungsgleichung für die Schwingungen ζ *senkrecht* zur Gitterebene führt auf die Dispersionsrelation in der Form

$$\omega^2 = \Omega^2 + G\varrho \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{1 - e^{\imath\,(k_1 j_1 d_0 + k_2 j_2 d_0)}}{(j_1^2 + j_2^2)^{3/2}}. \tag{4.5}$$

Wir interessieren uns zunächst für den *Langwellenbereich*, also für den Grenzfall $k_1 \to 0$ und $k_2 \to 0$. Wir gehen dabei von den diskreten Variablen j_1, j_2 zu kontinuierlichen Variablen über und erhalten so ein Doppelintegral [1]

$$\omega^2 = \Omega^2 + G\varrho \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{\imath\,(k_1 j_1\, d_0 + k_2 j_2\, d_0)}}{(j_1^2 + j_2^2)^{3/2}}\, dj_1\, dj_2. \tag{4.6}$$

[1] hier nicht die Gitterkonstante d_0 mit dem Differential $dj_{1,2}$ verwechseln

Mit Hilfe von Integraldarstellungen für $(j_1^2+j_2^2)^{-1/2}$ und $(j_1^2+j_2^2)^{-3/2}$ in der Form

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(j_1^2+j_2^2)^{1/2}} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(j_1^2+j_2^2)\ u^2}\, du; \\
\frac{1}{(j_1^2+j_2^2)^{3/2}} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2\, e^{-(j_1^2+j_2^2)\, u^2}\, du
\end{aligned}$$

lässt sich dann das obige Integral in ein Dreifach-Integral transformieren. Nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge erhalten wir mit dem Betrag der Wellenzahl $k=\sqrt{k_1^2+k_2^2}\to 0$

$$\boxed{\omega^2 = \Omega^2 + 2\pi\, G\sigma|k|.} \tag{4.7}$$

Dies ist die allgemeine Dispersionsrelation für *Biegewellen*, die auch für rein radiale Wellen bei Scherströmung in einer *Keplerscheibe* ihre Gültigkeit behält. Selbst für eine dünne inkompressible hydrodynamische Schicht mit *Selbstgravitation* ist sie gültig, was später noch gezeigt werden wird. Die Wellenfrequenz ω liegt stets oberhalb der lokalen *Epizykelfreqenz* Ω. Die Größe σ ist jetzt die wichtige *Oberflächendichte* oder *Säulendichte* der Materiescheibe (Planetenring-Scheibe) und es folgt mit der Gitterkonstanten d anstatt $\varrho = m_0/d^3$

$$\sigma = \frac{m_0}{d_0^2}. \tag{4.8}$$

Typische Werte für den äußeren A-Ring des Saturns liegen bei $\sim 50\, g/cm^2$.

Um die wirklichen Dichtewellen im Gitter zu studieren, setzen wir die Ansätze (4.4) für ξ_{n_1,n_2} sowie η_{n_1,n_2} in die Bewegungsgleichungen des Gitters ein. Es folgen die beiden gekoppelten Bedingungsgleichungen

$$C_1\ \left(-\omega^2 - 3\,\Omega^2 - \mathbf{S_1}\right) + \imath\, C_2\ \left(2\,\omega\,\Omega - \imath\,\mathbf{S_3}\right) = 0 \tag{4.9}$$

$$C_1\ \left(2\,\omega\,\Omega + \imath\,\mathbf{S_3}\right) + \imath\, C_2\ \left(-\omega^2 - \mathbf{S_2}\right) = 0. \tag{4.10}$$

Die unterschiedlichen $\mathbf{S_{1,2,3}}$ Funktionen sind durch die Fourierreihen

$$\begin{aligned}
\mathbf{S_1}[k_1,k_2] &= G\varrho \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{-2\,j_1^2+j_2^2}{(j_1^2+j_2^2)^{5/2}} \left(e^{\imath\,(k_1 j_1 d_0 + k_2 j_2 d_0)} - 1\right), \\
\mathbf{S_2}[k_1,k_2] &= G\varrho \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{j_1^2-2\,j_2^2}{(j_1^2+j_2^2)^{5/2}} \left(e^{\imath\,(k_1 j_1 d_0 + k_2 j_2 d_0)} - 1\right), \\
\mathbf{S_3}[k_1,k_2] &= G\varrho \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{3\,j_1\,j_2}{(j_1^2+j_2^2)^{5/2}}\, e^{\imath\,(k_1 j_1 d_0 + k_2 j_2 d_0)}
\end{aligned}$$

definiert. Alternativ gelten auch die Darstellungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{S_1}[k_1,k_2] &= -2G\varrho \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{-2\,j_1^2+j_2^2}{(j_1^2+j_2^2)^{5/2}}\, \sin[(k_1 j_1 d_0 + k_2 j_2 d_0)/2]^2, \\
\mathbf{S_2}[k_1,k_2] &= -2G\varrho \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{j_1^2-2\,j_2^2}{(j_1^2+j_2^2)^{5/2}}\, \sin[(k_1 j_1 d_0 + k_2 j_2 d_0)/2]^2, \\
\mathbf{S_3}[k_1,k_2] &= -G\varrho \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{3\,j_1\,j_2}{(j_1^2+j_2^2)^{5/2}}\, \sin[k_1 j_1 d_0]\, \sin[k_2 j_2 d_0].
\end{aligned}$$

Daraus folgt unter anderem die Vertauschungssymmetrie

$$\mathbf{S_1}[k_1,k_2] = \mathbf{S_2}[k_2,k_1]$$

Wie bei den Biegewellen beschränken wir uns zunächst wieder auf den Limes *langer Wellenlängen*, also sehr kleiner Wellenzahlen k. Dazu führen zunächst einen Richtungswinkel Θ der planaren Wellenfront gemäß

$$k_1 = |k|\cos[\Theta]; \qquad k_2 = |k|\sin[\Theta]$$

ein. $\theta = 0$ bedeutet rein radiale Wellenausbreitung im Gitter, $\Theta = \pm\pi/2$ rein tangentiale Ausbreitung. Mit der integralen Hilfstransformation

$$\frac{1}{(j_1^2+j_2^2)^{5/2}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^4\, e^{-(j_1^2+j_2^2)\,u^2}\, du$$

erhalten wir analog wie bei den Biegewellen die Ergebnisse

$$\mathbf{S_1} = 2\pi\, G\sigma|k|\cos[\Theta]^2; \quad \mathbf{S_2} = 2\pi\, G\sigma|k|\sin[\Theta]^2 \tag{4.11}$$

sowie mit einem Minuszeichen

$$\mathbf{S_3} = -\pi\, G\sigma|k| \sin[2\,\Theta]. \tag{4.12}$$

Bemerkenswert an der letzten Funktion $\mathbf{S_3}$ ist die Tatsache, dass sie ihr Vorzeichen wechselt, wenn der Winkel $\Theta > 0$ (*trailing waves*) oder $\Theta < 0$ (*leading waves*) ist. Diese Asymmetrie wird für die Entstehung von Spiralwellen in hydrodynamischen Modellen noch eine große Rolle spielen.

Für die Eigenschwingungen in der Scheibenebene folgt aus der Bedingung, dass die Koeffizientendeterminante von (4.9,4.10) verschwinden muss, die Dispersionsrelation für die Dichtewellen im Gitter

$$\omega^4 - \left(\Omega^2 - \mathbf{S_1} - \mathbf{S_2}\right)\, \omega^2 + 3\Omega^2\, \mathbf{S_2} + \mathbf{S_1}\mathbf{S_2} - \mathbf{S_3}^2 = 0. \tag{4.13}$$

Für rein radiale Dichtewellen mit $\Theta = 0$ ergibt sich wegen $\mathbf{S_2} \equiv \mathbf{S_3} = 0$ im Grenzfall großer Wellenlängen neben dem singulären Dispersionszweig $\omega^2 = 0$ der Zweig

$$\boxed{\omega^2 = \Omega^2 - 2\pi G\sigma|k|.} \tag{4.14}$$

Gegenüber den Biegewellen ändert sich bei den Dichtewellen also das Vorzeichen der *Selbstgravitation*.

4.2 Das Stabilitätskriterium des quadratischen Gitters

5 Ein Punktmassengitter mit Scherströmung

Im vorhergehenden Kapitel haben wir ein statisches quadratisches Punktmassengitter untersucht, welches den lokalen Kräften in einer Keplerbahn unterworfen ist. Das Modell ist aber rein akademisch, denn wir haben die *Scherströmung* der einzelnen Fäden ausgeschaltet. Das in der lokalen Hillschen Approximation eine Scherströmung der Fäden notwendig stattfinden muss, sieht man an den ungestörten Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\xi} - 2\,\Omega\,\dot{\eta} - 3\,\Omega^2\,\xi = 0; \quad \ddot{\eta} + 2\,\Omega\,\dot{\xi} = 0.$$

Eine partikuläre Lösung dieser beiden Gleichungen ist die Scherströmung

$$\eta = -\frac{3}{2}\,\Omega\,\xi\,t; \qquad \xi = \text{constant}. \tag{5.1}$$

6 Wellenmechanik von zwei scherenden Teilchenringen

Selbst ein schmaler Planetenring wie der F-Ring des Saturns besteht mit Sicherheit nicht nur aus einer einzigen Teilchenkette oder einem starren quadratischen Teilchengitter, wie es als idealisiertes Modell im vorherigen Kapitel behandelt wurde. Trotzdem kommt das Modell des Einzelringes aus N Teilchen beim ϵ - Neptunring der Wahrheit schon recht nahe. Aber schon das Problem von zwei einander vorbeigleitenden Teilchenketten ist mathematisch äußerst verwickelt, wie wir jetzt sehen werden. Ende des Jahres 1857 war J.C. Maxwell mit genau diesem Problem der gravitativen Störung von zwei Teilchenringen beschäftigt, die nahe beieinander mit unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten den Saturn umrunden. So schreibt er am 21. November 1857 an P.G. Tait (1831-1901):

> *...I am now busy with two rings of satellites with different velocities disturbing one another....*

Und in einem Brief an L. Campbell (1830-1908) am 22. Dezember 1857:

> *I am still at Saturn's Rings. At present two rings of satellites are disturbing one another. I have devised a machine to exhibit the motions of the satellites in a disturbed ring....*

Schließlich in einem weiteren Brief vom 17. Februar 1858 wiederum an L. Campbell:

> *... I have not been reading much of late. I have been hard at mathematics. In fact I set myself a great arithmetical job of calculating the tangential action of two rings of satellites, and I am near through with it now. I have got a very neat model of my theoretical ring, a credit to Aberdeen workmen. Here is a diagram, but the thing is complex and difficult to draw...*

Kurz zuvor, am 7. Februar 1858, schrieb er an R.B. LITCHFIELD: *...For other things – I have not much time in winter for improving my mind..*[1]

Nach über hundert Jahren sind diese schwierigen Rechnungen von der Wechselwirkung zweier Teilchenringe in der Literatur vergessen, nicht wiederholt geschweige denn in irgendeiner Arbeit verfeinert worden. Dies erscheint aber umso wünschenswerter, weil MAXWELL eine Art Störungstheorie für die Wechselwirkung zweier Teilchenringe ohne Kollisionen angewandt hat und somit nicht im Detail die Dispersionsrelation **achten Grades** zwischen der Wellenzahl k und der Wellenfrequenz ω diskutiert hat oder konnte [2]. In Analogie zur Theorie von *Plasmawellen* in ionisierten Gasen kann man bei zwei scherenden Punktmassenketten die resonante *Zweistrominstabilität* oder *Gegenstrominstabilität* bei Überschreitung gewisser Parameter erwarten. Auch gehört in diesen Fragenkreis das Problem der Bildung von *Spiralwellen* und das sogenannte **Anti – Spiral Theorem** von LYNDEN - BELL und OSTRIKER von 1967. Dies besagt: *If a steady state solution of a time – reversible set of equations has the form of a trailing spiral, then there must be an identical solution in the form of a leading spiral. However: most observed spirals in galaxies are trailing!* Diese Fragen und andere sollen hier nun näher betrachtet werden.

Wir betrachten ein orthogonales Gitternetz mit der radialen sowie tangentialen Gitterkonstanten d_2 und d_1. Zwischen zwei identischen Massenpunkten m_0 mit den Relativverschiebungen

$$\Delta\xi = \xi_{j_1,j_2} - \xi_{0,0}, \quad \Delta\eta = \eta_{j_1,j_2} - y_{0,0}, \quad \Delta z = z_{j_1,j_2} - z_{0,0}$$

existiert dann die gravitative Potentialdifferenz

$$\mathbf{V} = \frac{Gm_0}{\sqrt{(j_1\,D + \Delta x)^2 + (j_2\,d + \Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}. \tag{6.1}$$

Die gravitativen Beschleunigungen auf das Teilchen mit Index (0,0) sind dann durch

$$-\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \Delta x}, \qquad -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \Delta y}, \qquad -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \Delta z} \tag{6.2}$$

[1] Unter anderem erwähnt MAXWELL, dass er den Versroman *Aurora Leigh* (1856) von E.B. BROWNING (1806-1861) gelesen habe. Bekannt ist heute noch ihre Dichtung: „How do I love thee“ (Sonnet 43, 1845).

[2] Die Dispersionsrelation ist eigentlich eine Gleichung vierten Grades in ω^2

gegeben. Entwickeln wir die Potentialfunktion bis zur quadratischen Ordnung in den Koordinatenverschiebungen, so erhalten wir die Beschleunigungen

$$\begin{aligned} g_x &= G m_0 \frac{j_1 D}{[(j_1 D)^2 + (j_2 d)^2]^{3/2}} + \\ & G m_0 \frac{\left(-2 (j_1 D)^2 + (j_2 d)^2\right) \Delta x - 3 D d j_1 j_2 \Delta y}{[(j_1 D)^2 + (j_2 d)^2]^{5/2}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g_y &= G m_0 \frac{j_2 d}{[(j_1 D)^2 + (j_2 d)^2]^{3/2}} + \\ & G m_0 \frac{\left((j_1 D)^2 - 2 (j_2 d)^2\right) \Delta y - 3 D d j_1 j_2 \Delta x}{[(j_1 D)^2 + (j_2 d)^2]^{5/2}} \end{aligned}$$

sowie

$$g_z = G m_0 \frac{\Delta z}{[(j_1 D)^2 + (j_2 d)^2]^{3/2}}.$$

Es fällt auf, dass bei den Beschleunigungen g_x, g_y Absolutterme auftreten, die unabhängig von den Koordinatenverschiebungen sind. Da beide Teilchenringe eine Scherung mit der Geschwindigkeit $v = -3\Omega D j_1/2$ ausführen, erfährt ein Teilchen des einen Ringes durch den anderen Ring im radialen Abstand D die Beschleunigung

$$\sum g_x = G m_0 \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{D}{[D^2 + (j_2 d - v t)^2]^{3/2}}, \tag{6.3}$$

$$\sum g_y = G m_0 \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{j_2 d - v t}{[D^2 + (j_2 d - v t)^2]^{3/2}}. \tag{6.4}$$

Wie man sieht, sind diese Funktionen periodisch zeitabhängig. Von daher sollte es möglich sein, diese in eine Fourierreihe zu entwickeln. Dies gelingt mit der Poissonschen Summationsformel (siehe Anhang). Als Ergebnis erhält man

$$\sum g_x = +\frac{2 G m_0}{d D} \left\{ 1 + 4 \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} n \frac{D}{d} \mathbf{K_1} \left[2 \pi n \frac{D}{d} \right] \cos \left[2 \pi n \frac{v t}{d} \right] \right\}$$

und

$$\sum g_y = -\frac{2\,Gm_0}{d^2}\left\{4\,\pi\sum_{n=1}^{n=\infty} n\,\mathbf{K_0}\left[2\,\pi\,n\,\frac{D}{d}\right]\,\sin\left[2\,\pi\,n\,\frac{v\,t}{d}\right]\right\}.$$

Das Argument der trigonometrischen Funktionen lässt sich mit der bekannten Schergeschwindigkeit v besser als

$$2\,\pi\,n\,\frac{v\,t}{d} = 3\,\pi\,n\,\frac{D}{d}\,\Omega\,t \tag{6.5}$$

schreiben. Ein resonanter Term tritt dann auf, wenn die Bedingung $3\,\pi\,n\,D/d \sim 1$ genähert erfüllt ist. Das Argument $2\,\pi\,n\,D/d$ der modifizierten Besselfunktion ist dann sehr genau $2/3$. Im Folgenden werden wir den Absolutterm in $\sum g_x$ nicht berücksichtigen, da er bei zwei Teilchenringen sehr klein ist und zudem durch eine leicht modifizierte Schergeschwindigkeit v kompensiert werden kann. Der relevante Störungsterm ist somit in radialer Richtung

$$\sum g_x = +\frac{2\,Gm_0}{d^2}\left\{4\,\pi\sum_{n=1}^{n=\infty} n\,\mathbf{K_1}\left[2\,\pi\,n\,\frac{D}{d}\right]\,\cos\left[2\,\pi\,n\,\frac{v\,t}{d}\right]\right\}.$$

Im Falle von zwei Teilchenringen mit $D \sim d$ sind diese direkten Störungen sehr hochfrequent ($\geq 3\pi\,\Omega$) und haben daher auf die Stabilitätseigenschaften und Wellenstrukturen keinen merklichen Einfluss.

6.1 Biegewellen zweier Teilchenringe

Wir beginnen mit der Dynamik von Biegewellen in einem unendlich ausgedehnten rechteckigen Gitter. Die unterschiedlichen Kopplungen der einzelnen „Oszillatoren“ sind hier noch relativ einfach zu verstehen. Für eine einzelne unendlich ausgedehnte gerade Teilchenkette gilt für jedes Teilchen bei kleinen Auslenkungen senkrecht zur Scheibenebene die identische Bewegungsgleichung

$$\ddot{z}_0 + \Omega^2\,z_0 = +\frac{Gm}{d^3}\sum_{j2=1}^{\infty}\frac{z_{j_2} - 2z_0 + z_{-j_2}}{j_2^3}.$$

Man kann sich also auf ein spezielles Teilchen der Marke $n_2 = 0$ beschränken. Diese Gleichung für *ein einzelnes* Teilchen wollen wir nun

auf ein rechteckiges Gitter mit der radialen Gitterkonstanten D und der schon bekannten tangentialen Gitterkonstanten d erweitern. Man erhält dann *ohne Scherströmung* für das Teilchen der Marke $(0,0)$ die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{z}_{0,0} + \Omega^2 z_{0,0} = Gm \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{z_{j_1,j_2} - z_{0,0}}{\left(\sqrt{(j_1 D)^2 + (j_2 d)^2}\right)^3}. \tag{6.6}$$

Der Selbstwechselwirkungsterm $(j_1, j_2) = (0,0)$ muss natürlich ausgelassen werden. Nun gibt es aber lokal in einer Keplerscheibe eine *lineare Scherströmung*. In tangentialer Richtung verschieben sich also die Teilchenketten ständig gegeneinander. Die lokale Scherströmung mehrerer Ringe im Abstand D in einem idealen Keplerfeld erfolgt mit der Geschwindigkeit

$$v_{j_1} = -\frac{3}{2}\,\Omega\, D\, j_1 \tag{6.7}$$

wenn j_1 die nach außen weisende radiale Marke eines Ringes angibt. Gegenüber dem Referenzring (Teilchen) $j_1 = 0$ bleiben weiter außen liegende Ringe zurück ($v < 0$), weiter innen liegende Ringe eilen voraus ($v > 0$).

Mit dieser Setzung lautet die Bewegungsgleichung des Referenzteilchens $(0,0)$ in einem differentiell scherenden Feld von beliebig vielen Teilchenketten einfach

$$\ddot{z}_{0,0} + \Omega^2 z_{0,0} = Gm \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{z_{j_1,j_2} - z_{0,0}}{\left(\sqrt{(j_1 D)^2 + (j_2 d - \frac{3}{2} j_1 \Omega D t)^2}\right)^3}. \tag{6.8}$$

Diese gekoppelten Gleichungen für die Biegeschwingungen einer *scherenden rechteckigen* „Teilchen-Membrane“ werden im Grenzfall $D \to 0$ eine spezielle Integrodifferentialgleichung, wie noch gezeigt werden soll.

Jetzt wollen wir die obigen Gleichungen auf genau 2 wechselwirkende Teilchenringe spezialisieren. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen alle Teilchen mit Index $(j_1, 0)$ in radialer Richtung genau nebeneinander liegen. Nun betrachten wir die Wechselwirkung der Teilchenketten $j_1 = 0$ mit dem nächsten *äußeren* Partner $j_1 = 1$. Mit der Schergeschwindigkeit

$$v = \frac{3}{2}\,\Omega\, D \tag{6.9}$$

der beiden Teilchenringe zueinander gilt dann

$$\begin{aligned}\ddot{z}_{0,0} + \Omega^2\, z_{0,0} &= G\, m \sum_{j2=1}^{j2=\infty} \frac{z_{0,j_2} - 2 z_{0,0} + z_{0,-j_2}}{(j_2\, d)^3} + \\ & G m \sum_{j_2=-\infty}^{j2=+\infty} \frac{z_{1,j_2} - z_{0,0}}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\, d - v\, t)^2}\right)^3}.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Tritt derselbe Teilchenring mit einem *inneren Ring* mit Index $j_1 = -1$ in Wechselwirkung, so gilt stattdessen

$$\begin{aligned}\ddot{z}_{0,0} + \Omega^2\, z_{0,0} &= G m \sum_{j2=1}^{j2=\infty} \frac{z_{0,j_2} - 2\, z_{0,0} + z_{0,-j_2}}{(j_2\, d)^3} + \\ & G m \sum_{j_2=-\infty}^{j2=+\infty} \frac{z_{-1,j_2} - z_{0,0}}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\, d + v\, t)^2}\right)^3}.\end{aligned}$$

Hier ist die Transformation $v \to -v$ zu erkennen. Ohne Bedenken können wir nun in der letzten Gleichung den ersten Index j_1 um eins erhöhen und erhalten für den zweiten Ring aufgrund der radialen Invarianz die identische Gleichung

$$\begin{aligned}\ddot{z}_{1,0} + \Omega^2\, z_{1,0} &= G m \sum_{j2=1}^{j2=\infty} \frac{z_{1,j_2} - 2\, z_{1,0} + z_{1,-j_2}}{(j_2\, d)^3} + \\ & G m \sum_{j_2=-\infty}^{j2=+\infty} \frac{z_{0,j_2} - z_{1,0}}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\, d + v\, t)^2}\right)^3}.\end{aligned} \tag{6.11}$$

Gleichungen (6.10) und (6.11) sind jetzt die Bewegungsgleichungen der Biegeschwingungen für zwei gekoppelte Teilchenringe. Die erste Summe beschreibt die *Intrawechselwirkung* des Teilchenringes, der zweite Summand die *Interwechselwirkung* zwischen den beiden Teilchenringen.

