Eugen Willerding

Die Entdeckung des Planeten Neptun

Beobachtungen und inverse Störungstheorien

www.eugen-willerding.de
Die Entdeckung des Planeten Neptun
©2019 Eugen Willerding

Die Entdeckung des Planeten Neptun

Beobachtungen
und
inverse Störungstheorien

Eugen Willerding

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Die Hypothese ungleicher „affinitas chemica“ **7**

3 Das Oszillatormodell **19**
3.1 Klassische Bahnbestimmung 19
3.2 Die Approximation erster Ordnung 24
3.3 Die Oszillatorgleichung 30
3.4 Die homogene Lösung 33
3.5 Die partikuläre Lösung 34
3.6 Die Resonanz - Hypothese 38
3.7 Die Fly - by Approximation 42

4 Die Beobachtungsdaten **44**

5 Die Auswertung der Originaldaten **50**
5.1 Die Bahnresiduen nach Le Verrier 50
5.2 Die Bahnresiduen nach Adams 54
5.3 Beobachtungsdaten und numerische Simulationen 55

6 Die Position von Neptun **58**

7 Zeittafel und Hintergründe **60**

Anhang **67**
A.1 Die Laplace - Koeffizienten 67
A.2 Planetenkoordinaten 69
A.3 Leben in Collingwood 70

Literaturverzeichnis **73**

1 Einleitung

Der 13. März 1781 war in der Geschichte der Astronomie kein gewöhnlicher Tag. In den späten Nachtstunden entdeckten nämlich der Musiker und Astronom William Herschel (1738 - 1822) zusammen mit seiner Schwester Caroline Herschel (1750-1848) zufällig bei einer Himmelsdurchmusterung einen neuen großen Gasplaneten, den er zunächst für einen Kometen hielt, dann aber als neuen Planeten *georgium sidus* (Georgsgestirn) nannte. Im Jahre 1783 stellte der schwedisch - finnische Mathematiker A. J. Lexell (1740-1784) durch eine spezielle Bahnbestimmung fest, dass sich der neu entdeckte Planet auf einer fast kreisförmigen Bahn in nahezu doppeltem Abstand von der Sonne wie der Planet Saturn bewegt. Später einigte man sich international auf den Namen Uranus. Seit der Antike war dies der erste große neu entdeckte Planet jenseits von Saturn. Das Weltgeheimnis, wie es sich Kepler bezüglich der Anzahl der Planeten im Sonnensystem träumte, hat sich als ein schönes Trugbild herausgestellt.

Niemand ahnte damals, dass man aus den Bahndaten, die Jahrzehnte später bekannt wurden, nur durch eine geschickte analytische Modellierung auf die Existenz und genäherte Position eines weiteren großen Planeten jenseits von Uranus werde schließen können. Die Entdeckung dieses neuen Planeten Neptun am 23. September 1846 durch die Berliner Astronomen Johann Gottfried Galle und Heinrich Louis d'Arrest geschah daher nicht zufällig, sondern war das Ergebnis einer ungewöhnlichen gewagten himmelsmechanischen Berechnung. Während C.F. Gauss im Jahre 1800 eine neue Methode der Planeten - Bahnbestimmung entwickelte, um aus nur wenigen Beobachtungen des Asteroiden Ceres eine *Keplerische* Bahnellipse zu berechnen, gelang es 1846 dem französischen Ingenieur und Astronomen U. J. J. Le Verrier (1811 – 1877), mit Hilfe einer kühnen Hypothese aus den genähert bekannten *Abweichungen* der Uranusbahn von einer Keplerellipse, in der die Störungen von Jupiter und Saturn mit eingingen, auf die Positionen eines noch unbekannten weiter außen befindlichen Planeten zu schließen. Fast

zeitgleich kam auch der britische Astronom J.C. Adams (1819-1892) mit fast identischen Annahmen zu einem vergleichbaren Ergebnis. Seine Voraussagen waren aber nicht so genau und so bestimmt wie die seines französischen Kollegen.

Diese Art einer *theoretischen Prognose* für die Existenz eines *„kosmischen Masseteilchens“* und deren Bestätigung durch direkte Beobachtungen hatte es bis dahin noch nicht in der Wissenschaftsgeschichte gegeben. Nach über 170 Jahren mutet diese Prognose auf der Grundlage einer physikalischen Gravitationstheorie äußerst modern an.

Doch dieser „Triumph“ der Newtonschen Gravitationstheorie ist bis heute ein etwas „dunkles“ Kapitel der theoretischen Mechanik geblieben, obwohl die Neptunentdeckung doch mit Recht als ein Höhepunkt der klassischen Himmelsmechanik und ihrer Anwendung bezeichnet werden kann[1] Liest man heutige moderne Bücher der Himmelsmechanik, so werden zwar unterschiedliche Bahnbestimmungsmethoden für Kometen oder Asteroiden aus historischen Gründen kurz behandelt, aber die *Bahnbestimmung und Positionsbestimmung des Planeten Neptun* aus den historischen Uranus - Daten wird nicht mehr als ein historisches Paradestück theoretischer Forschung im Detail dargelegt.