Um die Gleichungen zu lösen, setzen wir uns zunächst auf den inneren Ring und machen den Ansatz

$$\begin{aligned} z_{0,j_2} &= \mathbf{c_1}\, e^{\imath [k\, j_2\, d - \omega\, t]}, \\ z_{1,j_2} &= \mathbf{c_2}\, e^{\imath [k\, j_2\, d - (\omega + k\, v)\, t]}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Durch diesen Ansatz betrachten wir die „Wellenbewegung“ in den beiden Teilchenketten vom Standpunkt der inneren Teilchenkette aus. Dies wäre dann auch das korotierende Referenzsystem. Durch Einsetzen erhalten wir für die innerer erste Teilchenkette die Normalgleichungen

$$\mathbf{c_1}\left\{-\omega^2+\Omega^2+2\frac{G\,m}{d^3}\sum_{j_2=1}^{\infty}\frac{1-\cos[k\,j_2\,d]}{j_2^3}\right\}+$$

$$\mathbf{c_1}\left\{\sum_{j_2=-\infty}^{j2=+\infty}\frac{G\,m}{\left(\sqrt{D^2+(j_2\,d-v\,t)^2}\right)^3}\right\}+$$

$$\mathbf{c_2}\left\{-\sum_{j_2=-\infty}^{j2=+\infty}\frac{G\,m\,e^{\imath\,k(j_2\,d-v\,t)}}{\left(\sqrt{D^2+(j_2\,d-v\,t)^2}\right)^3}\right\}=0$$

Die letzten beiden Summen sind für den Falle $D\sim d$ im hohen Maße zeitunabhängig und können sehr genau durch Integrale der Form

$$\frac{G\,m}{d}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{\left(D^2+u^2\right)^{3/2}}=2\,\frac{Gm}{d\,D^2}$$

sowie

$$\frac{G\,m}{d}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\imath\,k\,u}\,du}{\left(D^2+u^2\right)^{3/2}}=2\,\frac{Gm}{d\,D^2}\,kD\,\mathbf{K}_1[kD],$$

dargestellt werden. $\mathbf{K}_1[kD]$ ist eine modifizierte Besselfunktion vom Argument kD. Die Normalgleichung des inneren Ringes lautet somit endgültig

$$\mathbf{c_1}\left\{-\omega^2+\Omega^2+\frac{G\,m}{d^3}\,\mathbf{S}[kd]+2\,\frac{Gm}{d\,D^2}\right\}$$
$$\mathbf{c_2}\left\{-2\,\frac{Gm}{d\,D^2}\,kD\,\mathbf{K}_1[kD]\right\}=0. \tag{6.13}$$

Die Normalgleichung für den äußeren Ring erhält man durch Vertauschen der Konstanten $\mathbf{c_1}$ und $\mathbf{c_2}$ und der Transformation $\omega\to\omega+k\,v$. Man

erhält so entsprechend

$$\mathbf{c_2}\left\{-\left(\omega+k\,v\right)^2+\Omega^2+\frac{G\,m}{d^3}\,\mathbf{S}[kd]+2\,\frac{Gm}{d\,D^2}\right\}$$
$$\mathbf{c_1}\left\{-2\,\frac{Gm}{d\,D^2}\,kD\,\mathbf{K}_1[kD]\right\}=0. \tag{6.14}$$

Aus beiden gekoppelten Gleichungen folgt eine Dispersionsrelation vierten Grades in ω für vier unterschiedliche Arten von Biegewellen.

6.2 Dichtewellen zweier Teilchenringe

Wesentlich schwieriger als das Verhalten der stets stabilen Biegewellen ist die Struktur und das Instabilitätsverhalten der Dichtewellen in einem gekoppelten Zweiringsystem zu verstehen. Hier bewegen sich die Teilchen nur in der x-y Äquatorebene des Planeten. Auf dem gleichen rechteckigen orthogonalen Netz mit der radialen Gitterkonstanten D und der tangentialen Gitterkonstanten d lauten dann die Bewegungsgleichungen für das Teilchen mit Index $(0,0)$, zunächst wieder **ohne Scherströmung**,

$$\ddot{x}_{0,0}-2\,\Omega\dot{y}_{0,0}-3\,\Omega^2\,x_{0,0}=G\,m\,\sum_{j_1,j_2}{}'\,\frac{j_1\,D}{[(j_1\,D)^2+(j_2\,d)^2]^{3/2}}+$$
$$+G\,m\,\sum_{j_1,j_2}{}'\,\frac{-2\,(j_1\,D)^2+(j_2\,d)^2}{[(j_1\,D)^2+(j_2\,d)^2]^{5/2}}\,\left(x_{j_1,j_2}-x_{0,0}\right)$$
$$-G\,m\,\sum_{j_1,j_2}{}'\,\frac{3\,D\,j_1\,j_2}{[(j_1\,D)^2+(j_2\,d)^2]^{5/2}}\,\left(y_{j_1,j_2}-y_{0,0}\right),$$

und

$$\ddot{y}_{0,0} + 2\,\Omega \dot{x}_{0,0} = G\,m \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{j_2\,d}{[(j_1\,D)^2 + (j_2\,d)^2]^{3/2}}$$

$$+G\,m \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{-2\,(j_2\,d)^2 + (j_1\,D)^2}{\left(\sqrt{(j_1\,D)^2 + (j_2\,d)^2}\right)^5}\,(y_{j_1,j_2} - y_{0,0})$$

$$-G\,m \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{3\,d\,D\,j_1\,j_2}{\left(\sqrt{(j_1\,D)^2 + (j_2\,d)^2}\right)^5}\,(x_{j_1,j_2} - x_{0,0})\,.$$

Mit Scherströmung lauten diese unendlich gekoppelten Gleichungen erweitert

$$\ddot{x}_{0,0} - 2\Omega\,\dot{y}_{0,0} - 3\,\Omega^2\,x_{0,0} =$$

$$+G\,m \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{j_1\,D}{[(j_1\,D)^2 + (j_2\,d - \frac{3}{2}\,j_1\Omega\,D\,t)^2]^{3/2}} +$$

$$+G\,m \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{-2\,(j_1\,D)^2 + (j_2\,d - \frac{3}{2}\,j_1\Omega\,D\,t)^2}{\left(\sqrt{(j_1\,D)^2 + (j_2\,d - \frac{3}{2}\,j_1\Omega\,D\,t)^2}\right)^5}\,(x_{j_1,j_2} - x_{0,0})$$

$$-G\,m \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{3\,D\,j_1\,(j_2\,d - \frac{3}{2}\,j_1\Omega\,D\,t)}{\left(\sqrt{(j_1\,D)^2 + (j_2\,d - \frac{3}{2}\,j_1\Omega\,D\,t)^2}\right)^5}\,(y_{j_1,j_2} - y_{0,0})\,,$$

sowie

$$\ddot{y}_{0,0} + 2\,\Omega\,\dot{x}_{0,0} =$$

$$+G\,m \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{j_2\,d}{[(j_1\,D)^2 + (j_2\,d - \frac{3}{2}\,j_1\Omega\,D\,t)^2]^{3/2}}$$

$$+G\,m \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{-2(j_2\,d - \frac{3}{2}\,j_1\Omega\,D\,t)^2 + (j_1\,D)^2}{\left(\sqrt{(j_1\,D)^2 + (j_2\,d - \frac{3}{2}\,j_1\Omega\,D\,t)^2}\right)^5}\,(y_{j_1,j_2} - y_{0,0})$$

$$-G\,m \sum_{j_1,j_2}{}' \frac{3\,D\,j_1\,(j_2\,d - \frac{3}{2}\,j_1\Omega\,D\,t)}{\left(\sqrt{(j_1\,D)^2 + (j_2\,d - \frac{3}{2}\,j_1\Omega\,D\,t)^2}\right)^5}\,(x_{j_1,j_2} - x_{0,0})$$

Berücksichtigt man hier bei der radialen Summation über j_1 nur den Term mit $j_1 = 0$, so erhält man wieder die zwei Bewegungsgleichungen einer einzigen *Maxwellschen Kette*.

Im nächsten Schritt betrachten wir wieder zwei isolierte Teilchenringe mit Scherströmung im Abstand D. Zunächst betrachten wir nur die Wechselwirkung der Teilchenkette $j_1 = 0$ mit der äußeren Teilchenkette $j_1 = 1$. Aus den obigen Gleichungen erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_{0,0} - 2\,\Omega\,\dot{y}_{0,0} - 3\,\Omega^2\,x_{0,0} = \\
&+\frac{G\,m}{d^3}\sum_{j2=1}^{\infty}\frac{x_{0,+j_2} - 2\,x_{0,0} + x_{0,-j_2}}{j_2^3} + \\
&+G\,m\sum_{j_2=-\infty}^{+\infty}\frac{-2\,D^2 + (j_2\,d - v\,t)^2}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d - v\,t)^2}\right)^5}\,(x_{1,j_2} - x_{0,0}) - \\
&-G\,m\sum_{j_2=-\infty}^{+\infty}\frac{3\,D\,(j_2\,d - v\,t)}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d - v\,t)^2}\right)^5}\,(y_{1,j_2} - y_{0,0}))\,, \qquad (6.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\ddot{y}_{0,0} + 2\,\Omega\,\dot{x}_{0,0} = \\
&-2\,\frac{G\,m}{d^3}\sum_{j2=1}^{\infty}\frac{y_{0,+j_2} - 2\,y_{0,0} + y_{0,-j_2}}{j_2^3} \\
&+G\,m\sum_{j_2=-\infty}^{+\infty}\frac{-2\,(j_2\,d - v\,t)^2 + D^2}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d - v\,t)^2}\right)^5}\,(y_{1,j_2} - y_{0,0}) \\
&-G\,m\sum_{j_2=-\infty}^{+\infty}\frac{3\,D\,(j_2\,d - v\,t)}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d - v\,t)^2}\right)^5}\,(x_{1,j_2} - x_{0,0}) \qquad (6.16)
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt betrachten wir *spiegelbildlich* die Wechselwirkung der ruhenden Teilchenkette $j_1 = 0$ mit dem nächsten inneren Nachbarn

$j_1 = -1$. Für diesen Fall folgt aus den obigen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_{0,0} - 2\,\Omega\,\dot{y}_{0,0} - 3\,\Omega^2\,x_{0,0} = \\
&+\frac{G\,m}{d^3}\sum_{j2=1}^{\infty}\frac{x_{0,+j_2} - 2\,x_{0,0} + x_{0,-j_2}}{j_2^3} + \\
&+G\,m\sum_{j_2=-\infty}^{+\infty}\frac{-2\,D^2 + (j_2\,d + v\,t)^2}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d + v\,t)^2}\right)^5}\,(x_{-1,j_2} - x_{0,0}) \\
&+G\,m\sum_{j_2=-\infty}^{+\infty}\frac{3\,D\,(j_2\,d + v\,t)}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d + v\,t)^2}\right)^5}\,(y_{-1,j_2} - y_{0,0}))\,, \\
&\ddot{y}_{0,0} + 2\,\Omega\,\dot{x}_{0,0} = \\
&-2\,\frac{G\,m}{d^3}\sum_{j2=1}^{\infty}\frac{y_{0,+j_2} - 2\,y_{0,0} + y_{0,-j_2}}{j_2^3} \\
&+G\,m\sum_{j_2=-\infty}^{+\infty}\frac{-2\,(j_2\,d + v\,t)^2 + D^2}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d + v\,t)^2}\right)^5}\,(y_{-1,j_2} - y_{0,0}) \\
&+G\,m\sum_{j_2=-\infty}^{+\infty}\frac{3\,D\,(j_2\,d + v\,t)}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d + v\,t)^2}\right)^5}\,(x_{-1,j_2} - x_{0,0})
\end{aligned}
$$

Durch die Translation $j_1 \to j_1 + 1$ erhalten wir schließlich die beiden

Bewegungsgleichungen des äußeren Teilchenringes zu

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_{1,0} - 2\,\Omega\,\dot{y}_{1,0} - 3\,\Omega^2\,x_{1,0} = \\
&+\frac{G\,m}{d^3}\sum_{j2=1}^{\infty}\frac{x_{1,+j_2} - 2\,x_{1,0} + x_{1,-j_2}}{j_2^3} + \\
&+G\,m\sum_{j_2=-\infty}^{+\infty}\frac{-2\,D^2 + (j_2\,d + v\,t)^2}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d + v\,t)^2}\right)^5}\,(x_{0,j_2} - x_{1,0}) \\
&+G\,m\sum_{j_2=-\infty}^{+\infty}\frac{3\,D\,(j_2\,d + v\,t)}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d + v\,t)^2}\right)^5}\,(y_{0,j_2} - y_{1,0}))\,, \qquad (6.17) \\
&\ddot{y}_{1,0} + 2\,\Omega\,\dot{x}_{1,0} = \\
&-2\,\frac{G\,m}{d^3}\sum_{j2=1}^{\infty}\frac{y_{1,+j_2} - 2\,y_{1,0} + y_{1,-j_2}}{j_2^3} \\
&+G\,m\sum_{j_2=-\infty}^{+\infty}\frac{-2\,(j_2\,d + v\,t)^2 + D^2}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d + v\,t)^2}\right)^5}\,(y_{0,j_2} - y_{1,0}) \\
&+G\,m\sum_{j_2=-\infty}^{+\infty}\frac{3\,D\,(j_2\,d + v\,t)}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d + v\,t)^2}\right)^5}\,(x_{0,j_2} - x_{1,0}) \qquad (6.18)
\end{aligned}
$$

Die vier gekoppelten Gleichungen (6.15,6.16), 6.17) und (6.18) bestimmen vollständig die Wellenmechanik von zwei gravitativ gekoppelten Teilchenringen.

Um sie zu lösen, gehen wir wieder in das Referenzsystem des inneren Ringes und machen mit den komplexen Konstanten $\mathbf{a_1}, \mathbf{b_1}$ und $\mathbf{a_2}, \mathbf{b_2}$ den Wellenansatz

$$
\begin{aligned}
x(0, j_2) &= \mathbf{a_1}\,e^{\imath[k\,j_2\,d - \omega\,t]}, \\
y(0, j_2) &= \mathbf{b_1}\,e^{\imath[k\,j_2\,d - \omega\,t]}, \\
x(1, j_2) &= \mathbf{a_2}\,e^{\imath[k\,j_2\,d - (\omega + k\,v)\,t]}, \\
y(1, j_2) &= \mathbf{b_2}\,e^{\imath[k\,j_2\,d - (\omega + k\,v)\,t]}. \qquad (6.19)
\end{aligned}
$$

Die Phasengeschwindigkeit $v_p = \omega/k$ der so betrachten Wellen bezieht sich hier im Scherströmungsfeld auf die Position des inneren der beiden

Teilchenfäden. Die Wellenzahl k ist die tangentiale Wellenzahl längs der beiden Punktmassenketten. Mit dem obigen Wellenansatz wird also eine *Wellenmode* mit der tangentialen Wellenzahl k gesucht, die bis auf eine zeitlich konstante Phasenverschiebung *gleichzeitig* durch beide Teilchenketten läuft. Obwohl nur zwei Teilchenketten vorliegen, könnte man hier schon von einer *spiralförmigen Dichtewellenmode* sprechen, wenn es eine kleine Phasenverschiebung zwischen den beiden komplexen Konstanten $\mathbf{a_1}$ und $\mathbf{a_2}$ oder auch $\mathbf{b_1}$ und $\mathbf{b_2}$ gibt.

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \omega_-(k) &= \omega, \\ \omega_+(k) &= \omega + k\,v, \end{aligned} \tag{6.20}$$

wo v die Schergeschwindigkeit der Teilchenketten gegeneinander bedeutet, führt der obige Wellenansatz mit den Bewegungsgleichungen zu den vier Bedingungen

$$\begin{aligned} &\left(-\omega_-^2 - 3\Omega^2 + \frac{Gm}{d^3}\mathbf{S}[kd]) + Gm\sum_{j_2=-\infty}^{j_2=+\infty}\frac{-2D^2 + (j_2\,d - v\,t)^2}{(D^2 + (j_2\,d - v\,t)^2)^{5/2}}\right)\mathbf{a_1} + \\ &\left(2\,\imath\,\Omega\,\omega_- - G\,m\sum_{j_2=-\infty}^{j_2=+\infty}\frac{3\,D(j_2\,d - v\,t)}{(D^2 + (j_2\,d - v\,t)^2)^{5/2}}\right)\mathbf{b_1} + \\ &\left(-G\,m\sum_{j_2=-\infty}^{j_2=+\infty}\frac{-2\,D^2 + (j_2\,d - v\,t)^2}{(D^2 + (j_2\,d - v\,t)^2)^{5/2}}\,e^{\imath\,k\,(j_2\,d - v\,t)}\right)\mathbf{a_2} + \\ &\left(G\,m\sum_{j_2=-\infty}^{j_2=+\infty}\frac{3\,D\,(j_2\,d - v\,t)}{(D^2 + (j_2\,d - v\,t)^2)^{5/2}}\,e^{\imath\,k\,(j_2\,d - v\,t)}\right)\mathbf{b_2} = 0. \end{aligned}$$

Die unendlichen Summen über j_2 sind zeitlich fast konstant. Mit Hilfe der POISSON'schen Summationsformel lässt sich zeigen, dass diese Summen durch ein Integral approximiert werden können, während die Korrektur eine hochfrequente Schwingung (Frequenz ein vielfaches von $3\pi\,\Omega\,D/d$)

mit exponentiell kleiner Amplitude darstellt. Also gilt im zeitlichen Mittel

$$\left(-\omega_-^2 - 3\Omega^2 + \frac{Gm_0}{d^3}\,\mathbf{S}[k\,a] + \frac{Gm_0}{d}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-2\,D^2+u^2}{\left(D^2+u^2\right)^{5/2}}\,du\right)\mathbf{a_1} +$$
$$\left(2\,\imath\,\Omega\,\omega_- - \frac{Gm_0}{d}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\,D\,u}{\left(\sqrt{D^2+u^2}\right)^5}\,du\right)\mathbf{b_1} +$$
$$\left(-\frac{Gm_0}{d}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-2\,D^2+u^2}{\left(D^2+u^2\right)^{5/2}}\,e^{\imath\,k\,u}\,du\right)\mathbf{a_2} +$$
$$\left(\frac{Gm_0}{d}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\,D\,u}{\left(D^2+u^2\right)^{5/2}}\,e^{\imath\,k\,u}\,du\right)\mathbf{b_2} = 0.$$

Die Integrale können durch modifizierte Besselfunktionen der Form $\mathbf{K}_n[k\,D]$ dargestellt werden. Man erhält so die erste Bedingung

$$\left\{-(\omega - \frac{1}{2}k\,v)^2 - 3\Omega^2 + \frac{Gm_0}{d^3}\,\mathbf{S}[kd] - \frac{2Gm_0}{d\,D^2}\right\}\mathbf{a_1}$$
$$+\left\{2\,\Omega\,(\omega - \frac{1}{2}\,k\,v)\right\}\imath\,\mathbf{b_1} +$$
$$\left\{\frac{2\,Gm_0}{d\,D^2}\,\left((kD)^2\,\mathbf{K_0}[kD] + kD\,\mathbf{K_1}[kD]\right)\right\}\mathbf{a_2}$$
$$+\left\{\frac{2\,Gm_0}{d\,D^2}\,(kD)^2\,\mathbf{K_1}[kD]\right\}\imath\,\mathbf{b_2} = 0. \qquad (6.21)$$

Für die y - Bewegung des inneren Teilchenringes erhält man zunächst

$$\left\{-2\,\imath\,\Omega\,\omega_- - \frac{Gm_0}{d}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\,D\,u}{\left(D^2+u^2\right)^{5/2}}\,du\right\}\mathbf{a_1} +$$

$$\left\{-\omega_-^2 - \frac{2Gm_0}{d^3}\,\mathbf{S}[k\,d] + \frac{Gm_0}{d}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{D^2-2\,u^2}{\left(D^2+u^2\right)^{5/2}}\,du\right\}\mathbf{b_1} +$$

$$\left\{\frac{Gm_0}{d}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\,D\,u}{\left(D^2+u^2\right)^{5/2}}\,e^{\imath\,k\,u}\,du\right\}\mathbf{a_2} +$$

$$\left\{-\frac{Gm_0}{d}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{D^2-2\,u^2}{\left(D^2+u^2\right)^{5/2}}\,e^{\imath\,k\,u}\,du\right\}\mathbf{b_2} = 0.$$

Die Integrale können im Allgemeinen wieder auf modifizierte Besselfunktionen zurückgeführt werden und es gilt die zweite Bedingungsgleichung

$$\left\{2\Omega\,(\omega - \frac{1}{2}\,k\,v)\right\}\mathbf{a_1} +$$

$$\left\{-(\omega - \frac{1}{2}\,k\,v)^2 - \frac{2Gm_0}{d^3}\mathbf{S}[kd]\right\}\imath\,\mathbf{b_1} +$$

$$\left\{-\frac{2Gm_0}{d\,D^2}\,(kD)^2\,\mathbf{K_1}[kD]\right\}\mathbf{a_2} +$$

$$\left\{-\frac{2Gm_0}{d\,D^2}\,(kD)^2\,\mathbf{K_0}[kD]\right\}\imath\,\mathbf{b_2} = 0. \tag{6.22}$$

Die beiden anderen Bedingungsgleichungen für den äußeren Ring können offenbar dadurch gewonnen werden, indem man $\mathbf{a_1}, \mathbf{b_1}$ mit $\mathbf{a_2}, \mathbf{b_2}$ vertauscht und rein formal den Wellenvektor $k \to -k$ transformiert. Auf diese

Weise erhält man für den äußeren Ring die beiden Bedingungsgleichungen

$$\left\{\frac{2Gm_0}{d\,D^2}\,\left((kD)^2\,\mathbf{K_0}[kD]+kD\,\mathbf{K_1}[kD]\right)\right\}\,\mathbf{a_1}+$$
$$\left\{-\frac{2Gm_0}{d\,D^2}\,(kD)^2\,\mathbf{K_1}[kD]\right\}\,\imath\,\mathbf{b_1}+$$
$$\left\{-\left(\omega+\frac{1}{2}\,k\,v\right)^2-3\Omega^2+\frac{Gm_0}{d^3}\,\mathbf{S}[kd]-\frac{2Gm_0}{d\,D^2}\right\}\,\mathbf{a_2}+$$
$$\left\{2\,\Omega\,\left(\omega+\frac{1}{2}\,k\,v\right)\right\}\,\imath\,\mathbf{b_2}=0. \tag{6.23}$$

und

$$\left\{\frac{2Gm_0}{d\,D^2}\,(kD)^2\,\mathbf{K_1}[kD]\right\}\,\mathbf{a_1}+$$
$$\left\{-\frac{2Gm_0}{d\,D^2}\,(kD)^2\,\mathbf{K_0}[kD]\right\}\,\imath\,\mathbf{b_1}+$$
$$\left\{2\Omega\,(\omega+\frac{1}{2}\,k\,v)\right\}\,\mathbf{a_2}+$$
$$\left\{-\left(\omega+\frac{1}{2}\,k\,v\right)^2-\frac{2Gm_0}{d^3}\,\mathbf{S}[kd]\right\}\,\imath\,\mathbf{b_2}=0. \tag{6.24}$$

Die vier Bedingungsgleichungen (6.21), (6.22), (6.23) und (6.24) definieren die vollständige Wellenmechanik der beiden Teilchenketten mit Scherströmung. Die vier Bedingungsgleichungen stimmen allerdings im Detail nicht exakt mit denen von Maxwell in seinem Essay von 1857 überein. Siehe hierzu auch die Fußnote in dem Buch *Maxwell on Saturn's Rings* auf Seite 130 ([2]).

Die obigen Bewegungsgleichungen für die x (radial) - und y (tangential) Auslenkungen enthalten je zwei Beschleunigungsterme, die genau der Bemerkung von Maxwell bezüglich der Wechselwirkung von zwei Ringen entsprechen:

- Radial force due to radial displacements.
- Radial force due to tangential displacements.
- Tangential force due to tangential displacements.

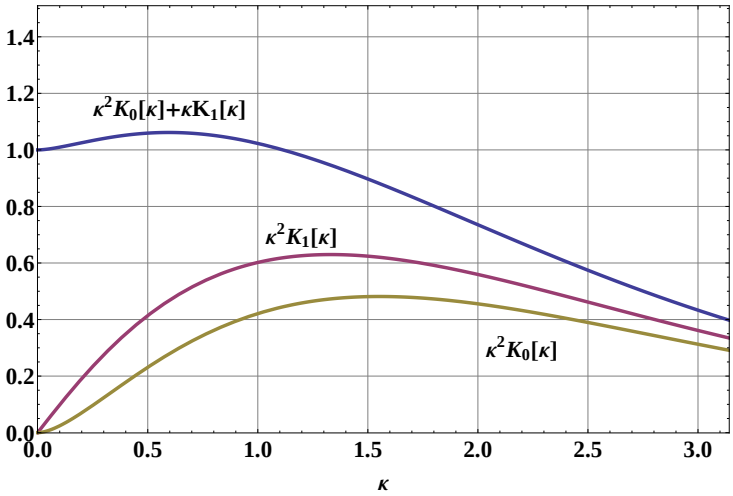

Fig. 6.1: *Die drei wichtigen Funktion für die Wechselwirkung zwischen zwei Ringen als Funktion von $\kappa = k\,D$. Überschreitet das Ringpaar eine kritische Dichte, setzten zwei unterschiedliche Instabilitäten ein, dessen kritische Wellenlänge durch das Maximum der ersten beiden Funktionen gegeben ist.*

- Tangential force due to radial displacements.

Bevor der Fall von unendlich vielen wechselwirkenden Teilchenketten untersucht werden kann, mussl zunächst das Problem von genau *zwei scherenden Teilchenketten* genauer betrachtet werden. Denn nur diesen Fall hat Maxwell 1859 in seinem Essay genauer betrachtet und unvollständig gelöst.

Die gegenseitige Beschleunigung von zwei geraden Punktmassenketten im Abstand a mit der Liniendichte $\tau = m/a$ ist

$$G\,\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{(\sqrt{a^2+s^2})^{3/2}} \equiv \frac{2G\,\tau}{a}. \tag{6.25}$$

Für die Schergeschwindigkeit der beiden Teilchenketten im Abstand a gilt dann genau

$$v = \frac{3}{2}\,\Omega\left(1 - 2\frac{G\varrho}{\Omega^2}\right)\,a, \tag{6.26}$$

wobei zur Abkürzung wieder $\varrho = m/a^3$ gesetzt wurde. Aus der obigen Relation entnimmt man, dass bei $G\varrho/\Omega^2 = 1/2$ die Scherströmung der beiden Materieketten Null wird und sich bei noch größerem Wert sogar umkehrt. Damit eine einzelne Teilchenkette stabil ist, muß dieser Parameter $G\varrho/\Omega^2$ aber kleiner als 10^{-2} sein. Zunächst soll der Korrekturfaktor durch die Selbstgravitation in (8.40) vernachlässigt werden, doch später in der Dispersionsrelation berücksichtigt werden.

6.3 Die jet-stream Hypothese von H. Alfvén

7 Die Mond-Teilchenring Wechselwirkung

Das im vorhergehenden Kapitel behandelte Modell zweier Teilchenringe kann auf den Fall spezialisiert werden, wo ein Teilchenring zu einem einzigen Mond „entartet“. Dabei wird im äußeren oder inneren Ring der Teilchenabstand dem Bahnumfang der Mondbahn gleichgesetzt. Jedes Teilchen in diesem „Mondring“ entspricht dann dem Mond und seinen unendlichen Spiegelbildern, bedingt durch die periodische Randbedingung der geraden Teilchenkette.

Nehmen wir jetzt also an, dass im äußeren Ring der Teilchenabstand die Größe $L \gg d$ hat. Mit den beiden Bewegungsgleichungen des inneren Ringes (6.15) und (6.16) erhalten wir zunächst für ein Teilchen der Marke

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_0 - 2\,\Omega\,\dot{y}_0 - 3\,\Omega^2\,x_0 = \\
&+G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{D}{[D^2 + (j_2\,L - v\,t)^2]^{3/2}} + \\
&+\frac{G\,m}{d^3} \sum_{j2=1}^{\infty} \frac{x_{+j_2} - 2\,x_0 + x_{-j_2}}{j_2^3} + \\
&+G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{-2\,D^2 + (j_2\,L - v\,t)^2}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,L - v\,t)^2}\right)^5}\,(x_s - x_0) - \\
&-G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{3\,D\,(j_2\,L - v\,t)}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,L - v\,t)^2}\right)^5}\,(y_s - y_0))\,, \qquad (7.1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\ddot{y}_0 + 2\,\Omega\,\dot{x}_0 = \\
&+G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \frac{j_2\,L - v\,t}{[D^2 + (j_2\,L - v\,t)^2]^{3/2}} \qquad (7.2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\,\frac{G\,m}{d^3} \sum_{j2=1}^{\infty} \frac{y_{+j_2} - 2\,y_0 + y_{-j_2}}{j_2^3} \\
&+G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{-2\,(j_2\,L - v\,t)^2 + D^2}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,L - v\,t)^2}\right)^5}\,(y_s - y_0) \\
&-G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{3\,D\,(j_2\,L - v\,t)}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,L - v\,t)^2}\right)^5}\,(x_s - x_0) \qquad (7.3)
\end{aligned}
$$

Hier bedeutet m_s die Masse des äußeren Mondes und x_s und y_s die Auslenkungen desselben aus seiner Ruhelage (Kreisbahn). Die Bewe-

gungsgleichung dieses äußeren Mondes lautet dann entsprechend

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_M - 2\,\Omega\,\dot{y}_M - 3\,\Omega^2\,x_s = \\
&+G\,m \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{-2\,D^2 + (j_2\,d + v\,t)^2}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d + v\,t)^2}\right)^5}\,(x_{j_2} - x_s) \\
&+G\,m \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{3\,D\,(j_2\,d + v\,t)}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d + v\,t)^2}\right)^5}\,(y_{j_2} - y_s))\,, \qquad (7.4) \\
&\ddot{y}_M + 2\,\Omega\,\dot{x}_M = \\
&+G\,m \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{-2\,(j_2\,d + v\,t)^2 + D^2}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d + v\,t)^2}\right)^5}\,(y_{j_2} - y_s) \\
&+G\,m \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{3\,D\,(j_2\,d + v\,t)}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,d + v\,t)^2}\right)^5}\,(x_{j_2} - x_s) \qquad (7.5)
\end{aligned}
$$

In diesen gekoppelten Gleichungen zwischen Ring und Mond wollen wir nun die Wechselwirkung *zwischen den einzelnen Ringteilchen* vernachlässigen, da sie für die angeregten **g-Moden** nur eine untergeordnete Rolle

spielt. Anstatt (7.1) und (7.3) betrachten wir also nur noch

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_0 - 2\,\Omega\,\dot{y}_0 - 3\,\Omega^2\,x_0 = \\
&+G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{D}{[D^2 + (j_2\,L - v\,t)^2]^{3/2}} + \\
&+G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{-2\,D^2 + (j_2\,L - v\,t)^2}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,L - v\,t)^2}\right)^5}\,(x_s - x_0) - \\
&-G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{3\,D\,(j_2\,L - v\,t)}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,L - v\,t)^2}\right)^5}\,(y_s - y_0))\,, \qquad (7.6) \\
&\ddot{y}_0 + 2\,\Omega\,\dot{x}_0 = \\
&+G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \frac{j_2\,L - v\,t}{[D^2 + (j_2\,L - v\,t)^2]^{3/2}} \\
&+G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{-2\,(j_2\,L - v\,t)^2 + D^2}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,L - v\,t)^2}\right)^5}\,(y_s - y_0) \\
&-G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{3\,D\,(j_2\,L - v\,t)}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,L - v\,t)^2}\right)^5}\,(x_s - x_0)\,. \qquad (7.7)
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung gilt in der Kette nur für das Teilchen der Marke $n = 0$, welches zum Zeitpunkt $t = 0$ in Konjunktion zum äußeren Mond befindet.

Für ein beliebiges Teilchen der Marke j gilt somit erweitert

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_j - 2\,\Omega\,\dot{y}_j - 3\,\Omega^2\,x_j = \\
&+G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{D}{[D^2 + (j_2\,L - j\,d - v\,t)^2]^{3/2}} + \\
&+G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{-2\,D^2 + (j_2\,L - j\,d - v\,t)^2}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,L - j\,d - v\,t)^2}\right)^5}\,(x_s - x_j) - \\
&-G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{3\,D\,(j_2\,L - j\,d - v\,t)}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,L - j\,d - v\,t)^2}\right)^5}\,(y_s - y_j))\,, \qquad (7.8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\ddot{y}_j + 2\,\Omega\,\dot{x}_j = \\
&+G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \frac{j_2\,L - j\,d - v\,t}{[D^2 + (j_2\,L - j\,d - v\,t)^2]^{3/2}} \\
&+G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{-2\,(j_2\,L - j\,d - v\,t)^2 + D^2}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,L - j\,d - v\,t)^2}\right)^5}\,(y_s - y_j) \\
&-G\,m_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{3\,D\,(j_2\,L - j\,d - v\,t)}{\left(\sqrt{D^2 + (j_2\,L - j\,d - v\,t)^2}\right)^5}\,(x_s - x_j)\,. \qquad (7.9)
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen sind fundamental für die angeregten Wellen, die durch die gravitative Störung eines nahen Mondes der Masse m_s entstehen. Der erste Term auf der rechten Seite der beiden Gleichungen stellt die Störungen *erster Ordnung* dar, die nicht durch eine exzentrische Bewegung des Mondes entstehen. Für diese Störungen gilt also vereinfacht

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_j - 2\,\Omega\,\dot{y}_j - 3\,\Omega^2\,x_j = \\
&+Gm_s \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} \frac{D}{[D^2 + (j_2\,L - j\,d - v\,t)^2]^{3/2}}, \qquad (7.10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\ddot{y}_j + 2\,\Omega\,\dot{x}_j = \\
&+Gm_s \sum_{j_2=-\infty}^{\infty} \frac{j_2\,L - j\,d - v\,t}{[D^2 + (j_2\,L - j\,d - v\,t)^2]^{3/2}}. \qquad (7.11)
\end{aligned}
$$

Die Störbeschleunigungen können wir in eine Fourierreihe entwickeln und erhalten

$$\ddot{x}_j - 2\,\Omega\,\dot{y}_j - 3\,\Omega^2\,x_j = \\ +\frac{8\,\pi\,G m_s}{L^2}\sum_{n=1}^{n=\infty} n\,\mathbf{K_1}\left[2\,\pi\,n\,\frac{D}{L}\right]\,\cos\left[2\,\pi\,n\,\frac{v\,t + j\,d}{L}\right], \quad (7.12)$$

$$\ddot{y}_j + 2\,\Omega\,\dot{x}_j = \\ -\frac{8\,\pi\,G m_s}{L^2}\sum_{n=1}^{n=\infty} n\,\mathbf{K_0}\left[2\,\pi\,n\,\frac{D}{L}\right]\,\sin\left[2\,\pi\,n\,\frac{v\,t + j\,d}{L}\right]. \quad (7.13)$$

Mit der Abkürzungen

$$\lambda = \frac{L}{3\pi D}, \qquad \Omega^2 = \frac{GM}{R^3}, \quad (7.14)$$

wobei M die Masse des Planeten und R den Ringradius bezeichnet, lautet die partikuläre Lösung der obigen Gleichungen

$$\frac{x_j[t]}{D} = -\mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,\lambda\,\mathbf{K_0}\left[\frac{2n}{3\lambda}\right] + n\,\mathbf{K_1}\left[\frac{2n}{3\lambda}\right]}{n^2 - \lambda^2}\,\cos\left[2\pi\,n\frac{v\,t + j\,d}{L}\right],$$

sowie

$$\frac{y_j[t]}{D} = +\mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2 + 3\,\lambda^2)\,\mathbf{K_0}\left[\frac{2n}{3\lambda}\right] + 2\,n\,\lambda\,\mathbf{K_1}\left[\frac{2n}{3\lambda}\right]}{n\,(n^2 - \lambda^2)}\,\sin\left[2\pi\,n\frac{v\,t + j\,d}{L}\right].$$

Die dimensionslose Konstante μ ist dabei

$$\mu = \frac{8}{9\pi}\frac{m_s}{M}\left(\frac{R}{D}\right)^3. \quad (7.15)$$

Damit ist der *Response* des Teilchenringes auf Störungen eines Mondes der Masse m_s in einer benachbarten Kreisbahn bekannt. Für die Struktur der Störung ist die Zeitabhängigkeit von untergeordneter Bedeutung, da diese mit dem Mond immer in Phase ist. Wir können daher in den obigen Formeln $t = 0$ setzen, da sich dann die zu diesem Zeitpunkt eingefrorene Wellenstruktur mit dem Mond durch den Ring in Phase mitbewegt. Für die Wellenstruktur dieses *moon wavelet* ergibt sich so mit $u = j\,d/L$

$$\frac{x[u]}{D} = -\mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\,\lambda\,\mathbf{K_0}\left[\frac{2n}{3\lambda}\right] + n\,\mathbf{K_1}\left[\frac{2n}{3\lambda}\right]}{n^2 - \lambda^2}\,\cos\left[2\pi nu\right], \quad (7.16)$$

sowie

$$\frac{y[u]}{D} = +\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3\lambda^2)\,\mathbf{K_0}\left[\frac{2n}{3\lambda}\right] + 2\,n\,\lambda\,\mathbf{K_1}\left[\frac{2n}{3\lambda}\right]}{n\,(n^2-\lambda^2)}\,\sin\left[2\pi n u\right]. \quad (7.17)$$

Die räumliche Variable u ist auf das Intervall $u \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ eingeschränkt, wobei $u = 0$ die Position des Mondes markiert. Aufgrund der so abgeleiteten Formeln ist klar, dass die Struktur des *moon wavelets* in der Teilchenkette nur vom Parameter $\lambda \equiv L/(3\pi D)$ abhängt.

Da λ ein sehr großer Parameter ungleich einer ganzen Zahl ist, nähern sich die obigen Summen einem *Kontourintegral* längs der reellen Achse mit einer *Polstelle* bei $n \to \lambda$ und in (7.17) auch einer Polstelle bei $n \to 0$ an. Asymptotisch erhalten wir so für $x[u]$ den asymptotischen Ausdruck

$$\frac{x[u]}{D} \sim -\frac{1}{2}\left(2\,\mathbf{K_0}\left[\tfrac{2}{3}\right] + \mathbf{K_1}\left[\tfrac{2}{3}\right]\right)\,\mu\,\Re\left\{\mathbf{L}[u,1,-\lambda]\right\}. \quad (7.18)$$

Dabei gilt ganz allgemein für die Lerchsche Zeta-Funktion

$$\mathbf{L}[u,s,\alpha] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi\imath n\,u}}{(n+\alpha)^s} \quad (7.19)$$

Die charakteristische Wellenlänge der stärksten Störung im Ring beträgt $\lambda_m \sim 3\,\pi\,D$, also fast das zehnfache vom Abstand des Mondes zum Teilchenring. Analog erhalten wir für die kleinen Auslenkungen in y -Richtung asymptotisch

$$\begin{aligned}\frac{y[u]}{D} \quad \sim \quad & 3\,(-C + \log[3\,e\,\lambda])\,\mu\,\Im\left\{\log\left[1-e^{2\pi\imath u}\right]\right\} + \\ & + \left(2\,\mathbf{K_0}\left[\tfrac{2}{3}\right] + \mathbf{K_1}\left[\tfrac{2}{3}\right]\right)\,\mu\,\Im\left\{\mathbf{L}[u,1,-\lambda]\right\}.\end{aligned} \quad (7.20)$$

Hier bedeutet C die *Eulersche Konstante*. Der erste resonante Pol-Term in (7.20) gehört der **p-Mode** im Teilchenring an, obwohl durch diese Anregung noch keine *Ringbögen* wie im Adams Ring von Neptun erklären können. Der zweite Term ist wieder der resonante Pol-Beitrag der normalen **g-Mode**.

8 Hydrodynamische Modelle

...But when we contemplate the Rings from a purely scientific point of view, they become the most remarkable bodies in the heavens, except, perhaps, those still less useful bodies - the spiral nebulae...

J.C. Maxwell, 1859

Ein Hauptergebnis der wechselwirkenden Teilchenketten war die Tatsache, daß bei bestimmten Wellenzahlen *Wellen - Wellen Resonanzen* auftreten, welche nichtradiale Strukturen in der Ringscheibe ausbilden. Häufige Kollisionen auch zwischen großen Teilchen (Agglomeraten) sind dann unvermeidlich. Das *stoß-freie* Oszillatormodell verliert so seine mikrophysikalische Gültigkeit und muss durch ein anderes idealisierendes Modell ersetzt werden. Die einfachste Vorstellung ist sicherlich die einer dünnen *inkompressiblen Flüssigkeitsschicht* mit Scherströmung, welche der Corioliskraft und ihrer eigenen Gravitation ausgesetzt ist. Einzelne Teilchen sind in diesem Bild nicht mehr aufgelöst und verschwimmen in einem *hydrodynamischen inkompressiblen und auch kompressiblen Kontinuum.* Besonders wichtig ist dann die Frage, welche Instabilität der Scherströmung in diesem Modell auftreten kann und ob diese Strukturbildung beobachtbar ist.

8.1 Rein radiale Wellenstörungen

Wir modellieren jetzt einen lokalen Ausschnitt eines Planetenringes als eine scherende *inkompressible Flüssigkeitsschicht* („shearing sheet“) der Dicke h. In ersten Ansätzen hat dies schon J.C. Maxwell 1856 durchgerechnet. Wir führen dazu ein lokales Koordinatensystem ein, dessen x - Achse nach außen und dessen y - Achse in Richtung der Rotation zeigt. Das

System rotiere lokal mit der Winkelgeschwindigkeit Ω (Keplerfrequenz) gegen den Uhrzeigersinn um den Zentralkörper. Für die Rotationskurve des Planetenringes nehmen wir das Kepler'sche Gesetz $\Omega(R) \propto R^{-3/2}$ an. Im Rahmen der *Hill'schen Approximation* gelten dann im lokalen mitrotierenden System die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \circ \nabla)\, \mathbf{v} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} = 3\Omega^2 \mathbf{e}_x\, x - \frac{1}{\varrho} \nabla P + \nabla \Phi. \tag{8.1}$$

Dabei bedeutet ϱ hier jetzt die *konstante* Dichte der inkompressiblen Flüssigkeit, P ihr innerer Druck und Φ das äußere Gravitationspotential. Der Einheitsvektor $\mathbf{e}_x$ zeigt radial nach außen, während der Vektor $\mathbf{\Omega}$ senkrecht aus der Zeichenebene zeigt. Da die Flüssigkeit inkompressibel sein soll, gilt zusätzlich

$$\nabla \circ \mathbf{v} = 0. \tag{8.2}$$

Die obigen Gleichungen besitzen als Gleichgewichtslösung das lineare Schergeschwindigkeitsfeld $v_y = -3\Omega/2\, x$. Dieses Scherfeld linearisieren wir nun durch die sehr kleinen Geschwindigkeitskomponenten u_x, u_y, u_z in der Form

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ -\frac{3}{2}\Omega\, x + u_y \\ u_z \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

Wir spezialisieren jetzt auf *rein radiale* Störungen der Scherströmung, setzten also alle Ableitungen nach der Variablen y Null. Damit erhalten wir das vereinfachte linearisierte System

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} - 2\,\Omega\, u_y &= \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\Omega\, u_x &= 0, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} &= \frac{\partial \Pi}{\partial z}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Hinzu kommt noch die Bedingung der Inkompressibilität

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \tag{8.5}$$

Die Größe Π bezeichnet jetzt die Variation

$$\Pi = \delta\Phi - \frac{1}{\varrho}\, \delta P. \tag{8.6}$$

Die Dicke der inkompressiblen scherenden Flüssigkeitsschicht sei h, die Mittelebene der Schicht bei $z = 0$. An der oberen wie an der unteren Grenzfläche soll sich jetzt das Verhalten einer kleinen Störung der Form

$$z = \pm \frac{h}{2} \left(1 + \epsilon \cdot \, e^{\imath\,(k\,x + \omega\,t)} + \ldots\right) \tag{8.7}$$

untersucht werden, wo ϵ eine sehr kleine dimensionslose Größe bezeichnet. Alle linearisierten Größen werden dann eine raumzeitliche Abhängigkeit der Form

$$e^{\kappa\,z} \; e^{\imath\,(k\,x + \omega\,t)} \tag{8.8}$$

annehmen. k ist hier die aufgeprägte radiale Wellenzahl, ω die noch unbekannte Wellenfrequenz und κ die rein imaginäre vertikale Wellenzahl. Die Bewegungsgleichungen lauten nun

$$\begin{aligned} \imath\,\omega\,u_{x0} - 2\Omega\,u_{y0} &= \imath\,k\,\Pi_0, \\ \imath\,\omega\,u_{y0} + \frac{1}{2}\Omega\,u_{x0} &= 0, \\ \imath\,\omega\,u_{z0} &= \kappa\,\Pi_0. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Auflösen dieser Gleichungen nach den freien Konstanten u_{x0}, u_{y0}, u_{z0} ergibt

$$\begin{aligned} u_{x0} &= k\,\frac{\omega}{\omega^2 - \Omega^2}\,\Pi_0, \\ u_{y0} &= \frac{1}{2}\,\imath\,k\,\frac{\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\,\Pi_0, \\ u_{z0} &= \frac{\kappa}{\imath\,\omega}\,\Pi_0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (8.5) ergibt sich daraus die Bedingung

$$\left[\kappa^2 - \frac{k^2\,\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}\right]\,\Pi_0 = 0. \tag{8.10}$$

Da $\Pi_0 \neq 0$ sein soll, muß also für κ die Gleichung

$$\kappa^2 = \frac{k^2\,\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2} \tag{8.11}$$

erfüllt sein. Für $\Pi(z)$ ergibt sich mit beliebigen kleinen Konstanten Π_1 und Π_2 die allgemeine Lösung

$$\Pi(z) = \Pi_1\, e^{+\kappa\, z} + \Pi_2\, e^{-\kappa\, z}. \tag{8.12}$$

Es ist aber physikalisch eleganter, die allgemeine Lösung in einen *symme-*

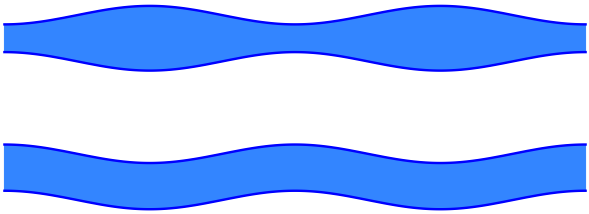

Fig. 8.1: *Schematischer Querschnitt durch eine inkompressible Flüssigkeitsschicht. Im oberen Fall ist in der Schicht eine Dichtewelle, im unteren Fall eine Biegewelle angeregt. Diese beiden Fälle entsprechen den zwei Symmetrien in der Formel (8.13).*

trischen und einen *antisymmetrischen* Anteil zu zerlegen und getrennt zu betrachten. Wir definieren also die zwei vollständigen linear unabhängigen Lösungen

$$\Pi = \epsilon\, \Pi_0 \left\{ \begin{array}{c} \cosh(\kappa\, z) \\ \sinh(\kappa\, z) \end{array} \right\} e^{\imath\,(k\,x+\omega\,t)}. \tag{8.13}$$

Mit (8.7) und (8.13) ergibt sich eine erste Bedingung für die Konstante Π. Denn es gilt

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \imath\, \frac{h}{2}\, \omega\, \epsilon\, e^{\imath\,(k\,x+\omega\,t)}. \tag{8.14}$$

Andererseits folgt aus (8.13) und (8.5)

$$u_{z|h/2} = \epsilon\, \frac{\kappa}{\imath\,\omega}\, \Pi_0 \left\{ \begin{array}{c} \sinh(\kappa\, h/2) \\ \cosh(\kappa\, h/2) \end{array} \right\} e^{\imath\,(k\,x+\omega\,t)}. \tag{8.15}$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke ergibt sich die notwendige Bedingung

$$\omega^2 + 2\,\Pi_0\, \frac{\kappa}{h} \left\{ \begin{array}{c} \sinh(\kappa\, h/2) \\ \cosh(\kappa\, h/2) \end{array} \right\} = 0. \tag{8.16}$$

Physikalisch hat die Konstante Π_0 die Dimension eines Potentials, denn Π stellt hier ja das Geschwindigkeitspotential der inkompressiblen Strömung dar.

Um eine zweite Gleichung für Π_0 zu erhalten, müssen wir in der gestörten Flüssigkeitsschicht die Bilanzen zwischen dem Gravitationspotential und dem Druck näher betrachten. Mit Hilfe der Poissongleichung

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= 0, && \textit{Außenraum} \\ \nabla^2 \Phi &= -4\pi\, G\varrho, && \textit{Innenraum} \end{aligned} \tag{8.17}$$

läßt sich leicht zeigen, dass im Gleichgewicht der Druckverlauf in der Flüssigkeitsschicht durch

$$P(z) = \left(2\pi\, G\varrho^2 + \frac{1}{2}\,\Omega^2\,\varrho\right)\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right] \tag{8.18}$$

gegeben ist. Der erste Anteil rührt von der Selbstgravitation der Schicht her, der zweite Anteil stellt die Wirkung des *konstanten vertikalen Gravitationsfeldes* vom Zentralkörper dar. Für die wellenartig gestörte Oberfläche muß jetzt für jeden Zeitpunkt die Bedingung

$$P(h/2 + z) + \delta P = P(h/2) \equiv 0 \tag{8.19}$$

erfüllt sein. Damit erhält man die Bedingung

$$-\left(2\pi\, G\varrho + \frac{1}{2}\,\Omega^2\right)\frac{h^2}{2}\,\epsilon\, e^{\imath\,(k\,x+\omega\,t)} + \frac{\delta\,P}{\varrho}|_{h/2} = 0. \tag{8.20}$$

Als letztes muß die Potentialänderung $\delta\Phi$, bedingt durch die Änderung der Selbstgravitation in der deformierten Flüssigkeitsschicht, berechnet werden. Es gilt $\nabla^2\delta\Psi = 0$. Das zeitlich konstante vertikale Gravitationsfeld des Zentralkörpers spielt hier keine Rolle. Für den Innenraum und Außenraum machen wir die Ansätze

$$\Phi_{in} = -2\pi G\varrho\, z^2 + \epsilon\, A\left\{\begin{array}{c}\cosh(k\,z)\\ \sinh(k\,z)\end{array}\right\}\, e^{\imath\,(k\,x+\omega\,t)} \tag{8.21}$$

sowie

$$\Phi_{out} = \frac{1}{2}\pi G\varrho\, h^2 - 2\pi G\varrho\, h\, z + \epsilon\, B e^{-|k\,z|}\; e^{\imath\,(k\,x+\omega\,t)}. \tag{8.22}$$

Die Konstanten A und B müssen so bestimmt werden, dass das Potential Φ und seine Ableitung an der gestörten Oberfläche (8.7) stetig ist. Die

erste Bedingung liefert

$$A \left\{ \begin{array}{c} \cosh(k\,h/2) \\ \sinh(k\,h/2) \end{array} \right\} = B\, e^{-|k|\,h/2}. \tag{8.23}$$

Die Stetigkeitsbedingung der Ableitungen liefert dagegen

$$A \left\{ \begin{array}{c} \sinh(k\,h/2) \\ \cosh(k\,h/2) \end{array} \right\} + B\, e^{-|k|\,h/2} = 2\pi G\varrho\, h/|k|. \tag{8.24}$$

Daraus erhält man für A und B die Lösungen

$$A = 2\pi G\varrho\, h/|k|\; e^{-|k|\,h/2} \tag{8.25}$$

$$B = 2\pi G\varrho\, h/|k| \left\{ \begin{array}{c} \cosh(k\,h/2) \\ \sinh(k\,h/2) \end{array} \right\}. \tag{8.26}$$

Für die Potentialstörungen an der Oberflche der scherenden Flüssigkeit ergibt sich jetzt

$$\delta\Phi|_{h/2} = 2\pi G\varrho\, h/|k|\; e^{-|k|\,h/2} \left\{ \begin{array}{c} \cosh(k\,h/2) \\ \sinh(k\,h/2) \end{array} \right\} \epsilon\, e^{\imath\,(k\,x+\omega\,t)} \tag{8.27}$$

Mit (8.6), (8.13), (8.20) und (8.27) erhält man eine zweite Formel für Π_0

$$\begin{array}{c} 2\pi G\varrho\, h^2/|k\,h|\; e^{-|k|\,h/2} \left\{ \begin{array}{c} \cosh(k\,h/2) \\ \sinh(k\,h/2) \end{array} \right\} - \\ \left(2\pi\, G\varrho + \frac{1}{2}\,\Omega^2\right) \frac{h^2}{2} = \Pi_0 \left\{ \begin{array}{c} \cosh(\kappa\,h/2) \\ \sinh(\kappa\,h/2) \end{array} \right\}. \end{array} \tag{8.28}$$

Durch Gleichsetzen mit (8.16) ergibt sich für die Longitudinalwellen (*Dichtewellen*) die Dispersionsrelation

$$\begin{array}{r} \omega^2 = \left[2\pi\, G\varrho\, \left(|k\,h| - e^{-|k|\,h} - 1\right) + \frac{1}{2}\Omega^2\, |k\,h|\right] \times \\ \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}}\; \tanh\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}}\, |k\,h|/2\right) \end{array} \tag{8.29}$$

und für die Transversalwellen (*Biegewellen*)

$$\begin{array}{r} \omega^2 = \left[2\pi\, G\varrho\, \left(|k\,h| + e^{-|k|\,h} - 1\right) + \frac{1}{2}\Omega^2\, |k\,h|\right] \times \\ \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}}\; \coth\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}}\, |k\,h|/2\right). \end{array} \tag{8.30}$$

Die obigen Dispersionsrelationen besitzten im Prinzip unendlich viele Zweige, die der Zahl unbegrenzter „Wirbelzellen“ entspricht, in die man die Flüssigkeitsschicht *endlicher Dicke* in vertikaler Richtung aufteilen kann. Wir interessieren uns aber hier nur für den Grenzfall $h \to 0$. Dann können wir unbedenklich $\tanh(z) \approx z$ und $\coth(z) \approx 1/z$ setzen und erhalten so zunächst für die rein radialen Dichtewellen

$$\omega^2 = \Omega^2 + \pi\, G\varrho\, |k\, h| \left(|k\, h| - e^{-|k|\, h} - 1 \right) + \frac{1}{4}\Omega^2\, |k\, h|^2 \tag{8.31}$$

und analog für die rein radialen Biegewellen

$$\omega^2 = \Omega^2 + 4\pi\, G\varrho\, \frac{|k\, h| + e^{-|k\, h|} - 1}{|k\, h|} \tag{8.32}$$

Im Spezialfall $\Omega = 0$ reduziert sich die Dispersionsrelation für Dichtewellen zu

$$\omega^2 = \pi\, G\varrho\, |k\, h| \left(|k\, h| - e^{-|k\, h|} - 1 \right) \tag{8.33}$$

Dieses Ergebnis für eine inkompressible Flüssigkeitsschicht der Dicke h ohne Rotation hat auch J.C. Maxwell in seinem *Adams Price Essay* von 1859 erhalten. Der Term

$$\pi\, G\varrho\, |k\, h| \left(|k\, h| - e^{-|k\, h|} - 1 \right) \tag{8.34}$$

wird Null für

$$(k\, h)_0 = 1 + \mathbf{W}_0(e^{-1}) \approx \mathbf{1.278}... \tag{8.35}$$

wobei $\mathbf{W}_0(z)$ den oberen Zweig der Lambert'schen Funktion bezeichnet. Maxwell selber erhielt 1859 hier den Zahlenwert **1.147** ([19]), was offenbar auf einem Rechenfehler beruht. Die Funktion (8.34) erreicht ihr Minimum bei

$$(k\, h)_m \approx \mathbf{0.607}... \tag{8.36}$$

was mit der Rechnung von Maxwell übereinstimmt. Die daraus folgende Wellenzahl beschreibt die sogenannte *Mode maximaler Instabilität*. Die Flüssigkeitsschicht zerfällt so in einzelne Streifen mit dem typischen Abstand $\lambda \sim 2\pi/k_m$. Der Wert dieses Minimums, welcher nach (8.33) die zeitliche Anwachsrate der Mode bestimmt, liegt bei

$$|k\, h|_m \left(|k\, h_m| - e^{-|k\, h|_m} - 1 \right) \approx -\mathbf{0.569}..., \tag{8.37}$$

wobei wohl durch einen Druckfehler hier MAXWELL den Wert $-\mathbf{0.509}$ notiert.

Wir können die Dispersionsrelationen auch im Limes $h \to 0$ betrachten. In diesem Fall reduzieren sich die beiden Dispersionsrelationen (8.31) und (8.32) für rein radiale Wellenstörungen einer *unendlich dünnen* selbstgravitierenden Flüssigkeitsschicht zu

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \Omega^2 - 2\pi\, G\sigma\, |k|, \qquad \textit{Dichtewellen} \\ \omega^2 &= \Omega^2 + 2\pi\, G\sigma\, |k|, \qquad \textit{Biegewellen} \end{aligned} \tag{8.38}$$

Die Größe $\sigma \equiv \varrho\, h$ bedeutet nun die *Oberflächendichte* oder *Säulendichte* der unendlich dünnen Flüssigkeitsschicht. Neben diesen Dispersionszweigen gibt es auch noch den entarteten Zweig $\omega^2 = 0$, der aber keine beobachtbaren Effekte bewirkt. Erst hundert Jahre nach MAXWELL spielten die vereinfachten Relationen bei der Diskussion von spiralförmigen Dichtewellen in Galaxien wieder eine Rolle. Wir kommen darauf zurück.

Im Grenzfall einer unendlich dünnen Materieschicht folgt die relevante Dispersionsrelation für die *Dichtestörungen* aus dem sehr einfachen Schema

$$\kappa^2 = k^2\, \frac{\omega^2}{\omega^2 - \Omega^2}; \qquad \omega^2 = -2\pi\, G\sigma\, |k| \left(\frac{\kappa}{k}\right)^2. \tag{8.39}$$

Die erste Relation folgt aus der Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential (8.11), die zweite Relation folgt aus (8.16) und (8.28) im Limes $h \to 0$. Die obigen Zusammenhänge sind sehr hilfreich, um im Rahmen einer **harmonischen Wellen** - Approximation die Dispersionsrelation für *spiralförmige Dichtewellen* unter sehr allgemeinen Voraussetzungen für unendlich dünne Scheiben abzuleiten. Durch die auftretende Richtungscharakteristik der harmonischen Wellen wird die mögliche Strukturbildung in der Scherströmung wesentlich komplizierter, als es sich MAXWELL Mitte des 19. Jahrhunderts noch vorstellte.

8.2 Bildung nicht-radialer Wellenfronten

In den letzten beiden Abschnitten haben wir uns auf rein radiale lokale Wellenstörungen in einer inkompressiblen Materieschicht *ohne Scherströmung* beschränkt. Nun wollen wir aber ganz allgemein *nicht-radiale Wellenstörungen* untersucht werden, bei denen der lokale Wellenvektor

$\mathbf{k}$ zwar in der Scheibenebene, aber nicht orthogonal zur Richtung der Scherströmung ist. Im gleichen Koordinatensystem betrachten wir hierzu das allgemeine ungestörte Scherfeld (*shearing sheet model*)

$$v_y = -2\gamma\,\Omega\,x, \tag{8.40}$$

wo

$$\gamma = -\frac{1}{2}\,\frac{d\ln\Omega}{d\ln R} \tag{8.41}$$

ist. Die Größe $\gamma \in [0,1)$ ist der *fundamentale Scherparameter* der hydrodynamischen Strömung, der sich als sehr wichtig erweisen wird. Die Größe $R\,\Omega(R)$ bezeichnet die Rotationskurve der differentiell rotierenden Materiescheibe. Für *Keplerscheiben* ist $\gamma = 3/4$.

Durch die Linearisierung der Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z in der Form

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ -2\gamma\,\Omega\,x + u_y \\ u_z \end{pmatrix}. \tag{8.42}$$

erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} - 2\gamma\,\Omega\,x\,\frac{\partial u_x}{\partial y} - 2\,\Omega\,u_y &= \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} - 2\gamma\,\Omega\,x\,\frac{\partial u_y}{\partial y} + 2(1-\gamma)\,\Omega\,u_x &= \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} - 2\gamma\,\Omega\,x\,\frac{\partial u_z}{\partial y} &= \frac{\partial \Pi}{\partial z}. \end{aligned} \tag{8.43}$$

Π bedeutet hier wieder das Geschwindigkeitspotential, welches sich aus dem Gravitationspotential und dem Druck zusammensetzt. Hinzu kommt noch die inkompressible Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \tag{8.44}$$

Da die lokale radiale Variable x explizit in den Gleichungen auftritt, machen wir für die Eigenfunktionen aller Variablen den Ansatz

$$F(x)\;e^{\kappa\,z}\;e^{\imath(k\,y+\omega\,t)}. \tag{8.45}$$

k ist jetzt die Wellenzahl in *tangentialer* oder *azimutaler* Richtung. Einsetzen in die relevanten Bewegungsgleichungen führt auf

$$\begin{aligned} \imath\,\omega_x\,u_x - 2\Omega\,u_y &= \frac{d\Pi}{dx} && (8.46)\\ 2\Omega(1-\gamma)\,u_x + \imath\,\omega_x\,u_y &= \imath\,k\,\Pi && (8.47)\\ \imath\,\omega_x\,u_z &= \kappa\,\Pi && (8.48) \end{aligned}$$

mit der x-abhängigen Wellenfrequenz

$$\omega_x = \omega - 2\gamma\Omega\,k\,x. \tag{8.49}$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet jetzt

$$\frac{du_x}{dx} + \imath\,k\,u_y + \kappa\,u_z = 0. \tag{8.50}$$

Die Auflösung des obigen Systems nach den Geschwindigkeiten u_x, u_y, u_z führt auf

$$\begin{aligned} u_x &= -\imath\,\frac{\omega_x\,d\Pi/dx + 2\Omega\;k\,\Pi}{\omega_x^2 - \Omega_\gamma^2}, && (8.51)\\ u_y &= \frac{2\Omega(1-\gamma)\,d\Pi/dx + k\,\omega_x\,\Pi}{\omega_x^2 - \Omega_\gamma^2}, && (8.52)\\ u_z &= -\imath\,\frac{\kappa}{\omega_x}\,\Pi. && (8.53) \end{aligned}$$

Dabei wurde die sogenannte *Rayleigh - Diskriminante* oder *Epizykelfrequenz*

$$\Omega_\gamma^2 = 4\Omega^2(1-\gamma) \tag{8.54}$$

eingeführt. In Keplerscheiben gilt $\Omega_\gamma \equiv \Omega$. Werden nun die drei Geschwindigkeitskomponenten in die Kontinuitätsgleichung (8.50) eingesetzt, ergibt sich nach länglicher Reduktion die Beziehung

$$\begin{aligned} \omega_x^2\left(\omega_x^2 - \Omega_\gamma^2\right)\frac{d^2\Pi}{dx^2} + 4\gamma\,\Omega\,\omega_x^3\,k\,\frac{d\Pi}{dx} + \\ + \left[\omega_x^2\,k^2\left(4\Omega^2(1+\gamma) - \omega_x^2\right) + \kappa^2(\omega_x^2 - \Omega_\gamma^2)^2\right]\,\Pi = 0. \end{aligned} \tag{8.55}$$

Dies ist eine einzige Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential $\Pi(x)$, wenn die Größen ω, κ und k willkürlich vorgegeben werden. Es

existiert aber auch eine wesentlich einfachere Gleichung für $u_x(x)$. In der Kontinuitätsgleichung (8.50) kann man mit (8.47) und (8.48) u_y und u_z eleminieren und erhält zunächst

$$\omega_x \frac{d\,u_x}{d\,x} - 2\Omega\,(1-\gamma)\,k\,u_x - \imath\,(\kappa^2 - k^2)\,\Pi = 0. \tag{8.56}$$

Löst man diesen Ausdruck nach Π auf und setzt ihn in (8.46) ein, so folgt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\,u_x}{d\,x^2} + \left[(\kappa^2 - k^2) - \frac{\kappa^2\,\Omega_\gamma^2}{\omega_x^2}\right] u_x = 0 \tag{8.57}$$

oder mit (8.49) im Spezialfall einer Keplerscheibe mit $\gamma = 3/4$

$$\boxed{\frac{d^2\,u_x}{d\,x^2} + \left[(\kappa^2 - k^2) - \frac{\kappa^2\,\Omega^2}{(\omega - \frac{3}{2}\Omega\,k\,x)^2}\right] u_x = 0.} \tag{8.58}$$

Dies ist der Spezialfall einer *Whittakerschen Differentialgleichung*, die auch in der Theorie der Wellenausbreitung in Gasscheiben eine große Rolle spielt. Die allgemeine Lösung kann formal in der Form

$$\begin{aligned} u_x = C_1\,\mathbf{M}&\left[0,\ \frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{4\,\kappa}{3\,k}\right)^2};\ \frac{4}{3}\sqrt{1-\frac{\kappa^2}{k^2}}\,\omega_x\right] \\ &+ C_2\,\mathbf{W}\left[0,\ \frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{4\,\kappa}{3\,k}\right)^2};\ \frac{4}{3}\sqrt{1-\frac{\kappa^2}{k^2}}\,\omega_x\right] \end{aligned} \tag{8.59}$$

geschrieben werden, wobei $\mathbf{M}[a,b;z]$ und $\mathbf{W}[a,b;z]$ die beiden linear unabhängigen *Whittakerschen Funktionen* bezeichnen.

Eine physikalisch sinnvolle Lösung dieser Gleichung liefert dann mit (8.56) und (8.53) einen analytischen Ausdruck für die gestörte Oberfläche der scherenden Schicht, aus der die Potentialänderung der Gravitation berechnet werden könnte. Das so definierte Eigenwertproblem gestaltet sich aber sehr kompliziert und ist analytisch kaum durchführbar.

8.2.1 Die Dispersionsrelation

Anstatt ein exaktes Eigenwertproblem zu formulieren, versuchen wir alternativ, die entscheidende Schlüsselgleichung (8.55) durch einen *ebenen Wellenansatz* approximativ zu lösen, für den wir den gravitativen „Rückantwort“ ja schon kennen. Dies läuft auf eine **WKB** - Analyse (*Wenzel - Kramers - Brillouin*)[1] niedrigster Ordnung für die zugrunde liegende Wellengleichung hinaus. Zu Beginn der 1960er Jahre haben insbesondere Autoren wir A.J. Kalnajs, C.C. Lin (1916-2013), F. Shu und A. Toomre eine ähnliche Methode benutzt, um *analytisch* die Dynamik von spiralförmigen Dichtewellen in Galaxien zu verstehen. Wir setzen also jetzt lokal approximativ

$$\omega_x \to \omega. \tag{8.60}$$

Damit lautet die Gleichung (8.55)

$$\begin{aligned} &\omega^2 \left(\omega^2 - \Omega_\gamma^2\right) \frac{d^2\Pi}{dx^2} + 4\gamma\,\Omega\,\omega^3\,k_y\,\frac{d\Pi}{dx} + \\ &+ \left[\omega^2\,k_y^2\left(4\Omega^2(1+\gamma) - \omega^2\right) + \right. \\ &\left. +\kappa^2(\omega^2 - \Omega_\gamma^2)^2\right]\,\Pi = 0. \end{aligned} \tag{8.61}$$

Zur Verdeutlichung wurde hier $k \to k_y$ geschrieben, da k in (8.55) den *tangentialen* Wellenvektor in der scherenden Materieschicht bezeichnet. Die obige Gleichung lösen wir nun wieder durch den ebenen Wellenansatz

$$\Pi = \Pi_0\,e^{\imath\,k_x\,x}, \tag{8.62}$$

in der k_x den *radialen* Wellenvektor bezeichnet. Einsetzen in (8.61) führt auf die algebraische Gleichung

$$\begin{aligned} -\omega^2\left(\omega^2 - \Omega_\gamma^2\right)\,k_x^2 + 4\,\imath\,\gamma\,\Omega\,\omega^3\,k_x\,k_y + \\ +\omega^2\,k_y^2\left(4\Omega^2(1+\gamma) - \omega^2\right) + \kappa^2(\omega^2 - \Omega_\gamma^2)^2 = 0. \end{aligned} \tag{8.63}$$

Nun ist es angezeigt, den nicht unbedingt sehr kleinen *Neigungswinkel (pitch angle)* θ des Wellenzahlvektors $\mathbf{k}$ zur *radialen Richtung senkrecht*

[1] Historisch besser die **LG** - Methode nach J. Liouville und G. Green von 1837. Green, G. (1837). *On the motion of waves in a variable canal of small depth and width.* Transactions of the Cambridge Philosophical Society **6**: 457-462.

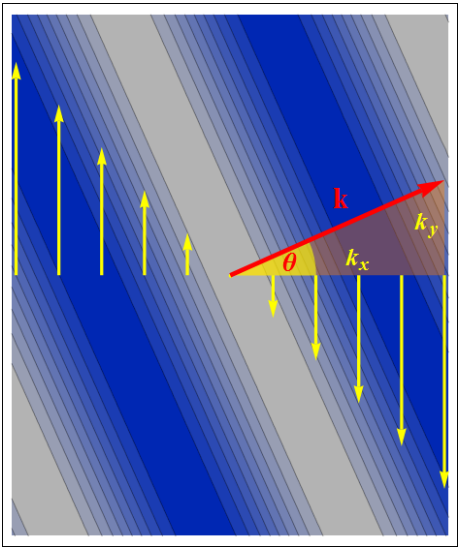

Fig. 8.2: *Veranschaulichung von Dichtewellen (blau) in einer lokalen differenziell rotierenden hydrodynamischen Scherströmung mit Selbstgravitation. Die gelben Pfeile kennzeichnen die lokale Scherströmung (8.40) relativ zur mittleren Stromlinie. Die x - Achse zeigt radial nach außen, die y Achse tangential zur Rotationsrichtung. Der Wellenzahlvektor k der Dichtewelle macht einen Winkel θ zur radialen Richtung. Nach der Theorie erreicht die trailing g-Mode mit $\theta > 0$ eine maximale Anwachsrate bei einem Neigungswinkel von $\theta \approx 24°$.*

zur Scherströmung in der Scheibe einzuführen. Wir machen hier also nicht die in den 1960er Jahren übliche *tight - winding* Approximation, sondern setzen (siehe Fig. (8.2))

$$k_x = |\mathbf{k}| \cos(\theta), \qquad k_y = |\mathbf{k}| \sin(\theta). \tag{8.64}$$

Für rein radiale Wellen gilt $\theta = 0$, die Komponente k_y, die in tangentiale Richtung zeigt, wird dann Null. Für $0 < \theta < \pi/2$ nähert sich die spiralförmige Wellenfront in Rotationsrichtung dem Scheibenzentrum (**trailing wave**), für $-\pi/2 < \theta < 0$ entfernt sich die Spiralwellenfront in Rotationsrichtung vom Scheibenzentrum (**leading wave**). Mit alledem erhalten wir aus (8.63) für κ den Ausdruck

$$\kappa^2 = \mathbf{k}^2\, \omega^2 \left[\frac{\omega^2 - 4\Omega^2\,(1 - \gamma\, \cos(2\theta)) - 2\,\imath\,\gamma\,\Omega\,\omega\, \sin(2\theta)}{(\omega^2 - \Omega_\gamma^2)^2} \right]. \tag{8.65}$$

Für $\theta = 0$ erhalten wir wieder die erste Relation von (8.39) für rein radiale Wellenstörungen. Setzen wir für $|\mathbf{k}| \to 0$zur Abkürzung

$$g(\mathbf{k}) = -2\pi\, G\, \sigma\, |\mathbf{k}|, \tag{8.66}$$

so folgt aus (8.65) und (8.39) die fundamentale **WKB** *Dispersionsrelation*

$$\boxed{\left(\omega^2 - \Omega_\gamma^2\right)^2 = \mathbf{g}[k]\left[\omega^2 - 4\Omega^2\left(1 - \gamma\,\cos(2\theta)\right) - 2\,\imath\,\gamma\,\Omega\,\omega\,\sin(2\theta)\right],} \tag{8.67}$$

wobei immer $\Omega_\gamma^2 = 4\,\Omega^2\,(1-\gamma)$ ist. Diese wichtige Relation ist wie die der Maxwellschen Punktmassenkette von vierter Ordnung in der Frequenz und enthält einen *imaginären* Term, der proportional der drei Faktoren $\gamma, g(\mathbf{k})$ und $\sin(2\theta)$ ist. Je nach Vorzeichen dieser Größen muss er eine nicht-radiale **Kelvin - Helmholtz Instabilität** von Dichtestörungen *längs der Scherströmung* darstellen. Aufgrund der Funktion $\sin(2\theta)$ kann die Dispersionsrelation sogar zwischen *trailing spiral waves* $(0 < \theta < \pi/2)$ und *leading spiral waves* $(-\pi/2 < \theta < 0)$ unterscheiden. Denn beim Übergang von einem Wellentyp zum anderen wechselt der Term sein Vorzeichen, was auf die Anwachsraten der unterschiedlichen Wellenmoden einen entscheidenden Einfluss hat. Zudem ist sie invariant gegenüber der Spiegelung $\theta \to \theta \pm \pi$.

Anstatt mit der *komplexen* Wellenfrequenz ω können wir auch die *komplexe* Anwachsrate s gemäß

$$s = \imath\,\frac{\omega}{\Omega_\gamma}; \qquad \alpha^2 = -\frac{g(\mathbf{k})}{\Omega_\gamma^2} \tag{8.68}$$

einführen. Die Größe α^2 ist in unserem Fall immer positiv, da nach (8.66) $g(\mathbf{k})$ immer negativ ist. Dann lautet die Gleichung vierten Grades mit reellen Koeffizienten für die dimensionslose Größe s ($\Re(s) > 0$ bedeutet die Wachstumsrate der Wellenmode; $\Im(s)$ bedeutet die Wellenfrequenz) einer Wellenfront, die mit der Scherströmung einen Winkel θ einnimmt,

$$(s^2+1)^2 = \alpha^2\left(s^2 + \frac{\gamma\,\sin[2\theta]}{\sqrt{1-\gamma}}\,s + \left(\frac{1-\gamma\,\cos[2\theta]}{1-\gamma}\right)\right). \tag{8.69}$$

Dies ist die *Schlüsselgleichung*, um Wachstumsraten von Spiralwellen als Funktion des Neigungswinkels *„pitch angle“* θ zu untersuchen. In den

folgenden Kapiteln wird sich zeigen, dass die algebraische Struktur dieser Dispersionsrelation viel komplizierter und reichhaltiger ist, als es den ersten Anschein hat.

Zunächst wollen wir aber kurz die gewonnenen Resultate mit der Dispersionsrelation von Cook und Franklin aus dem Jahre 1964 vergleichen, welche damals einen wichtigen dynamischen Effekt nicht berücksichtigt haben: *die Scherströmung der infinitesimalen Flüssigkeitsteilchen.*

8.3 Das Ringmodell nach Cook & Franklin

Zu Beginn der 1960er Jahre - also etwa hundert Jahre nach Maxwell - begann eine intensive Neubeschäftigung mit dynamischen Problemen selbstgravitierender Materiescheiben. Für den Themenkreis Planetenringe und hier speziell für den Saturnring treten besonders die Arbeiten der Autoren A.F. Cook und F.A. Franklin hervor ([6],[7]). Hier soll kurz ihre Dispersionsrelation für Wellen *schräg* zur radialen Richtung in der Scheibe erläutert und ihre Schwächen aufgezeigt werden.

Cook & Franklin gehen bei ihrer Retrospektive zur Maxwellschen Stabilitätsanalyse von der Annahme aus, daß ein in radialer Richtung sehr schmaler Ring *keine differentielle Scherung* aufweist[2]. Dichtewellen in dem so definierten flüssigen Ringsegment (Ringtorus) sollten sich dann sehr ähnlich wie die Wellen in der Maxwellschen Punktmassenkette verhalten.

In Abweichung von (8.4) gelten dann für ein Keplerfeld die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} - 2\,\Omega\,u_y &= 3\,\Omega^2\,\xi_x + \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + 2\,\Omega\,u_x &= \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} &= \frac{\partial \Pi}{\partial z}. \end{aligned} \tag{8.70}$$

$\xi_x(t)$ bezeichnet hier die radiale *Lagrangesche Verschiebung* in der radialen Richtung der Ringebene. Es gilt $\dot{\xi}_x(t) = u_x(t)$. Durch eine ähnliche Analyse wie im vorhergehenden Abschnitt erhält man für ebene Wellenstörungen, deren Ausbreitungsrichtung einen Winkel θ zur radialen

[2] Diese Prämisse ist aber außer im Punkmassenring in keinem breiteren Planetenring erfüllt

Richtung bilden, die Dispersionsrelation

$$\omega^2 = \mathbf{g}(k) \left[\frac{\omega^2 + 3\Omega^2 \, \sin(\theta)^2)}{\omega^2 - \Omega^2} \right], \tag{8.71}$$

oder

$$\omega^2 \, \left(\omega^2 - \Omega^2\right) = \mathbf{g}(k) \left(\omega^2 + 3\Omega^2 \, \sin(\theta)^2\right), \tag{8.72}$$

wobei $\mathbf{g}(k)$ durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(k) &= -\pi \, G\varrho \, |k \, h| \left(1 + e^{-|k| \, h} - |k \, h|\right) \\ &= -2 \, \pi \, G \, \sigma \, |k| \qquad \{h \to 0\} \end{aligned}$$

gegeben ist. (8.71) ist aber genau die Relation von Cook & Franklin in ([6])) aus dem Jahre 1964 (dort Gleichung (26)). Zum Vergleich betrachten wir die Dispersionsrelation der Maxwell'schen Kette

$$\omega^2 = -2 \, G\varrho \, \mathbf{S}[kd] \, \left[\frac{\omega^2 + 3\Omega^2 - G\varrho \, \mathbf{S}[kd]}{\omega^2 - \Omega^2 - G\varrho \, \mathbf{S}[kd]} \right], \tag{8.73}$$

die sich auch in der Form

$$\begin{aligned} &\omega^2 \left(\omega^2 - \Omega^2 - G\varrho \, \mathbf{S}[kd]\right) \\ &\qquad = -2 \, G\varrho \, \mathbf{S}[kd] \, \left(\omega^2 + 3\Omega^2 - G\varrho \, \mathbf{S}[kd]\right) \end{aligned} \tag{8.74}$$

schreiben läßt. Bemerkenswert ist hier, daß bei Cook & Franklin der tangentiale Kopplungsterm $-2 \, G\varrho \, \mathbf{S}[kd]$ der Maxwellschen Massenkette durch den hydrodynamischen Term $\mathbf{g}(k)$ ersetzt wurde, während die radiale Kopplung aufgrund der ebenen Wellenstruktur der Materieschicht gänzlich verschwindet. Die lokale differentielle Rotation wird hier tatsächlich *nicht berücksichtigt*.

Cook & Franklin und andere Autoren kannten in den 1960er Jahren und auch später noch nicht die physikalisch korrekte Version einer Dispersionsrelation, die auch den bedeutenden Effekt der *Scherströmung* mit einbezieht. Sie lautet im Falle einer Keplerscheibe ($\gamma = 3/4$) in der ebenen Wellennäherung (siehe Gleichung (8.67))

$$\boxed{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 = \mathbf{g}(k) \left[\omega^2 - 4\Omega^2 \, (1 - \frac{3}{4} \, \cos(2\theta)) - \frac{3}{2} \, \imath \, \Omega \, \omega \, \sin(2\theta) \right]} \tag{8.75}$$

oder alternativ

$$\left(\omega^2 - \Omega^2\right)\left(\omega^2 - \Omega^2 - \mathbf{g}(k)\right) = \mathbf{g}(k)\left[6\,\Omega^2\,\sin(\theta)^2 - \frac{3}{2}\,\imath\,\Omega\,\omega\,\sin(2\theta)\right]. \tag{8.76}$$

Die algebraische Struktur dieser Frequenz - Wellenzahl Relation (8.76) ist völlig anders als die entsprechende Beziehung (8.74) der Maxwellschen Punktmassenkette oder (8.71) oder (8.72) von Cook& Franklin. Mit differentieller Rotation tritt der *quasi - akustische Zweig* $\omega^2 \to 0$ für $k \to 0$ überhaupt nicht mehr auf - er ist verschwunden. Dies steht im deutlichen Gegensatz zum Modell der Maxwellschen Punktmassenkette, bei der dieser Dispersionszweig wahrscheinlich entscheidend für das Auftreten von periodischen *Ringbögen* in tangentialer Richtung ist.

8.3.1 Der Toomre Parameter

Bevor wir die einzelnen Dispersionszweige der Relation (8.67) oder (8.69) für die unterschiedlichen Richtungswinkel θ bezüglich der radialen Richtung betrachten, müssen wir noch erläuternde Bemerkungen zum dimensionslosen gravitativen Kopplungsparameter α in der Schlüsselgleichung (8.69) machen. Wir haben bis jetzt den Ausdruck für $g(\mathbf{k})$ auf gravitative Schwerewellen beschränkt und nicht die Existenz von Schallwellen in einem gasförmigen Medium berücksichtigt. In Verallgemeinerung von (8.66) schreiben wir jetzt

$$g(\mathbf{k}) = -2\pi\,G\,\sigma\,|\mathbf{k}| + c_s^2\,\mathbf{k}^2 \tag{8.77}$$

und damit

$$\alpha^2(k) = \frac{2\pi\,G\,\sigma\,|k| - c_s^2\,k^2}{\Omega_\gamma^2}, \tag{8.78}$$

wobei jetzt nur noch der Betrag $k = |\mathbf{k}|$, also die reine Wellenzahl, eine Rolle spielt. Die Schallgeschwindigkeit c_s muss in einem *kinetischen Modell*, bestehend aus zahlreichen inelastisch stoßenden Teilchen, als mittlere *radiale Geschwindigkeitsdispersion* im Geschwindigkeitsraum interpretiert werden. Wir kommen darauf noch zurück. Die Größe σ bedeutet wie gewöhnlich die lokale Oberflächendichte der Materiescheibe (Planetenringe).

Die Größe $\alpha(k)$ wird maximal bei der Wellenzahl

$$k_m = \frac{\pi\, G\, \sigma}{c_s^2}. \tag{8.79}$$

Dann nimmt der Parameter $\alpha(k)$ den maximalen Wert

$$\alpha(k_m) = \frac{\pi\, G\, \sigma}{\Omega_\gamma\, c_s} \tag{8.80}$$

an. Das Inverse dieser Zahl ist in der Literatur als der sogenannte **Toomre - Parameter** bekannt. Die Definition für Gasscheiben lautet

$$\boxed{Q = \frac{\Omega_\gamma\, c_s}{\pi\, G\, \sigma}.} \tag{8.81}$$

Eine leicht modifizierte Kennzahl dieser Art wurde 1964 von Alar Toomre bei der Untersuchung der dynamischen Stabilität von Galaxien eingeführt ([28]). Der Q - Parameter ist im Prinzip ein Maß für die *Temperatur* einer differentiell rotierenden selbstgravitierenden Materiescheibe. Denn die Schallgeschwindigkeit ist proportional der Wurzel aus der Gastemperatur des Scheibenmediums. Ist der Parameter Q hoch ($\gg 1$), spricht man von *„heißen Scheiben“*, ist er niedrig (≈ 1), entsprechend von *„kalten Scheiben“*.

8.3.2 Die vier Dispersionszweige

Da zunächst α in (8.69) eine sehr kleine Größe sein soll, versuchen wir, die vier Dispersionszweige der obigen Gleichung vierten Grades durch eine Reihe der Form

$$s_j = c_{0;j} + c_{1;j}\, \alpha + c_{2;j}\, \alpha^2 + \ldots \qquad \{j = 1, 2, 3, 4\} \tag{8.82}$$

darzustellen. Die Koeffizienten $c_{i;j}$ hängen dann von dem Winkel θ und dem Scherströmparameter γ ab. Einsetzen in (8.69) führt zunächst auf

8.4 Wellenmechanik und Lagrangedichte

Im vorhergehenden Kapitel wurde die Dispersionsrelation der Ringdynamik mit Hilfe der Bewegungsgleichungen abgeleitet. Es ist aber auch

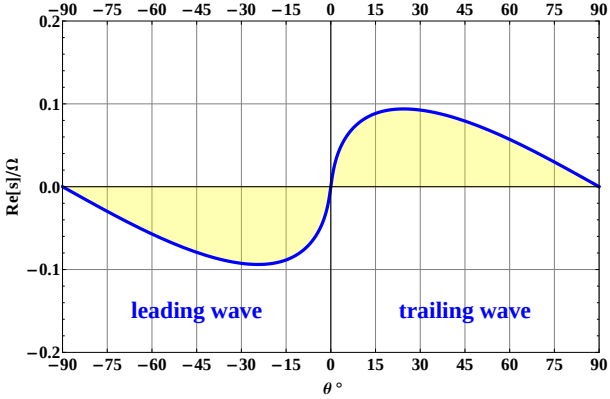

Fig. 8.3: *Die Entwicklung der Modellvorstellungen über die Gestalt des Planeten Saturn*

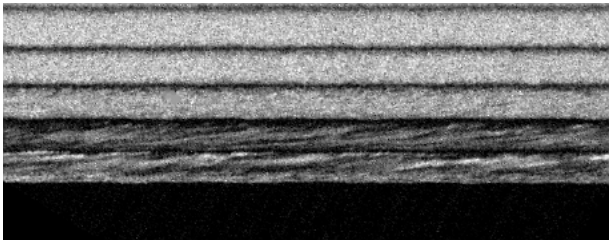

Fig. 8.4: *Die innere Kante der Encke-Teilung mit einer Auflösung von etwa 270 m pro Pixel. Die Lücke wird vom Mond Pan besetzt, der durch gravitative Resonanzen die gleichmäßigen Verdichtungen im oberen Teil des Bildes erzeugt. Zwischen den ersten beiden Resonanzstellen an der Ringkante kann man schräg zur Scherströmung liegende fadenartige Materieverdichtungen sehen, die etwa zwischen 10 km und 20 km lang sind. Genau diese „Spiralfragmente“ werden von der Dispersionsrelation (8.67) vorausgesagt. Nur in dieser speziellen Region des Saturnringes hat man bisher diese Strukturen gesehen. Bild:(PIA06195, Cassini Orbiter, NASA)*

möglich, die Lagrangedichte (10.34) des N – Teilchenringes als gemittelte Zeitfunktion der *reellen* Amplituden $A_\nu(\equiv |Q_\nu|)$ und der reellen Wellenfrequenz ω zu schreiben. Es gelten aufgrund der früheren Ergebnisse für die Bewegung jedes Teilchens der Marke n im Falle der dynamischen

Stabilität die Gleichungen

$$\begin{aligned} x(n,t) &= A_1\ \cos(k\,n\,d + \omega\,t + \phi_1), \\ y(n,t) &= A_2\ \sin(k\,n\,d + \omega\,t + \phi_1), \\ z(n,t) &= A_3\ \cos(k\,n\,d + \omega\,t + \phi_2), \end{aligned} \tag{8.83}$$

wobei ϕ_1, ϕ_2 beliebige Phasenkonstanten darstellen. Diese Funktionen setzen wir nun in die Lagrangedichte (10.34)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n \quad = \quad & \frac{1}{2}\left(\dot{x}(n,t)^2 + \dot{y}(n,t)^2 + \dot{z}(n,t)^2\right) + \Omega\ [x(n,t)\dot{y}(n,t) - y(n,t)\dot{x}(n,t)] \\ & + \frac{3}{2}\,\Omega^2\,x(n,t)^2 - \frac{1}{2}\,\Omega^2\,z(n,t)^2 + \\ & - \frac{1}{4}\,G\varrho \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty}{}' \frac{(x(n+j,t) - x(n,t))^2}{|j|^3} \\ & + \frac{1}{2}\,G\varrho \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty}{}' \frac{(y(n+j,t) - y(n,t))^2}{|j|^3} \\ & - \frac{1}{4}\,G\varrho \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty}{}' \frac{(z(n+j,t) - z(n,t))^2}{|j|^3}. \end{aligned}$$

ein und mitteln über eine Zeitperiode $2\pi/\omega$.

9 Wellenmechanik eines Mond-Ringsystems

9.1 Die Grundgleichungen

10 Ring - Satelliten Wechselwirkung

10.1 Lineare Responsetheorie

Die linearisierten Bewegungsgleichungen der Maxwellschen Punktmassenkette lauten

$$\ddot{x}(n,t) - 2\Omega\dot{y}(n,t) - 3\Omega^2\, x(n,t) = \\ +G\varrho \sum_{j=1}^{j=\infty} \left(\frac{x(n+j,t) - 2x(n,t) + x(n-j,t)}{j^3} \right) + a_x(n,t) \tag{10.1}$$

$$\ddot{y}(n,t) + 2\Omega\dot{x}(n,t) = \\ -2G\varrho \sum_{j=1}^{j=\infty} \left(\frac{y(n+j,t) - 2y(n,t) + y(n-j,t)}{j^3} \right) + a_y(n,t) \tag{10.2}$$

$$\ddot{z}(n,t) + \Omega^2\, z(n,t) = \\ +G\varrho \sum_{j=1}^{j=\infty} \left(\frac{z(n+j,t) - 2z(n,t) + z(n-j,t)}{j^3} \right) + a_z(n,t) \tag{10.3}$$

Wir führen nun eine Laplacetransformation bezüglich der Zeit und eine diskrete Fouriertransformation bezüglich der Marken n aus. Denn es gilt ja nach Fourier die bijektive Abbildung

$$F(k) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F(n)\, e^{-\imath k\, n\cdot a} \tag{10.4}$$

$$F(n) = \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} F(k)\, e^{+\imath k\, n\cdot a}\, dk \tag{10.5}$$

Dabei können $F(n)$ als die diskreten Fourierkoeffizienten der Funktion $F(k)$ im Intervall $-\pi/a < k < +\pi/a$ interpretiert werden. Es gilt nun der Verschiebungssatz

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F(j+n)\, e^{-\imath k\, n\cdot a} &= \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} F(l)\, e^{\imath k\, j\cdot a}\, e^{-\imath k\, l\cdot a} \\ &= F(k)\, e^{\imath k\, j\cdot a} \qquad (10.6)\end{aligned}$$

Multiplikation der Gleichungen (3.9) und (3.10) mit $e^{-\imath k\, n\cdot a}$ und Summation über alle n führt zu dem System

$$\ddot{x}(k,t) - 2\Omega\dot{y}(k,t) - 3\Omega^2\, x(k,t) + G\varrho S(k)\, x(k,t) = a_x(k,t) \qquad (10.7)$$

$$\ddot{y}(k,t) + 2\Omega\dot{x}(k,t) - 2G\varrho S(k)\, y(k,t) = a_y(k,t) \qquad (10.8)$$

Die Funktion $S(k)$ ist gegeben durch

$$S(k) = 4\sum_{j=1}^{j=\infty} \frac{\sin^2(j\, ka/2)}{j^3}. \qquad (10.9)$$

Als letztes führen noch eine Laplacetransformation bezüglich der Zeit aus. Als Anfangsbedingung wählen den einfachsten Fall, wo alle Punktmassen mit der Marke n außer $n = 0$ sich in Ruhe mit den Koordinaten $x(n, t = 0) = 0, y(n, t = 0) = 0$ befinden. Es ist also $x(0,0) = x_0, y(0,0) = y_0, \dot{x}(0,0) = \dot{x}_0, \dot{y}(0,0) = \dot{y}_0$. Wir erhalten für die Fourier-Laplacetransformierten $x(k,s)$ und $y(k,s)$ die gekoppelten Gleichungen

$$\left[s^2 - 3\Omega^2 + G\varrho S(k)\right]\, x(k,s) - [2\Omega s]\, y(k,s) = A_x(k,s), \qquad (10.10)$$

$$[2\Omega s]\, x(k,s) + \left[s^2 - 2G\varrho S(k)\right]\, y(k,s) = A_y(k,s), \qquad (10.11)$$

wobei die Größen A_x und A_y durch

$$A_x(k,s) = a_x(k,s) + s\, x_0 + \dot{x}_0 - 2\Omega\, y_0 \qquad (10.12)$$

und

$$A_y(k,s) = a_y(k,s) + s\, y_0 + \dot{y}_0 - 2\Omega\, x_0 \qquad (10.13)$$

gegeben sind.

Die Auflösung des obigen Systems ist

$$x(k,s) = \frac{(s^2 - 2G\varrho S(k))A_x(k,s) + 2\Omega\, s\, A_y(k,s)}{[s^2 + \omega_g^2(k)][s^2 + \omega_p^2(k)]} \tag{10.14}$$

$$y(k,s) = \frac{-2\Omega\, s\, A_x(k,s) + (s^2 - 3\Omega^2 + G\varrho S(k))A_y(k,s)}{[s^2 + \omega_g^2(k)][s^2 + \omega_p^2(k)]} \tag{10.15}$$

Die Größen $\omega_g^2(k)$ und $\omega_p^2(k)$ stellen die Dispersionszweige der Maxwellschen Kette dar und sind Lösungen der Dispersionsrelation ($s = \imath\,\omega$)

$$\omega^4 - \left(\Omega^2 - G\varrho S(ka)\right)\,\omega^2 + 6G\varrho\Omega^2 S(ka) - 2G^2\varrho^2 S^2(ka) = 0. \tag{10.16}$$

Als Lösungen ergeben sich die zwei Dispersionszweige

$$\omega_g^2(k) = \frac{1}{2}\left(\Omega^2 - G\varrho S(ka)\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\Omega^4 - 26\Omega^2 G\varrho S(ka) + 9G^2\varrho^2 S^2(ka)}, \tag{10.17}$$

$$\omega_p^2(k) = \frac{1}{2}\left(\Omega^2 - G\varrho S(ka)\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\Omega^4 - 26\Omega^2 G\varrho S(ka) + 9G^2\varrho^2 S^2(ka)}. \tag{10.18}$$

Wir führen nun die linearen Responsefunktionen $\chi_\beta(k,\tau)$, ($\beta = 0,1,2,3$), gegeben durch die inversen Laplacetransformationen

$$\chi_\beta(k,\tau) = \frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{c-\imath\infty}^{c+\imath\infty} \frac{s^\beta e^{s\,t}\, ds}{[s^2 + \omega_g^2(k)][s^2 + \omega_p^2(k)]}, \tag{10.19}$$

ein. Es gilt für $\chi_0(k,t)$

$$\chi_0(k,t) = \frac{\dfrac{\sin[\omega_p(k)t]}{\omega_p(k)} - \dfrac{\sin[\omega_g(k)t]}{\omega_g(k)}}{\omega_g^2(k) - \omega_p^2(k)} \tag{10.20}$$

Die anderen Funktionen ergeben sich durch suksessives Differenzieren nach t. Man erhält so

$$\chi_1(k,t) = \frac{\cos[\omega_p(k)t] - \cos[\omega_g(k)t]}{\omega_g^2(k) - \omega_p^2(k)}, \tag{10.21}$$

$$\chi_2(k,t) = \frac{\omega_g(k)\sin[\omega_g(k)t] - \omega_p(k)\sin[\omega_p(k)t]}{\omega_g^2(k) - \omega_p^2(k)}, \tag{10.22}$$

$$\chi_3(k,t) = \frac{\omega_g^2(k)\cos[\omega_g(k)t] - \omega_p^2(k)\cos[\omega_p(k)t]}{\omega_g^2(k) - \omega_p^2(k)}. \tag{10.23}$$

Ohne Selbstgravitation, das heißt $\omega_g^2(k) \to \Omega^2$ und $\omega_p^2(k) \to 0$, lauten diese Funktionen sehr einfach

$$\chi_0(t) = \frac{t - \sin(\Omega t)/\Omega}{\Omega^2} \tag{10.24}$$

$$\chi_1(t) = \frac{1 - \cos(\Omega t)}{\Omega^2} \tag{10.25}$$

$$\chi_2(t) = \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \tag{10.26}$$

$$\chi_3(t) = \cos(\Omega t) \tag{10.27}$$

10.2 Das Anfangswertproblem

Die äußeren Beschleunigungen setzen wir zunächst Null. Die Umkehrungen der Gleichungen (10.14) und (10.15) ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned} x(k,t) = \; & x_0 \left\{4\Omega^2\chi_1(k,t) - 2G\varrho S(k)\chi_1(k,t) + \chi_3(k,t)\right\} + \\ & \dot{x}_0 \left\{\chi_2(k,t) - 2G\varrho S(k)\chi_0(k,t)\right\} + \\ & y_0 \left\{4\Omega G\varrho\, S(k)\chi_0(k,t)\right\} + \\ & \dot{y}_0 \left\{2\Omega\chi_1(k,t)\right\}. \end{aligned} \tag{10.28}$$

und

$$\begin{aligned} y(k,t) = \; & x_0 \left\{-6\Omega^3\chi_0(k,t) + 2\Omega G\varrho\, S(k)\chi_0(k,t)\right\} + \\ & \dot{x}_0 \left\{-2\Omega\,\chi_1(k,t)\right\} + \\ & y_0 \left\{\Omega^2\chi_1(k,t) + 2G\varrho\, S(k)\chi_1(k,t) + \chi_3(k,t)\right\} + \\ & \dot{y}_0 \left\{-3\Omega^2\chi_0(k,t) + G\varrho\, S(k)\chi_0(k,t) + \chi_2(k,t)\right\} \end{aligned} \tag{10.29}$$

Wir betrachten nun den folgenden Spezialfall: Alle Teilchen mit der Marke n seien im Gleichgewichtspunkt in Ruhe. Nur ein Teilchen der Marke $n = 0$ sei zum Zeitpunkt $t = 0$ um y_0 aus der Ruhelage ausgelenkt. Die obigen Gleichungen vereinfachen sich dann zu

$$x(k,t) = y_0 \left\{4\Omega G\varrho\, S(k)\chi_0(k,t)\right\} \tag{10.30}$$

und

$$y(k,t) = y_0 \left\{ \Omega^2 \chi_1(k,t) + 2G\varrho\, S(k) \chi_1(k,t) + \chi_3(k,t) \right\}. \tag{10.31}$$

In der Näherung kleiner Wellenzahlen ($k \to 0$) vereinfachen sich diese Lösungen in

$$\begin{aligned} x(k,t) &\approx 0 \\ y(k,t) &\approx y_0 \cos[\omega_p(k)t]. \end{aligned} \tag{10.32}$$

Das raumzeitliche Verhalten der Kette ist dann durch das Integral

$$\begin{aligned} y(n,t) &= y_0 \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} \cos[\omega_p(k)t]\, e^{+\imath k\, n \cdot a}\, dk \\ &= y_0 \frac{a}{\pi} \int_{0}^{\pi/a} \cos[\omega_p(k)t]\, \cos(k\, n\, a)\, dk \end{aligned} \tag{10.33}$$

gegeben. Wir können die Lösung des obigen Integrals in Anlehnung an eine Arbeit von Schrödinger aus dem Jahre 1914[1] auch als die "Schrödinger-Lösung" der Punktmassenkette für eine spezielle Anfangsbedingung bezeichnen. Durch eine Taylorentwicklung der Cosinus-Funktion für kleine t oder durch die Methode der stationären Phase für große t läßt sich das obige Integral genähert auswerten. Nur bei unmittelbarer Nachbarwechselwirkung reduziert es sich auf ein Besselfunktion vom graden Index.

10.3 Wellenfrequenzen als Eigenwertproblem

Es ist physikalisch sehr zweckmäßig, die obigen Gleichungen aus einem *Lagrange - Hamilton - Jacobi Prinzip* abzuleiten. Anstatt Zeitdifferentialgleichungen *zweiter Ordnung* werden wir Differentialgleichungen *erster Ordnung in der Zeit* erhalten. Dies hat in der Wellenmechanik den großen Vorteil, die Dispersionsrelation und damit die Dynamik der auftretenden

[1] Schrödinger, E. (1914): *Zur Dynamik elastisch gekoppelter Punktsysteme.* Annalen der Physik **44**, 916-934

Wellen als ein *Eigenwertproblem einer charakteristischen Matrix* zu erhalten. Gerade bei zwei oder mehreren wechselwirkenden Teilchenringen mit Scherströmung wird dies ein unschätzbarer Vorteil sein.

Da unser idealisiertes Modell ein Vielteilchensystem mit identischen Massen ist, müssen wir nur die *Lagrangedichte pro Teilchen* des Systems bestimmen. Nach allgemeinen Prinzipien der Mechanik lautet diese im rotierenden System mit Coriolisbeschleunigung und Gezeitenfeld für ein Teilchen der Marke n

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2\right) + \Omega\,\left(x_n\,\dot{y}_n - \dot{x}_n\,y_n\right) + \frac{3}{2}\,\Omega^2\,x_n^2 - \frac{1}{2}\,\Omega^2\,z_n^2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{j=+\infty}{}' \frac{G\,m}{\sqrt{(x_{n+j}-x_n)^2 + (j\,d + y_{n+j} - y_n)^2 + (z_{n+j}-z_n)^2}}.$$

Der Faktor 1/2 vor der Summe in (10.34) vermeidet die Doppelzählung der gravitativen Wechselwirkung bei der Bildung der eigentlichen Lagrangefunktion $\mathcal{L} = \sum_n \mathcal{L}_n$ (siehe (10.35). Der Term $j = 0$ (Selbstwechselwirkung) muß in der Wechselwirkungssumme ausgelassen werden, was durch einen Strich angedeutet ist. Diese Summe ist eigentlich divergent und muß strenggenommen renormiert werden. Entwickelt man bis zur zweiten Ordnung in den Koordinatenverschiebungen $\Delta x_j, \Delta y_j, \Delta z_j$, so erhält man mit (3.8) für die *renormierte* Lagrangedichte

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n \quad = \quad & \frac{1}{2}\left(\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2\right) \\
& + \Omega\,\left(x_n\,\dot{y}_n - \dot{x}_n\,y_n\right) + \\
& + \frac{3}{2}\,\Omega^2\,x_n^2 - \frac{1}{2}\,\Omega^2\,z_n^2 + \\
& - \frac{1}{4}\,G\varrho \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty}{}' \frac{(x_{n+j}-x_n)^2}{|j|^3} \\
& + \frac{1}{2}\,G\varrho \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty}{}' \frac{(y_{n+j}-y_n)^2}{|j|^3} \\
& - \frac{1}{4}\,G\varrho \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty}{}' \frac{(z_{n+j}-z_n)^2}{|j|^3}.
\end{aligned} \tag{10.34}$$

Die eigentliche *Lagrangefunktion* des Systems ist dann die Summe

$$\mathcal{L} = \sum_n \mathcal{L}_n. \tag{10.35}$$

Aus dieser Funktion folgen dann die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen (3.9,3.10,3.11) des Systems.

Um die *Hamilton-sche Funktion* des Systems zu formulieren, definieren wir die kanonisch konjugierten Impulskoordinaten

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \dot{x}_n} \equiv \dot{x}_n - \Omega\, y_n \\ Y_n &= \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \dot{y}_n} \equiv \dot{y}_n + \Omega\, x_n \\ Z_n &= \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \dot{z}_n} \equiv \dot{z}_n. \end{aligned} \tag{10.36}$$

Mit diesen Impulsen folgt somit

$$\dot{x}_n = X_n + \Omega\, y_n, \qquad \dot{y}_n = Y_n - \Omega\, x_n, \qquad \dot{z}_n = Z_n. \tag{10.37}$$

Diese drei Gleichungen sind die ersten drei Bewegungsgleichungen erster Ordnung in der Zeit für die sechs Größen $X[t], Y[t], Z[t], x[t], y[t], z[t]$. Drei weitere folgen mit der Hamiltonfunktion. Die *Hamiltondichte* ergibt

$$\mathcal{H}_n = \dot{x}_n\, X_n + \dot{y}_n\, Y_n + \dot{z}_n\, Z_n - \mathcal{L}_n \tag{10.38}$$

und es folgt die Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n \;=\; & \frac{1}{2}\left(\dot{x}_n^2 + \dot{y}_n^2 + \dot{z}_n^2\right) - \\ & -\frac{3}{2}\,\Omega^2\, x_n^2 + \frac{1}{2}\,\Omega^2\, z_n^2 + \\ & +\frac{1}{4}\, G\varrho \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty}{}' \frac{(x_{n+j} - x_n)^2}{|j|^3} \\ & -\frac{1}{2}\, G\varrho \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty}{}' \frac{(y_{n+j} - y_n)^2}{|j|^3} \\ & +\frac{1}{4}\, G\varrho \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty}{}' \frac{(z_{n+j} - z_n)^2}{|j|^3}. \end{aligned} \tag{10.39}$$

oder endgültig

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_n \quad = \quad & \frac{1}{2}\,(X_n + \Omega\, y_n)^2 \\
& + \frac{1}{2}\,(Y_n - \Omega\, x_n)^2 + \frac{1}{2}\, Z_n^2 - \\
& - \frac{3}{2}\,\Omega^2\, x_n^2 + \frac{1}{2}\,\Omega^2\, z_n^2 + \\
& + \frac{1}{4}\, G\varrho \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty}{}' \frac{(x_{n+j} - x_n)^2}{|j|^3} \\
& - \frac{1}{2}\, G\varrho \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty}{}' \frac{(y_{n+j} - y_n)^2}{|j|^3} \\
& + \frac{1}{4}\, G\varrho \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty}{}' \frac{(z_{n+j} - z_n)^2}{|j|^3}.
\end{aligned}
\tag{10.40}
$$

Durch Bildung der *Hamilton - Jacobi* Funktion

$$
\mathcal{H} = \sum_n \mathcal{H}_n \tag{10.41}
$$

ergeben sich die Bewegungsgleichungen aus

$$
\dot{x}_n = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_n}; \qquad \dot{y}_n = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Y_n}; \qquad \dot{z}_n = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Z_n},
$$

und

$$
\dot{X}_n = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_n}; \qquad \dot{Y}_n = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_n}; \qquad \dot{Z}_n = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_n}.
$$

Zusätzlich zu den drei Gleichungen (10.37) erhalten wir so für die *Maxwell'sche Punktmassenkette* in einem Keplerschen Gravitationsfeld die

drei Gleichungen

$$\dot{X}_n = +\Omega^2\, Y_n + 2\,\Omega^2\, x_n + G\varrho \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_{n+j} - 2\,x_n + x_{n-j}}{j^3} \tag{10.42}$$

$$\dot{Y}_n = -\Omega^2\, X_n - \Omega^2\, y_n - 2\,G\varrho \sum_{j=1}^{\infty} \frac{y_{n+j} - 2\,y_n + y_{n-j}}{j^3} \tag{10.43}$$

$$\dot{Z}_n = -\Omega^2\, z_n + G\varrho \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_{n+j} - 2\,z_n + z_{n-j}}{j^3} \tag{10.44}$$

Deutlich ist wieder zu sehen, dass die Bewegung $z[t]$ von derjenigen in $x[t], y[t]$ vollständig entkoppelt ist. Die so in den kanonischen Impuls - Variablen formulierten Bewegungsgleichungen sind allesamt erster Zeitordnung, beschreiben aber natürlich die gleiche Dynamik wie die klassischen Bewegungsgleichungen (3.9, 3.10, 3.11) .

10.4 Die Eigenwertmatrix des Ringes

Um die gekoppelten Differentialgleichungen (10.42) und (10.43) sowie die ersten beiden von (10.37) des Teilchenringes in der $x-y$ Bahnebene zu lösen, machen wir für die verallgemeinerten Impulse und Koordinaten den harmonischen Wellenansatz

$$\begin{aligned} x_n &= c_1\, e^{\imath(k\,n\,d+\omega\,t)}, \qquad & X_n &= C_1\,\Omega\, e^{\imath(k\,n\,d+\omega\,t)}, \\ y_n &= c_2\, e^{\imath(k\,n\,d+\omega\,t)}, \qquad & Y_n &= C_2\,\Omega\, e^{\imath(k\,n\,d+\omega\,t)}. \end{aligned} \tag{10.45}$$

Hier bedeuten c_1, c_2 und C_1, C_2 komplexe Amplituden, die eine zu bestimmende Phasenbeziehung zueinander haben, ω die Frequenz und k die Wellenzahl der harmonischen Welle. Nach dem Prinzip der linearen Superposition und dem Fouriertheorem lassen sich dann beliebige Bewegungen durch Überlagerung harmonischer Wellen darstellen. Werden die Ansätze (10.45) in die Bewegungsgleichungen (10.42, 10.43) eingesetzt, so erhalten wir die Gleichungen in der $x-y$ Ebene

$$\begin{aligned} \imath\,\omega\, c_1 - \Omega\, C_1 - \Omega\, c_2 &= 0, \\ -\left(2 - \alpha\,\mathbf{S}[\kappa]\right)\,\Omega\, c_1 + \imath\,\omega\, C_1 - \Omega\, C_2 &= 0, \\ \Omega\, c_1 + \imath\,\omega\, c_2 - \Omega\, C_2 &= 0, \\ \Omega\, C_1 + \left(1 - 2\alpha\,\mathbf{S}[\kappa]\right)\,\Omega\, c_2 + \imath\,\omega\, C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dabei haben wir wieder den dimensionslosen Parameter

$$\alpha = \frac{G\,\varrho}{\Omega^2} \tag{10.46}$$

und die Funktion $\mathbf{S}(\kappa)$ mit $\kappa = k\,d$ nach (3.14) eingeführt. Die linearen Bedingungsgleichungen in der $x - y$ Bahnebene können nun sehr einfach als eine Matrixgleichung

$$\mathbf{M} \circ \begin{pmatrix} c_1 \\ C_1 \\ c_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{10.47}$$

mit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \imath\,\omega & -\Omega & -\Omega & 0 \\ -\Omega\,(2 - \alpha\,\mathbf{S}[\kappa]) & \imath\,\omega & 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 & \imath\,\omega & -\Omega \\ 0 & \Omega & \Omega\,(1 - 2\alpha\,\mathbf{S}[\kappa]) & \imath\,\omega \end{pmatrix} \tag{10.48}$$

geschrieben werden. Die Dispersionsrelation ergibt sich jetzt rein formal aus der Gleichung $det[\mathbf{M}] = 0$ und die Wellenfrequenzen und Wellenstrukturen bei gegebener Wellenzahl k als *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* dieser Matrix. Numerisch ist dieser Weg wesentlich günstiger als die numerische Lösung der Dispersionsrelation (3.18) vierten Grades. Besonders bei der Wechselwirkung mehrerer Ringe hat diese „Matrizen - Mechanik“ große Vorteile.

Für die Dynamik in z - Richtung (*Biegewellen*) erhalten wir entsprechend

$$\begin{aligned} \imath\,\omega\,c_3 - \Omega\,C_3 &= 0, \\ \imath\,\omega\,C_3 + (1 + \alpha\,\mathbf{S}(\kappa))\,\Omega\,c_3 &= 0. \end{aligned} \tag{10.49}$$

Auch diese Bedingungen lassen sich als eine Matrixgleichung schreiben. Es ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \imath\,\omega & -\Omega \\ \Omega\,(1 + \alpha\,\mathbf{S}(\kappa)) & \imath\,\omega \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_3 \\ C_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{10.50}$$

Mit der so geschilderten Methode haben wir alle Mittel in der Hand, ganz allgemein das wesentlich schwierigere Problem von *zwei wechselwirkenden Teilchenringen mit Scherströmung* anzugehen.

10.5 Die Ring - Satelliten Wechselwirkung

Die Punktmassenkette befinde sich in der Ruhelage im Gleichgewichtszustand. Wir wollen weiterhin annehmen, daß sich eine Punktmasse m_s (Mond) parallel zur Punktmassenkette mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt. Eine gravitative *Rückwirkung* einer eventuell gestörten Punktmassenkette auf den Mond soll zunächst nicht berücksichtigt werden. Später muß dann geprüft werden, ob eine solche Annahme statthaft ist oder ob es eine systematische Rückwirkung der gestörten Punktmassenkette auf den störenden Körper gibt.

Die Responsefunktionen lassen sich in einen gravitativen und in einen akustischen Anteil trennen. Mit der Zerlegung

$$\frac{1}{[s^2+\omega_g^2(k)][s^2+\omega_p^2(k)]} = \left\{\frac{1}{\omega_g^2(k)-\omega_p^2(k)}\right\}\left\{\frac{1}{s^2+\omega_p^2(k)} - \frac{1}{s^2+\omega_g^2(k)}\right\}$$

können wir schreiben

$$\begin{aligned} x(k,s) \quad = \quad & \frac{(s^2-2G\varrho S(k))a_x(k,s)+2\Omega\, s\, a_y(k,s)}{[\omega_g^2(k)-\omega_p^2(k)][s^2+\omega_p^2(k)]} - \\ & \frac{(s^2-2G\varrho S(k))a_x(k,s)+2\Omega\, s\, a_y(k,s)}{[\omega_g^2(k)-\omega_p^2(k)][s^2+\omega_g^2(k)]} \end{aligned} \tag{10.51}$$

und

$$\begin{aligned} y(k,s) \quad = \quad & \frac{-2\Omega\, s\, a_x(k,s)+(s^2-3\Omega^2+G\varrho S(k))a_y(k,s)}{[\omega_g^2(k)-\omega_p^2(k)][s^2+\omega_p^2(k)]} - \\ & \frac{-2\Omega\, s\, a_x(k,s)+(s^2-3\Omega^2+G\varrho S(k))a_y(k,s)}{[\omega_g^2(k)-\omega_p^2(k)][s^2+\omega_g^2(k)]}. \end{aligned} \tag{10.52}$$

Nun betrachten wir zunächst nur den gravitativen Dispersionszweig $\omega_g(k)$ und deren Response-Verhalten. Man erhält zunächst

$$x_g(k,s) = -\frac{(s^2-2G\varrho S(k))a_x(k,s)+2\Omega\, s\, a_y(k,s)}{[\omega_g^2-\omega_p^2][s^2+\omega_g^2(k)]} \tag{10.53}$$

und

$$y_g(k,s) = +\frac{2\Omega\, s\, a_x(k,s)+(3\Omega^2-s^2-G\varrho S(k))a_y(k,s)}{[\omega_g^2-\omega_p^2][s^2+\omega_g^2(k)]}. \tag{10.54}$$

Dies sind die allgemeinen Formeln für den gravitativen Ast. Wir werden später sehen, daß die Selbstgravitation der Punktmassenkette für das Responseverhalten nicht wesentlich ist. Wir können also in guter Näherung $G\varrho/\Omega^2 \approx 0$ setzen.

10.6 Der gravitative Response

Wir betrachten die Funktion

$$\Phi(k,t) = Gm_s \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{-\imath kna}}{\sqrt{D^2 + (na + vt)^2}} \tag{10.55}$$

Diese Funktion stellt die rämliche Fouriertransfomation des Gravitationspotentials eines Mondes dar, der sich im abstand D parallel zur Teilchenkette mit der Geschwindigkeit v bewegt. Da a gegenüber D immer sehr klein sein soll, erscheint es sinnvoll, die obige Summe durch die Poissonsche Summationsformel darzustellen. Da gilt

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(y)\, e^{+2\pi\imath xy}\, dy, \qquad G(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, e^{-2\pi\imath xy}\, dx. \tag{10.56}$$

lautet die Summationsformel

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} F(\lambda m) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} G\left(\frac{n}{\lambda}\right). \tag{10.57}$$

Mit der Funktion

$$F(x) = \frac{e^{-\imath kx}}{\sqrt{D^2 + x^2}} \tag{10.58}$$

folgt

$$G(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\imath[2\pi y + k]x}}{\sqrt{D^2 + x^2}}\, dx = 2 \int_{0}^{\infty} \frac{\cos[(2\pi y + k)x]}{\sqrt{D^2 + x^2}}\, dx. \tag{10.59}$$

Dies Integral kann durch eine modifizierte Besselfunktion

$$G(y) = 2\, \mathbf{K}_0(|kD + 2\pi Dy|) \tag{10.60}$$

dargestellt werden. Für die modifizierte Funktion

$$F(x) = e^{\imath k\, v\, t} \frac{e^{-\imath k(x+vt)}}{\sqrt{D^2 + (x+vt)^2}} \tag{10.61}$$

gilt nun nach dem Verschiebungssatz

$$G(y) = 2\,\mathbf{K}_0(|kD + 2\pi Dy|)\, e^{\imath([k+2\pi y]vt)}. \tag{10.62}$$

Mit der Summationsformel folgt also

$$\begin{aligned} \Phi(k,t) &= Gm_s \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{-\imath kna}}{\sqrt{D^2 + (na+vt)^2}} \\ &= 2\frac{Gm_s}{a} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathbf{K}_0(|kD + 2\pi \frac{D}{a} n|)\, e^{\imath([k+2\pi \frac{n}{a}]vt)}. \end{aligned} \tag{10.63}$$

Wie man sieht, kann man sich wegen $D/a \gg 1$ im zweiten Summanden auf den Term mit $n = 0$ beschränken. Also gilt genügend genau

$$\Phi(k,t) = 2\frac{Gm_s}{a}\, \mathbf{K}_0(|kD|)\, e^{\imath k\, v\, t}. \tag{10.64}$$

Wir wollen nun zwei konkrete Situationen betrachten. Der störende Mond soll sich einmal außerhalb eines Teilchenringes bewegen, ein andersmal innerhalb eines Ringes. Der erste Fall wird in der Literatur innere Lindbladresonanz (ILR), der zweite äußere Lindbladresonanz (OLR) genannt. In der Hillschen Approximation bedeutet dies, daß sich im Falle einer ILR der Mond sich im Gebiet $x > 0$ befindet und nach $y \to -\infty$ bewegt. In dieser Situation gilt dann für die Beschleunigungen auf ein Teilchen mit der Marke n zum Zeitpunkt t

$$a_x(k,t) = -\frac{\partial}{\partial D}\Phi(k,t) = +2\frac{Gm_s}{a}\, k\, \mathbf{K}_1(kD)\, e^{\imath k\, v\, t}. \tag{10.65}$$

Das hier im Nenner stehende a fällt bei einer späteren räumlichen Rücktransformation wieder heraus. Für $a_y(k,t)$ erhält man analog

$$a_y(k,t) = \frac{\partial}{\partial(vt)}\Phi(k,t) = +2\imath\, \frac{Gm_s}{a}\, k\, \mathbf{K}_0(kD)\, e^{\imath k\, v\, t}. \tag{10.66}$$

Durch die *formale* Transformation $D \to -D$ und $v \to -v$ wird dann auch die Störung eines Mondes beschrieben, der sich *innerhalb* eines Ringes bewegt.

Eine Laplacetransformation dieser Größen bezüglich der Zeit führen wir nicht aus, da hier die Kopplung durch ein Faltungsintegral dargestellt werden soll. Für den gravitativen Ast ohne Selbstgravitation, also $\omega_g^2 \approx \Omega^2$ und $\Omega_p^2 \approx 0$, ergibt sich so zunächst

$$x_g(k,s) = -\left(\frac{s^2\, a_x(k,s) + 2\Omega\, s\, a_y(k,s)}{\Omega^2\,[s^2+\Omega^2]}\right) \tag{10.67}$$

und

$$y_g(k,s) = \left(\frac{2\Omega\, s\, a_x(k,s) + (3\Omega^2 - s^2)\, a_y(k,s)}{\Omega^2\,[s^2+\Omega^2]}\right). \tag{10.68}$$

Durch eine Rücktransformation bezüglich der Zeit folgt dann zunächst

$$x_g(k,t) = \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \bullet a_x(k,t) - 2\,\frac{\cos(\Omega t)}{\Omega} \bullet a_y(k,t) \tag{10.69}$$

und

$$y_g(k,t) = 2\frac{\cos(\Omega t)}{\Omega} \bullet a_x(k,t) + 4\,\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \bullet a_y(k,t) \tag{10.70}$$

Eine zeitliche Faltung zwischen zwei Funktionen $F_1(t)$ und $F_2(t)$ ist dabei durch das Integral

$$F_1(t) \bullet F_2(t) = \int_0^t F_1(t')\, F_2(t-t')\, dt' \equiv \int_0^t F_2(t')\, F_1(t-t')\, dt' \tag{10.71}$$

gegeben.

Da in der obigen Näherung der gravitative Dispersionszweig nicht von k abhängig ist, können wir sofort eine Rücktransformation bezüglich k durchführen. Wir erhalten einfach

$$x_g(n,t) = \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \bullet a_x(n,t) - 2\,\frac{\cos(\Omega t)}{\Omega} \bullet a_y(n,t) \tag{10.72}$$

und

$$y_g(n,t) = 2\frac{\cos(\Omega t)}{\Omega} \bullet a_x(n,t) + 4\,\frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \bullet a_y(n,t). \tag{10.73}$$

Für die Funktionen $a_x(n,t)$ und $a_y(n,t)$ setzen wir nun

$$a_x(n,t) = +Gm_s \frac{D}{\left(\sqrt{D^2+(na+vt)^2}\right)^3} \tag{10.74}$$

und

$$a_y(n,t) = -Gm_s \frac{na+vt}{\left(\sqrt{D^2+(na+vt)^2}\right)^3}, \tag{10.75}$$

wenn der Mond sich außerhalb des Ringes bewegt. Nach dem Faltungssatz ergibt sich dann

$$\begin{aligned} x(n,t) &= +Gm_s \frac{D}{\Omega} \int_0^t \frac{\sin[\Omega(t-t')]\,dt'}{\left(\sqrt{D^2+(na+vt')^2}\right)^3} \\ &\quad +2Gm_s \frac{1}{\Omega} \int_0^t \frac{\cos[\Omega(t-t')][na+vt']\,dt'}{\left(\sqrt{D^2+(na+vt')^2}\right)^3} \end{aligned} \tag{10.76}$$

und

$$\begin{aligned} y(n,t) &= +2Gm_s \frac{D}{\Omega} \int_0^t \frac{\cos[\Omega(t-t')]\,dt'}{\left(\sqrt{D^2+(na+vt')^2}\right)^3} \\ &\quad -4Gm_s \frac{1}{\Omega} \int_0^t \frac{\sin[\Omega(t-t')][na+vt']\,dt'}{\left(\sqrt{D^2+(na+vt')^2}\right)^3} \end{aligned} \tag{10.77}$$

Mit der neuen Variablen u, definiert durch

$$vt' + na = D\,u, \tag{10.78}$$

lauten die obigen Integrale

$$\begin{aligned} x(n,t)/D &= +\frac{2}{3}\left(\frac{m_s}{M}\right)\left(\frac{R}{D}\right)^3 \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sin[\frac{2}{3}(u_2-u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3} \\ &\quad +\frac{4}{3}\left(\frac{m_s}{M}\right)\left(\frac{R}{D}\right)^3 \int_{u_1}^{u_2} \frac{u\cos[\frac{2}{3}(u_2-u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3} \end{aligned} \tag{10.79}$$

und

$$
\begin{aligned}
y(n,t)/D &= +\frac{4}{3}\left(\frac{m_s}{M}\right)\left(\frac{R}{D}\right)^3 \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{\cos[\frac{2}{3}(u_2-u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3} \\
&\quad -\frac{8}{3}\left(\frac{m_s}{M}\right)\left(\frac{R}{D}\right)^3 \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{u\sin[\frac{2}{3}(u_2-u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}. \qquad (10.80)
\end{aligned}
$$

Dabei sind die Grenzen u_1 und u_2 durch

$$
u_1 = \frac{na}{D}, \qquad u_2 = \frac{na+vt}{D} \qquad (10.81)
$$

gegeben.

Im Falle einer *inneren Lindbladresonanz* bewegt sich der Mond in Richtung negativer y-Richtung, also seine Marke n_M ist durch $n_M(t) = -vt/a$ gegeben. Setzen wir uns nun als Beobachter auf den Mond und beobachten, welche Welle im Ring in seiner Nachbarschaft nach langer Zeit angeregt wird, so können wir die untere Integrationsgrenze gegen $-\infty$ gehen lassen. Die obere Integrationsgrenze lautet dann $u_2 = (n-n_M)a/D$. Sie stellt die tangentiale Abweichung vom Konjunktionspunkt des Mondes bezüglich des Ringes dar. Wir bezeichnen sie als $\Theta \equiv u_2$.

Mit dem Parameter β, definiert durch

$$
\beta = \frac{2}{3}\left(\frac{m_s}{M}\right)\left(\frac{R}{D}\right)^3, \qquad (10.82)
$$

gilt dann mit

$$
\begin{aligned}
x(n,t) &= \beta\, D\, X(\Theta) \\
y(n,t) &= 2\beta\, D\, Y(\Theta), \qquad (10.83)
\end{aligned}
$$

wobei die Funktionen $X(\Theta)$ und $Y(\Theta)$ durch

$$
X(\Theta) = +\int\limits_{-\infty}^{\Theta} \frac{\sin[\frac{2}{3}(\Theta-u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3} + 2\int\limits_{-\infty}^{\Theta} \frac{u\cos[\frac{2}{3}(\Theta-u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3} \qquad (10.84)
$$

und

$$
Y(\Theta) = +\int\limits_{-\infty}^{\Theta} \frac{\cos[\frac{2}{3}(\Theta-u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3} - 2\int\limits_{-\infty}^{\Theta} \frac{u\sin[\frac{2}{3}(\Theta-u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}. \qquad (10.85)
$$

gegeben sind. Diese Funktionen können wir auch

$$\begin{aligned} X(\Theta) &= +\sin\left(\frac{2}{3}\Theta\right)\left\{\int\limits_{-\infty}^{\Theta} \frac{\cos(\frac{2}{3}u)+2u\sin(\frac{2}{3}u)}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}\,du\right\} \\ &\quad -\cos\left(\frac{2}{3}\Theta\right)\left\{\int\limits_{-\infty}^{\Theta} \frac{\sin(\frac{2}{3}u)-2u\cos(\frac{2}{3}u)}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}\,du\right\} \end{aligned} \tag{10.86}$$

und

$$\begin{aligned} Y(\Theta) &= +\sin\left(\frac{2}{3}\Theta\right)\left\{\int\limits_{-\infty}^{\Theta} \frac{\sin(\frac{2}{3}u)-2u\cos(\frac{2}{3}u)}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}\,du\right\} \\ &\quad +\cos\left(\frac{2}{3}\Theta\right)\left\{\int\limits_{-\infty}^{\Theta} \frac{\cos(\frac{2}{3}u)+2u\sin(\frac{2}{3}u)}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}\,du\right\} \end{aligned} \tag{10.87}$$

schreiben.

Die obigen Formeln beschreiben eine sogenannte “wake”-Struktur oder in Analogie zur Schiffahrt das “Kielwasser” oder die “Bugwellen” des Mondes im Kettenring. Teilchen, die noch keine Wechselwirkung mit dem Mond hatten ($\Theta < 0$), werden auch kaum aus ihrer Ruhelage ausgelenkt, während nach der Wechselwirkung ($\Theta > 0$) eine Welle mit einer bestimmten Amplitude und Wellenlänge im Ring angeregt ist. Für $\Theta \to \infty$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{x(\Theta)}{D} &\to \frac{8}{9}\left\{2\mathbf{K}_0\left(\frac{2}{3}\right)+\mathbf{K}_1\left(\frac{2}{3}\right)\right\}\left(\frac{m_s}{M}\right)\left(\frac{R}{D}\right)^3 \sin\left(\frac{2}{3}\Theta\right), \\ \frac{y(\Theta)}{D} &\to \frac{16}{9}\left\{2\mathbf{K}_0\left(\frac{2}{3}\right)+\mathbf{K}_1\left(\frac{2}{3}\right)\right\}\left(\frac{m_s}{M}\right)\left(\frac{R}{D}\right)^3 \cos\left(\frac{2}{3}\Theta\right) \end{aligned} \tag{10.88}$$

Die obigen Formeln gelten für eine ILR. Bei einer OLR gilt dagegen für die Beschleunigungen

$$a_x(n,t) = -Gm_s \frac{D}{\left(\sqrt{D^2+(na-vt)^2}\right)^3} \tag{10.89}$$

und

$$a_y(n,t) = -Gm_s \frac{na - vt}{\left(\sqrt{D^2 + (na - vt)^2}\right)^3}. \tag{10.90}$$

Nach dem Faltungssatz ergibt sich dann

$$\begin{aligned} x(n,t) &= -Gm_s \frac{D}{\Omega} \int_0^t \frac{\sin[\Omega(t-t')]\,dt'}{\left(\sqrt{D^2 + (na - vt')^2}\right)^3} \\ &\quad +2Gm_s \frac{1}{\Omega} \int_0^t \frac{\cos[\Omega(t-t')][na - vt']\,dt'}{\left(\sqrt{D^2 + (na - vt')^2}\right)^3} \end{aligned} \tag{10.91}$$

und

$$\begin{aligned} y(n,t) &= -2Gm_s \frac{D}{\Omega} \int_0^t \frac{\cos[\Omega(t-t')]\,dt'}{\left(\sqrt{D^2 + (na - vt')^2}\right)^3} \\ &\quad -4Gm_s \frac{1}{\Omega} \int_0^t \frac{\sin[\Omega(t-t')][na - vt']\,dt'}{\left(\sqrt{D^2 + (na - vt')^2}\right)^3}. \end{aligned} \tag{10.92}$$

Mit der neuen Variablen u

$$vt' - na = D\,u, \tag{10.93}$$

lauten die obigen Integrale jetzt

$$\begin{aligned} x(n,t)/D &= -\frac{2}{3}\left(\frac{m_s}{M}\right)\left(\frac{R}{D}\right)^3 \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sin[\frac{2}{3}(u_2 - u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3} \\ &\quad -\frac{4}{3}\left(\frac{m_s}{M}\right)\left(\frac{R}{D}\right)^3 \int_{u_1}^{u_2} \frac{u\cos[\frac{2}{3}(u_2 - u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3} \end{aligned} \tag{10.94}$$

und

$$
\begin{aligned}
y(n,t)/D &= -\frac{4}{3}\left(\frac{m_s}{M}\right)\left(\frac{R}{D}\right)^3 \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{\cos[\frac{2}{3}(u_2-u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3} \\
&\quad +\frac{8}{3}\left(\frac{m_s}{M}\right)\left(\frac{R}{D}\right)^3 \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{u\sin[\frac{2}{3}(u_2-u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}. \qquad (10.95)
\end{aligned}
$$

Dabei sind die Grenzen u_1 und u_2 in der OLR durch

$$
u_1 = -\frac{na}{D}, \qquad u_2 = \frac{vt-na}{D} \qquad (10.96)
$$

gegeben.

Im Falle der OLR ist die Position des Mondes durch $n_M(t) = vt$ gegeben. Die Grenze u_1 strebt also wieder gegen unendlich. Die Grenze u_2 ist dagegen nun $u_2 = -\Theta$. Anstatt der Funktionen 10.97 und 10.98 gilt jetzt

$$
X_{OLR}(\Theta) = +\int\limits_{-\infty}^{-\Theta} \frac{\sin[\frac{2}{3}(\Theta+u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3} - 2\int\limits_{-\infty}^{-\Theta} \frac{u\cos[\frac{2}{3}(\Theta+u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3} \qquad (10.97)
$$

und

$$
Y_{OLR}(\Theta) = -\int\limits_{-\infty}^{-\Theta} \frac{\cos[\frac{2}{3}(\Theta+u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3} - 2\int\limits_{-\infty}^{-\Theta} \frac{u\sin[\frac{2}{3}(\Theta+u)]\,du}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}. \qquad (10.98)
$$

Dieses können wir auch

$$
\begin{aligned}
X_{OLR}(\Theta) &= +\sin\left(\frac{2}{3}\Theta\right)\left\{\int\limits_{-\infty}^{-\Theta} \frac{\cos(\frac{2}{3}u)+2u\sin(\frac{2}{3}u)}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}\,du\right\} \\
&\quad +\cos\left(\frac{2}{3}\Theta\right)\left\{\int\limits_{-\infty}^{-\Theta} \frac{\sin(\frac{2}{3}u)-2u\cos(\frac{2}{3}u)}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}\,du\right\} \qquad (10.99)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
Y_{OLR}(\Theta) &= +\sin\left(\frac{2}{3}\Theta\right)\left\{\int_{-\infty}^{-\Theta}\frac{\sin(\frac{2}{3}u)-2u\cos(\frac{2}{3}u)}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}\,du\right\} \\
&\quad -\cos\left(\frac{2}{3}\Theta\right)\left\{\int_{-\infty}^{-\Theta}\frac{\cos(\frac{2}{3}u)+2u\sin(\frac{2}{3}u)}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}\,du\right\} \qquad (10.100)
\end{aligned}
$$

schreiben.

Wir können die obigen Formeln auch im "Einteilchenbild" herleiten. Hier ruht ein Teilchen der Masse m im Koordinatenursprung und wird von einem Mond, der, aus dem Unendlichen kommend, sich im Abstand D am Teilchen vorbeibewegt und wieder ins Unendliche verschwindet, gestört. Die Frage ist nun, welche Bewegung das Teilchen nach dieser Wechselwirkung mit welcher Amplitude ausführt.

Für die Bewegung in der x-Koordinate lautet die Lösung einfach

$$
x(t) = \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \bullet a_x(t) + 2\left\{\frac{1-\cos(\Omega t)}{\Omega}\right\} \bullet a_y(t). \qquad (10.101)
$$

Die 1 vor der Cosinus-Funktion rührt vom entarten akustischen Zweig der Punktmassenkette her. Für die Funktionen $a_x(t)$ und $a_y(t)$ setzen wir nun

$$
a_x(t) = +Gm_s\frac{D}{\left(\sqrt{D^2+v^2(t-T)^2}\right)^3} \qquad (10.102)
$$

und

$$
a_y(t) = -Gm_s\frac{v(t-T)}{\left(\sqrt{D^2+v^2(t-T)^2}\right)^3} \qquad (10.103)
$$

Nach dem Faltungssatz ergibt sich dann für die Bewegung in x-Richtung, wenn die Wechselwirkung von $t=0$ bis $t=+2T$ anhält, für Zeiten $t>2T$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Gm_s\frac{D}{\Omega}\int_0^{2T}\frac{\sin[\Omega(t-t')]\,dt'}{\left(\sqrt{D^2+v^2(t'-T)^2}\right)^3} + \\
&\quad 2Gm_s\frac{v}{\Omega}\int_0^{2T}\frac{[\cos[\Omega(t-t')]-1][t'-T]\,dt'}{\left(\sqrt{D^2+v^2(t'-T)^2}\right)^3} \qquad (10.104)
\end{aligned}
$$

Mit der neuen Variablen $t' - T = \tau$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} x(t_0) &= G m_s \frac{D}{\Omega} \int\limits_{-T}^{+T} \frac{\sin[\Omega(t_0 - \tau)]\, d\tau}{\left(\sqrt{D^2 + v^2\tau^2}\right)^3} + \\ & \quad 2 G m_s \frac{v}{\Omega} \int\limits_{-T}^{+T} \frac{[\cos[\Omega(t_0 - \tau)] - 1]\, \tau\, d\tau}{\left(\sqrt{D^2 + v^2\tau^2}\right)^3}. \end{aligned} \tag{10.105}$$

Im Zeitpunkt $t_0 = 0$ befindet sich der störende Mond beim Ringteilchen. Nun machen wir den Grenzübergang $T \to \infty$. Mit der Substitution $\tau = D\, u/v$ folgt dann nach einiger Umrechnung

$$\begin{aligned} x(t_0) &= G m_s \frac{D}{\Omega} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[\Omega(t_0 - \tau)]\, d\tau}{\left(\sqrt{D^2 + v^2\tau^2}\right)^3} + \\ & \quad 2 G m_s \frac{v}{\Omega} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos[\Omega(t_0 - \tau)]\, \tau\, d\tau}{\left(\sqrt{D^2 + v^2\tau^2}\right)^3}. \end{aligned} \tag{10.106}$$

Nach der weiteren Substitution $x = D\, u/v$ ergibt sich weiter

$$\frac{x(t_0)}{D} = \frac{2}{3} \left(\frac{m_s}{M}\right) \left(\frac{R}{D}\right)^3 \sin(\Omega t_0) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{2u \sin(\frac{2}{3}u) + \cos(\frac{2}{3}u)}{[1 + u^2]^{3/2}} \right\} du. \tag{10.107}$$

Auswertung des Integrals führt aber zu dem Ergebnis

$$\frac{x(t_0)}{D} = \frac{8}{9} \left\{ 2\mathbf{K}_0(2/3) + \mathbf{K}_1(2/3) \right\} \left(\frac{m_s}{M}\right) \left(\frac{R}{D}\right)^3 \sin(\Omega t_0), \tag{10.108}$$

also genau das gleiche Ergebnis wie im Vielteilchenmodell.

10.7 Ringmonde als “Schäferhunde”?

Anfang der achziger Jahre war das sogenannte “shepherd-satellite” Modell für die Bildung und Stabilität schmaler Planetenringe sehr populär. Was

besagte dieses Modell und ist es heute eigentlich noch relevant? Letztendlich behandelte dieses Modell das gleiche Problem wie das *jet-stream* Modell von Alfvén aus den siebziger Jahren für die Fokussierung von Teilchen zu schmalen Materieringen um die Protosonne. Im folgenden wollen wir diese Frage mit unserem Modell etwas genauer beleuchten. Dazu wollen wir zunächst überprüfen, ob es eine Rückwirkung des Ringes auf den Mond gibt. Erzeugt also die Welle im Ring ein Gravitationspotential, welches den Mond ständig beschleunigt oder abbremst, völlig analog wie im Erde–Mond–System die Gezeitenwellen in den Weltmeeren? Diese *wichtige* Frage nach der *"Migration"* von Monden in Planetenringsystemen können wir nun mit der obigen Lösung beantworten.

Die resultierende *tangentiale* Beschleunigung der Ringwelle auf einen äußeren Mond kann dann durch das Integral

$$A_y = G\frac{\tau}{D}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Theta + 2\beta Y(\Theta)}{\left(\sqrt{[1-\beta X(\Theta)]^2 + [\Theta + 2\beta Y(\Theta)]^2}\right)^3}\, d\Theta \qquad (10.109)$$

ausgedrückt werden, wo Θ wieder in Einheiten von D die Bogenlänge vom Konjunktionspunkt des Mondes im Ring darstellt und $\tau = m/a$ die Massendichte pro Länge des Ringes bezeichnet. In erster Ordnung in β gilt dann

$$A_y = G\frac{\tau}{D}\,\beta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{2Y(\Theta)}{(\sqrt{1+\Theta^2})^3} + \frac{3\Theta X(\Theta) - 6\Theta^2 Y(\Theta)}{(\sqrt{1+\Theta^2})^5} \right\} d\Theta. \quad (10.110)$$

Durch partielle Integration des letzten Termes folgt weiter

$$A_y = G\frac{\tau}{D}\,\beta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{X'(\Theta) - 2\Theta Y'(\Theta)}{(\sqrt{1+\Theta^2})^3} \right\} d\Theta, \qquad (10.111)$$

wobei Striche Ableitungen nach Θ bedeuten. Es gilt auch eine entsprechende Formel für die radiale Beschleunigung A_x, doch spielt sie für das Drehmoment auf den Ringmond keine Rolle.

Das hier stehende Integral läßt sich aber mit den bekannten Funktionen $X(\Theta)$ und $Y(\Theta)$ und deren Symmetrieeigenschaften exakt berechnen. In den obigen Integralen sind nur diejenigen Terme wichtig, deren Potenz in

Θ gerade ist. Spalten wir die Integrationsgrenzen der Integrale in (10.99) und (10.100) in zwei Anteile auf, nämlich von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis Θ, so sind in der Formel (10.111) nur die Ausdrücke

$$X'(\Theta) = +\frac{2}{3}\beta_0 \cos\left(\frac{2}{3}\Theta\right) \tag{10.112}$$

$$Y'(\Theta) = -\frac{2}{3}\beta_0 \sin\left(\frac{2}{3}\Theta\right) \tag{10.113}$$

relevant, wobei die Konstante β_0 durch

$$\beta_0 = \frac{2}{3}\left\{2\mathbf{K}_0\left(\frac{2}{3}\right) + \mathbf{K}_1\left(\frac{2}{3}\right)\right\} \tag{10.114}$$

gegeben ist. Diese Konstante ist nur *halb so groß* wie der asymptotische Wert (10.108). Einsetzen dieser Ausdrücke in (10.111) ergibt zunächst

$$A_y = \frac{2}{3}\beta\beta_0\, G\frac{\tau}{D}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\cos\left(\frac{2}{3}\Theta\right) + 2\Theta\sin\left(\frac{2}{3}\Theta\right)}{(\sqrt{1+\Theta^2})^3}\right\} d\Theta. \tag{10.115}$$

Dieses Integral kann wieder durch modifizierte Besselfunktionen darstellt werden und man erhält endgültig

$$A_y = \frac{32}{81}\left|2\mathbf{K}_0\left(\frac{2}{3}\right) + \mathbf{K}_1\left(\frac{2}{3}\right)\right|^2 G\frac{\tau}{D}\left(\frac{m_s}{M}\right)\left(\frac{R}{D}\right)^3. \tag{10.116}$$

Dermott hat 1984 im obigen Integral (10.111) nur den ersten radialen $X'(\Theta)$-Term berücksichtigt, da er die tangentialen Verdichtungen im Ring vernachlässigte[2].

Damit ist also klar, daß ein Mond, der sich außerhalb eines Teilchenringes bewegt, permanent in seiner Bahn beschleunigt wird. Die Hauptkonsequenz ist eine **radiale Wanderung** des Mondes nach außen, nicht aber eine stetige Zunahme der Bahnexzentrizität des Mondes! Dies Resultat gilt natürlich zunächst nur in der Hillschen Approximation, in der die Teilchenkette in tangentialer Richtung unendlich ausgedehnt ist und der störende Mond nicht mehrmals mit dem gleichen Teilchen

[2] Dermott, S.F. 1984. Dynamics of narrow Rings, In *Planetary Rings*, Ed. Greenberg & Brahic, Arizona Press, Tucson, Arizona, s. 604

wechselwirkt. Nur wenn Dämpfung im Ring herrscht, kann das obige Modell auf ein globales Ring-Satelliten Modell angewendet werden. In jedem Fall könnte man dann von einer Art *Dynamical friction* sprechen.

Die Bewegungsgleichungen des Mondes lauten nun ($A_x \sim 0$)

$$\ddot{x} - 2\Omega\,\dot{y} = 3\Omega^2\,x; \qquad \ddot{y} + 2\Omega\,\dot{x} = A_y. \tag{10.117}$$

Daraus leitet man

$$\ddot{x} + \Omega^2\,x = 2\Omega\,A_y\,t \tag{10.118}$$

Bei verschwindenden Anfangsbedingungen lautet die Lösung dieser Gleichung

$$x(t) = \frac{2\,A_y}{\Omega}\left[t - \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega}\right] \tag{10.119}$$

Der zweite Term, der eine schwache Anregung der Bahnexzentrizität bedeutet, kann hier völlig vernachlässigt werden. Für die Bewegung in tangentialer Richtung gilt dann

$$y(t) = -\frac{3}{2}\,A_y\,t^2 + 4A_y\left[\frac{1-\cos(\Omega t)}{\Omega^2}\right] \tag{10.120}$$

Der Mond bewegt sich also wirklich nach außen und wird dabei **langsamer**.

Da der Drehimpuls des Mondes global durch $|\mathbf{L}| = m_s\Omega_s R_s^2$ gegeben ist, folgt dann für das Drehmoment

$$|\dot{\mathbf{L}}| = \frac{1}{2}m_s\Omega_s R_s\dot{R}_s \equiv m_s\,R_s\,A_y. \tag{10.121}$$

Führt man noch die Masse des Ringes durch $2\pi R\tau = m_r$ ein, so folgt mit (10.116) und $D \ll R$ sowie $R_s \approx R$

$$|\dot{\mathbf{L}}| = \frac{16}{81\pi}\left|2\mathbf{K}_0\left(\frac{2}{3}\right) + \mathbf{K}_1\left(\frac{2}{3}\right)\right|^2 G\frac{m_r m_s}{D}\left(\frac{m_s}{M}\right)\left(\frac{R}{D}\right)^3. \tag{10.122}$$

Der numerische Faktor ergibt sich hier zu 0.399135..., was mit Modellrechnungen aus der Literatur ausgezeichnet übereinstimmt[3].

[3] Greenberg, R. 1983, Icarus **53**, 207; Henon, M. 1983, I.A.U. Kolloquium 75, *Planetary Rings*, Toulouse; Goldreich & Tremaine, Ann.Rev.Astron.Astrophys. **20**, 249-283, 1982

Greenberg behauptete 1983, daß es nur deshalb ein Drehmoment gibt, weil *durch die innere Reibung im Ring* eine Phasenverschiebung zwischen der Welle und dem anregenden Mond auftritt. Das ist aber paradoxerweise nach den obigen Ergebnissen bezüglich der gravitierenden Teilchenkette ohne Dissipation falsch. Auch *ohne innere Reibung* gibt es eine Phasenverschiebung und das gravitative Drehmoment ist ungleich Null.

Abschließend schreiben wir die wichtige Beziehung (10.122) noch in der Form

$$\boxed{\frac{|\dot{\mathbf{L}}|}{m_r} = \frac{16}{81\pi}\left|2\mathbf{K}_0\left(\frac{2}{3}\right) + \mathbf{K}_1\left(\frac{2}{3}\right)\right|^2 \frac{G^2 m_s^2}{\Omega^2 D^4} \propto \frac{G^2 m_s^2}{\Omega^2 D^4}}, \tag{10.123}$$

wo $\Omega^2 = GM/R^3$ ist. In dieser Form tauchte die Drehmomenten-Formel zum ersten Mal bei Goldreich und Tremaine in einer Arbeit über die Uranusringe 1979 auf. Doch bis heute ist nicht ganz klar, inwieweit der obige Mechanismus wirklich dafür verantwortlich ist, daß ein schmaler Teilchenring *immer* von zwei Monden begleitet sein muß. Denn die Stabilität zumindest der großen Teilchen ist ja schon durch die Selbstgravitation garantiert. Dissipation im Ring ist eine notwendige Voraussetzung, damit der "shepherd satellite" Mechanismus funktionieren kann.

Die obigen Betrachtungen spielen eine Rolle bei der „Wanderbewegung" von Planetenembryonen in einer Gas-Staubscheibe nach innen oder außen.

10.8 Der Energietransfer

Eng im Zusammenhang mit dem "Schäferhundmodell" steht die Frage nach dem Energietransfer, den der Mond in den Teilchenring induziert. Wird diese Energie durch den Ring vollständig dissipiert, verliert der Ring mechanische Energie. Um diese Energierate zu berechnen, multiplizieren wir die Gleichung (3.9) mit $\dot{x}(n,t)$ und die Gleichung (3.10) mit $\dot{y}(n,t)$. Nach Addition und Vernachlässigung der Selbstgravitation im Ring ergibt sich zunächst die Gleichung

$$\begin{aligned}&\dot{x}(n,t)\ddot{x}(n,t) + \dot{y}(n,t)\ddot{y}(n,t) - 3\Omega^2\, x(n,t)\dot{x}(n,t) = \\ &a_x(n,t)\dot{x}(n,t) + a_y(n,t)\dot{y}(n,t).\end{aligned} \tag{10.124}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung noch mit der Teilchenmasse m, so stellt die linke Seite der Gleichung den Energietransfer pro Zeiteinheit auf das Teilchen mit der Marke n dar. Summiert über alle Teilchen in der Kette ergibt sich dann der gesamte Energietransfer des Mondes auf den Ring zu

$$\frac{dE}{dt} = m \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left[a_x(n,t)\dot{x}(n,t) + a_y(n,t)\dot{y}(n,t) \right]. \tag{10.125}$$

Für den gravitativen Zweig ergibt sich nun für die Geschwindigkeiten wegen (10.72) und (10.73) die Ausdrücke

$$\dot{x}_g(n,t) = \cos(\Omega t) \bullet a_x(n,t) + 2\,\sin(\Omega t) \bullet a_y(n,t) \tag{10.126}$$

$$\dot{y}_g(n,t) = -2\sin(\Omega t) \bullet a_x(n,t) + 4\,\cos(\Omega t) \bullet a_y(n,t) \tag{10.127}$$

Entsprechende Rechnung wie bei den Ortskoordinaten führt zu den Darstellungen

$$\begin{aligned} \dot{x}(n,t)/(\beta\Omega D) &= +\cos\left(\frac{2}{3}\Theta\right) \left\{ \int_{-\infty}^{\Theta} \frac{\cos(\frac{2}{3}u) + 2u\sin(\frac{2}{3}u)}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}\, du \right\} \\ &\quad + \sin\left(\frac{2}{3}\Theta\right) \left\{ \int_{-\infty}^{\Theta} \frac{\sin(\frac{2}{3}u) - 2u\cos(\frac{2}{3}u)}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}\, du \right\} \end{aligned} \tag{10.128}$$

sowie

$$\begin{aligned} \dot{y}/(2\beta\Omega D) &= +\cos\left(\frac{2}{3}\Theta\right) \left\{ \int_{-\infty}^{\Theta} \frac{\sin(\frac{2}{3}u) - 2u\cos(\frac{2}{3}u)}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}\, du \right\} \\ &\quad - \sin\left(\frac{2}{3}\Theta\right) \left\{ \int_{-\infty}^{\Theta} \frac{\cos(\frac{2}{3}u) + 2u\sin(\frac{2}{3}u)}{\left(\sqrt{1+u^2}\right)^3}\, du \right\} \end{aligned} \tag{10.129}$$

Für die Energietransferrate ergibt sich nun zunächst

$$\frac{dE}{dt} = G\frac{m_s}{D}\,\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\dot{x}(n,t) - \Theta\,\dot{y}(n,t)}{\left(\sqrt{1+\Theta^2}\right)^3}\, d\Theta \tag{10.130}$$

$$\frac{dE}{dt} = G\beta_0\beta\tau m_s\Omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{2}{3}\Theta) + 2\Theta\sin(\frac{2}{3}\Theta)}{\left(\sqrt{1+\Theta^2}\right)^3}\, d\Theta \tag{10.131}$$

$$\frac{dE}{dt} = 2\beta_0^2\beta G\tau m_s\Omega \tag{10.132}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{8}{27\pi}\left|2\mathbf{K}_0\left(\frac{2}{3}\right) + \mathbf{K}_1\left(\frac{2}{3}\right)\right|^2 G\frac{m_r m_s}{R}\left(\frac{m_s}{M}\right)\left(\frac{R}{D}\right)^3 \Omega. \tag{10.133}$$

Mit der Formel für das Drehmoment (10.122) läßt sich dies auch schreiben als

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \frac{3}{2}\left(\frac{D}{R}\right)\Omega\,|\dot{\mathbf{L}}|} \tag{10.134}$$

Diese wichtige Formel stimmt nicht mit derjenigen von Dermott überein. (Dermott, *Planetary Rings*, 1984, p. 603). Dermott vernachlässigt vollständig den Faktor $3D/(2R)$. Auch die Formel von Borderies (*Planetary Rings*, 1984, p. 730) ist um den Faktor 2 verschieden (anstatt 3/2 steht bei ihr 3). Man erhält diesen Faktor, wenn man eine globale Herleitung mit Hilfe von zwei Testmassen auf einer Kreisbahn vornimmt. Wie es aussieht, scheint es keine konsistente Herleitung für die Energieformel der *Mond-Ring Wechselwirkung* in der Literatur zu geben. Damit ist auch unklar, ob der „shepherd“ Mechanismus, von Goldreich und Tremaine 1979 für die Stabilität von schmalen Ringfäden vorgeschlagen, in Planetenringen wirklich „funktioniert“.

Anhang

A.1 Die Poissonsche Summationsformel

Eine bemerkenswerte mathematische Struktur besitzt die Poisson'sche Summationsformel. Mit den eindimensionalen oder mehrdimensionalen Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ definieren wir die Integraltransformationen (Fouriertransformationen)

$$\begin{aligned} F[\mathbf{x}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} G[\mathbf{y}]\, e^{+2\pi\imath\, \mathbf{x}\circ\mathbf{y}}\, d\mathbf{y}, \\ G[\mathbf{y}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} F[\mathbf{x}]\, e^{-2\pi\imath\, \mathbf{x}\circ\mathbf{y}}\, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

lautet die Summationsformel

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} F[a\,\mathbf{m}] = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} G\left[\frac{\mathbf{n}}{a}\right], \tag{A.2}$$

wo a eine beliebige reelle „Gitterzahl“ sein kann. Eine Summe im Gitterraum wird durch eine Summe im reziproken Gitterraum dargestellt. Die erste Jacobi - Transformation der Thetafunktionen kann mit ihr hergeleitet werden. Es gilt zudem der nützliche Satz: Hat $F[\mathbf{x}]$ die Fouriertransformierte $G[\mathbf{y}]$, so hat $F[\mathbf{x}+\mathbf{c}]$ die Fouriertransformierte $G[\mathbf{y}]\, e^{2\pi\imath\, \mathbf{c}\circ\mathbf{y}}$.

A.2 Die lineare Punktmassenkette

Sehr eng verwandt mit dem dynamischen Problem des Maxwell'schen Teilchenringes von 1859 ist das Problem einer elastisch gekoppelten

Punktmassenkette von E. SCHRÖDINGER aus dem Jahre 1914[1]. ERWIN SCHRÖDINGER betrachtete die gekoppelten linearen Differentialgleichungen

$$\ddot{x}[n,t] = \left(\frac{\omega_g}{2}\right)^2 \{x[n+1,t] - 2\,x[n,t] + x[n-1,t]\}\,, \tag{A.3}$$

mit *diskreten Marken* n, die dadurch entstehen, daß man eine unendlich lange Punktmassenkette betrachtet, in der alle Teilchen in der Ruhelage einen konstanten Abstand a haben. Kleine Auslenkungen x_n aus der Ruhelage führen dann zu elastischen Spannungen, woraus die obige Bewegungsgleichung entsteht. ω_g ist die sogenannte *Grenzfrequenz* der Kette und drückt die Stärke der Kopplungen aus. Punkte bedeuten Ableitungen nach der Zeit.

E. SCHRÖDINGER löste die obige Gleichung durch einen genialen Kunstgriff mit Hilfe der Linearbeziehungen zwischen drei aufeinanderfolgenden Besselfunktionen ([27]). Wir dagegen multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit $e^{-\imath k\,n\,d}$ und wenden die diskrete räumliche Fouriertransformation der Form

$$X[k] = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n]\, e^{-\imath k\,n\,d} \tag{A.4}$$

$$x[n] = \frac{d}{2\pi} \int_{-\pi/d}^{+\pi/d} X[k]\, e^{+\imath k\,n\,d}\, dk \tag{A.5}$$

an. d bedeutet hier wieder den Abstand der einzelnen Oszillatoren voneinander. Mit dem Verschiebungssatz

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n+1]\, e^{-\imath k\,n\,d} &= X[k]\, e^{+\imath k\,d}, \\ \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n-1]\, e^{-\imath k\,n\,d} &= X[k]\, e^{-\imath k\,d} \end{aligned} \tag{A.6}$$

ergibt sich so für die Fourierkoeffizienten die Differentialgleichung

$$\ddot{X}[k,t] + \omega[k]^2\, X[k,t] = 0. \tag{A.7}$$

[1] Schrödinger, E. (1914): *Zur Dynamik elastisch gekoppelter Punktsysteme.* Annalen der Physik **44**, 916-934

Hier ist

$$\boxed{\omega[k] = \omega_g \, \sin\left[\frac{k\,d}{2}\right]} \tag{A.8}$$

die Dispersionsrelation der Teilchenkette.

Wir betrachten jetzt eine ganz spezielle Anfangssituation in der Kette, wo zum Zeitpunkt $t = 0$ *nur* das Teilchen mit der Marke $n = 0$ die Geschwindigkeit $\dot{x}(0)$ und die Anfangsauslenkung $x(0)$ hat. Dann müssen alle Fourierkoeffizienten zu Beginn den Wert

$$X[k,0] = x[0]; \qquad \dot{X}[k,0] = \dot{x}[0] \tag{A.9}$$

haben. Die zeitliche Entwicklung der Fourierkoeffizienten dieser speziellen Anfangssituation liefert die allgemeine Lösung der Gleichung (A.7) zu

$$X[k,t] = x[0] \, \cos\left[\omega[k]\,t\right] + \dot{x}[0] \, \frac{\sin[\omega[k]\,t]}{\omega[k]} \tag{A.10}$$

Einsetzen in die Rücktransformation liefert die raum - zeitliche Lösung

$$x[n,t] = x[0] \, \mathbf{P}[n,t] + \dot{x}[0] \, \mathbf{Q}[n,t] \tag{A.11}$$

mit den beiden *Propagatoren*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[n,t] &= \frac{d}{\pi} \int\limits_0^{\pi/d} \cos[\omega(k)\,t] \, \cos[k\,n\,d] \, dk, \\ \mathbf{Q}[n,t] &= \frac{d}{\pi} \int\limits_0^{\pi/d} \frac{\sin[\omega(k)\,t]}{\omega(k)} \, \cos[k\,n\,d] \, dk, \end{aligned} \tag{A.12}$$

Aufgrund dieser Integraldarstellungen sehen wir sofort, daß sehr einfach die Beziehung

$$\mathbf{Q}[n,t] = \int\limits_0^t \mathbf{P}[n,t'] \, dt' \tag{A.13}$$

gilt. Für den Propagator $\mathbf{P}[n,t]$ erhalten wir durch eine Substitution und mit der Dispersionsrelation (A.8) die Darstellung

$$\mathbf{P}[n,t] = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \cos[\omega_g \, t \, \sin(u)] \, \cos[2\,n\,u] \, du. \tag{A.14}$$

Dies Integral können wir mit Hilfe der Besselfunktionen $\mathbf{J}_\nu(z)$ erster Art auswerten und erhalten so den wichtigen *Propagator*

$$\boxed{\mathbf{P}[n,t] = \mathbf{J}_{2n}[\omega_g\, t].} \tag{A.15}$$

Dies ist eine spezielle Lösung, die zuerst E. Schrödinger 1914 angegeben hat. Frei nach den Worten von E. Schrödinger: *In diesem Falle liefern also die Massenpunkte in ihrer Gesamtheit durch ihre Bewegung ein mechanisches Bild sämtlicher geradzahliger Besselfunktionen erster Art.* Der andere Propagator kann aufgrund der Eigenschaften der Besselfunktionen in der Form ($n > 0$)

$$\mathbf{Q}[n,t] = \frac{2}{\omega_g} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathbf{J}_{2(n+\nu)+1}[\omega_g\, t] \tag{A.16}$$

geschrieben werden.

Die obigen Propagatoren haben physikalisch die merkwürdige Eigenschaft, daß auch für sehr kleine Zeiten t die Störung im Prinzip schon bei einem Oszillator mit unendlich großem Index n spürbar ist. Die Anschauung erwartet eher eine Ausbreitung mit *einer endlichen Grenzgeschwindigkeit.* Doch dies gilt nur für das Kontinuum. Mit Hilfe der Dispersionsrelation (A.8) können wir im Grenzfall $k \to 0$ (Langwellen) eine solche effektive Schallgeschwindigkeit

$$c_s = \frac{1}{2}\, \omega_g\, d \tag{A.17}$$

definieren. Mit der kontinuierlichen Länge $r = n\, d$ gilt so

$$x(r,t) = x[0]\, \mathbf{J}_{2|\frac{r}{d}|} \left[2 \frac{c_s\, t}{d} \right]. \tag{A.18}$$

Hier können wir sehen, daß ein Grenzübergang $d \to 0$ nicht zwingend in die Lösung des Kontinuums übergeht. Solange die Gitterkonstante d ungleich null ist, ist das raum-zeitliche Verhalten durch den obigen Propagator gegeben. Die entsprechende Lösung für die klassische Wellengleichung lautet ja

$$x[r,t] = \frac{1}{2}\, x[0]\ \{\delta[r - c_s\, t] + \delta[r + c_s\, t]\} \tag{A.19}$$

Doch diese *hydrodynamische* Lösung folgt nicht aus der obigen *kinetischen* Lösung (A.18).

Insbesondere in der Umgebung von $r = \pm c_s\, t$ ist das Lösungsverhalten des *kinetischen Propagators* (A.18) interessant. Benutzt man hier die asymptotische Formel der Besselfunktionen vom Nicholson Typ, so gilt genähert

$$x[r,t] \sim x(0)\, \left(\frac{d}{c_s\, t}\right)^{1/3} \mathbf{Ai}\left[2\left(\frac{d}{c_s\, t}\right)^{1/3}\left(\frac{|r|-c_s\, t}{d}\right)\right] \tag{A.20}$$

wobei die Airy-Funktion durch

$$\mathbf{Ai}[z] = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos\left[\frac{u^3}{3} + zu\right] du \tag{A.21}$$

gegeben ist. Die obige Darstellung läßt sich auch direkt aus dem Fourierintegral (A.14) durch Entwicklung der Sinusfunktion im Argument gewinnen (*Methode der stationären Phase*).

A.3 Schwerewellen und Kapillarwellen

> *...water waves, which are easily seen by everyone and which are used as an example of waves in elementary courses... are the worst possible example... they have all the complications that waves can have...*
>
> Richard Feynman (1918-1988)

Die direkte Analogie zu den spiralförmigen Dichtewellen an den Mondresonanzen im Saturnring sind einfache Wasserwellen, die jeder beim Hereinfallen eines Regentropfens auf eine Wasseroberfläche beobachten kann.

$$\omega^2 = g\, k + \frac{\mathcal{T}}{\varrho}\, k^3 \tag{A.22}$$

Literaturverzeichnis

[1] Alexander, A.F. O'D. 1962: *The Planet Saturn. A History of Observations, Theory and Discovery.* Faber and Faber, 24 Russell Square, London 1962

[2] Brush, S.G., Everitt, C.W.F. & Elizabeth Garber 1983: *Maxwell on Saturn's Rings.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 1983

[3] Burkhardt, H.: Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker - Vereinigung. Band **X**, Zweites Heft, erster Halbband 1908

[4] Chandrasekhar, S. & E. Fermi 1953: Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field. ApJ. **118**, pp. 116-141, 1953

[5] Colombo, G., P. Goldreich, and A. W. Harris (1976): Spiral structure as an explanation for the asymmetric brightness of Saturn's A ring, Nature, **264**, 344-345, 1976

[6] Cook, A.F. & F.A. Franklin 1964: Rediscussion of Maxwell's Adams Prize Essay on the Stability of Saturn's Rings. *The Astronomical Journal* **69**, Number 2, pp. 173-201, 1964

[7] Cook, A.F. & F.A. Franklin 1966: Rediscussion of Maxwell's Adams Prize Essay on the Stability of Saturn's Rings II. *The Astronomical Journal* **71**, Number 1, pp. 10-18, 1966

[8] Dougherty, M.K., Esposito, L.W. & S.M. Krimigis (Editors) 2009: *Saturn from Cassini - Huygens.* Springer Dodrecht Heidelberg London New York 2009.

[9] Esposito, L.W. 2014: *Planetary Rings. A post - equinox view.* First edition 2006. Second edition 2014. Cambridge Planetary Science. Cambridge University Press 2014

[10] Goldreich,P. & D. Lynden-Bell, 1965: I. Gravitational stability of uniformly rotating disks. MNRAS **130**, p. 97, 1965

[11] Goldreich,P. & D. Lynden-Bell, 1965: II. Spiral arms as sheared gravitational instabilities. MNRAS **130**, p. 125, 1965 In dieser Pionierarbeit wird noch die irreführende Interpretation vertreten, daß nur durch Überschreitung einer kritischen Selbstgravitation (Jeansinstabilität) es spontan zur Ausbildung von Spiralwellen durch Scherung in einer Scheibe kommt.

[12] Christiaan Huygens 1659: Systema Saturnium, sive de causis mirandorum Saturni phaenomenon, et comite ejus planeta novo (1659). (The System of Saturn, or On the matter of Saturn's remarkable appearance, and its satellite, the new planet). Hagae-Comitis: Ex Typographia Adriani Vlacq [from the press of Adriaan Vlacq], 1659. Six preliminary leaves, 84 pages, woodcut and engraved illustrations, one folding engraved plate.

[13] Jeffreys, H. 1947: The effects of collisions on Saturn's rings. MNRAS **107**, p.263, (1947)

[14] Julian, W.H. & A. Toomre 1965: On Certain Forced Responses of a Differentially Rotating Disk of Stars. Astr.J. **70**, p. 141, (1965).

[15] Julian, W.H. & A. Toomre 1966: Non-Axisymmetric Responses of Differentially Rotating Disks of Stars. ApJ. **146**, p. 810, (1966).

[16] Kant, I. 1755: Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels. Königsberg und Leipzig. Johann Friedrich Petersen, 1755

[17] Leon Lichtenstein (Warschau 16.5.1878 - Zakopane 21.8.1933) Gründer der *Mathematischen Zeitschrift* in Leipzig.

[18] Lin, C. C. & F.H. Shu 1964. On the Spiral Structure of Disk Galaxies. ApJ. **140**, p. 646, 1964

[19] Maxwell, J.C. 1856: On the Stability of the Motion of Saturn's Rings. An Essay, which obtained the Adams Price for the year 1856, in the

University of Cambridge. By J. Clerk Maxwell, M.A. Late fellow of Trinity College, Cambridge. Professor of Natural Philosophy in the Marischal College and University of Aberdeen. „E pur si muove“. Cambridge: MacMillan and Co. and 23 Henrietta Street, Covent Garden, London. 1859

[20] Maxwell, J.C.: On the Stability of the motion of Saturn's Rings. *Astron.Soc.Month.Not.* **XIX**, 1859, pp. 297-304

[21] Maxwell, J.C.: On the Stability of the motion of Saturn's Rings. Scientific Papers **Vol I**, pp. 288-376

[22] Maxwell, J.C.: On the Theories of the Constitutions of Saturn's Rings. *Edinb.Roy.Soc.Proc.* **IV**, 1862, pp. 99-101, Scientific Papers **Vol I**, pp. 286-287

[23] Osterbart, R. and E. Willerding 1995: Collective processes in planetary rings. *Planet. Space Sci.* **43**, Nos. 3/4, 289-298 (1995)

[24] Pendse, C.G. 1935: The Theory of Saturn's Rings. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Volume **234**, Issue 735, pp. 145-176

[25] Salo, H. & C.F. Yoder 1988: *The dynamics of coorbital satellite systems* Astronomy and Astrophysics **205**, no. 1-2, p. 309-327, 1988

[26] Schmit, U., Tscharnuter, W.M. *A fluid dynamical treatment of the common action of self-gravitation, collisions, and rotation in Saturn's B-Ring. ICARUS* **115**, 304-319, (1995)

[27] Schrödinger, E. 1914: *Zur Dynamik elastisch gekoppelter Punktsysteme.* Annalen der Physik **44**, (4), 916-934, 1914

[28] Toomre, A. 1964: On the gravitational stability of a disk of stars. ApJ. **139**, p. 1217-1238 (1964). Hier wird zum erstenmal das sogenannte „Toomre - Kriterium“ für rein radiale Störungen in einer kinetischen Materiescheibe eingeführt

[29] Willerding, E. 1984: *Oszillatormodelle für die kollektiven Anregungen in Planetenringen.* Inaugural - Dissertation zr Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik der Westfälischen Wilhelms - Universität zu Münster. Münster, 1984.

[30] Willerding, E. 1986: *Theory of Density Waves in narrow planetary rings.* Astron.Astrophys. **161**, 403-407

[31] Willerding, E. & H.J. Fahr 1989: *Instability considerations at self-gravitating circumplanetary ringlet structures.* Earth, Moon, and Planets **44**, p. 121-139, 1989

[32] Willerding, E. 1992: *James C. Maxwell und die Stabilität der Saturnringe. Über eine wenig bekannte astrophysikalische Arbeit des Schöpfers der elektromagnetischen Theorie.* Physikalische Blätter **48**, Heft 10, p. 799 - 803, 1992

[33] Willerding, E. Evolutionary processes in protoplanetary accretion disks: The propagation of axisymmetric shock waves. *Planet. Space Sci.* **46**, 1641-1658 (1998)

[34] Willerding, E. Wave propagation in protoplanetary disks: Formation of twin planets by “disk-brown dwarf“ collisions? *Planet. Space Sci.* **50**, 235-246 (2002)