Der Grund hierfür scheint klar: Die Entdeckung des Neptuns war ein *singuläres historisches Ereignis*, was sich so in der Wissenschaftsgeschichte nicht wiederholen wird. Außerdem hätte man ja den Planeten Neptun im Laufe des 19. Jahrhunderts sowieso entdeckt. Daher erübrigt sich auch eine genaue theoretische Behandlung des Problems einer inversen Störungstheorie, also die Aufgabe, aus einer kleinen beobachtbaren Wirkung auf die mögliche Ursache zu schließen. So ist bis heute eigentlich weitgehend unklar, inwieweit die beinahe Übereinstimmung der heliozentrischen Länge zwischen der theoretischen Vorhersage und der anschließenden Beobachtung Ergebnis eines Zufalls war - also eine glückliche Fügung. Die von U. Le Verrier und seinem englischen Konkurrenten J.C. Adams berechnete Bahn ergab sich nicht zwingend aus dem Beobachtungsmaterial, sondern die große Halbachse a der Ellipse wurde von beiden Forschern zunächst *doppelt so groß wie die von Uranus angesetzt*. Erst eine zweite numerisch sehr aufwendige Iteration zeigte dann, dass der Bahnradius des störenden Planeten wohl kleiner

[1] An heutigen Universitäten wird die klassische Himmelsmechanik überhaupt nicht mehr gelehrt - obwohl die heutige Kosmologie wieder vermehrt eine vertiefte Kenntnis dynamischer Phänomene (Allgemeine Relativitätstheorie) erfordert.

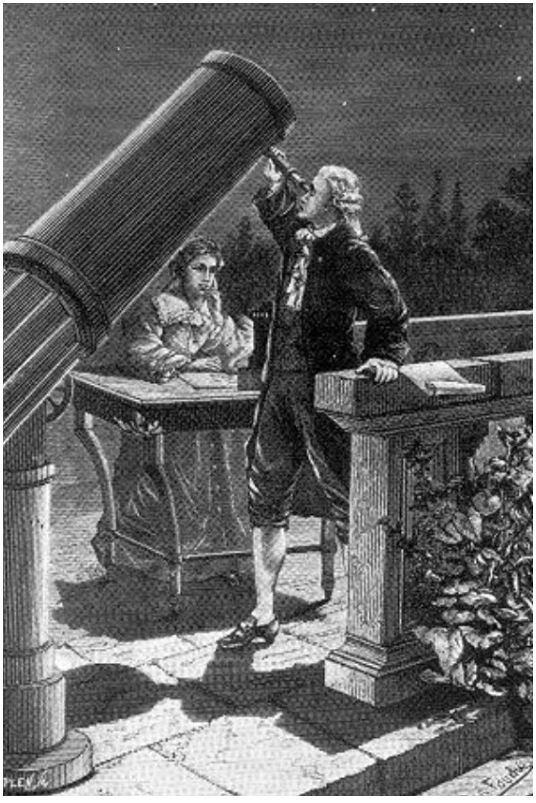

Fig. 1.1: *Die zufällige Entdeckung des Planeten Uranus durch W. Herschel und seiner Schwester C. Herschel im Jahre 1781. Zunächst glaubte er, einen Kometen zu beobachten.*

sein muss. Zudem musste die Exzentrizität größer gewählt werden, um die zu schwache Wirkung des zu großen Bahnradius zu kompensieren. Insbesondere Adams zweifelte daraufhin seinen ganzen Rechnungen. Insbesondere von den amerikanischen Astronomen Benjamin Peirce (1809 -1880) und Sears Cook Walker (1805-1853) wurde daher schon im Jahre 1847 Zweifel am realen Wert der theoretischen Vorhersage der Neptunposition ausgesprochen, nachdem die wahre Bahn des Planeten Neptun und seine Masse mit Hilfe des Mondes Triton bekannt wurden.

Fig. 1.2: *Die Entdeckung des Planeten Uranus jenseits von Saturn am Abend des 13. März 1781 in der Nähe des Sternbildes Zwillinge läutete eine neue Epoche in der Astronomie ein. Simulation mit der software stellarium.org. Die rote Linie ist die scheinbare Bahn von Uranus an der Himmelssphäre.*

Es wurde sogar behauptet, dass der entdeckte Planet nicht der derjenige sei, den U. Le Verrier durch analytische Rechnungen bestimmt hatte ([29]).

Im Folgenden soll daher diese hoch interessante und extrem kontroverse Geschichte des 19ten Jahrhunderts anhand eines eigenen mathematisch-physikalischen Modelles analysiert werden. Der Autor möchte sich auf eine Zeitreise in das Jahr 1840 begeben und mit äußerst einfachen Annahmen eine eigene Theorie und Prognose für den Ort und die Beschaffenheit des Planeten Neptun ableiten. Erlaubt sind natürlich nur die Daten, die auch den damaligen Protagonisten zur Verfügung standen. Nur durch eine eigene Durchdringung des Problems kann man dann die zahlreichen Kritiken, Fragen und Bedenken nach dieser spektakulären Entdeckung am Rande des Sonnensystems richtig beurteilen.

2 Die Hypothese ungleicher „affinitas chemica“

> *... Dieser Brief bezeugt, dass Bessel auch einer von denen war, die lange vor Galle's Auffindung des Neptun zu denen gehörten, von denen Herschel der Sohn so schön sagt: We see the probable new Planet as Columbus saw American from the shores of spain.([16])*
>
> Alexander von Humboldt

Erste Tabellen über die Bewegung von Uranus wurden 1821 von Alexis Bouvard (1767-1843) in Paris veröffentlicht. Schon zu dieser Zeit stellte man fest, dass trotz Berücksichtigung der Störungen von Jupiter und Saturn die beobachteten Positionen des Uranus von den berechneten Örtern abwichen. Diskutiert wurde daher zunächst über die Verlässlichkeit von unbewussten Messungen vor dem Entdeckerjahr 1781, die man nachträglich dem Planeten Uranus zuordnen konnte.

In einem Brief vom 24. Februar 1823 spricht Bessel zu Olbers von seiner Vorstellung, derzufolge in die Bewegungsgleichungen ein modifizierter Störterm eingefügt werden müsse, der eine Verschiedenheit der *„chemischen“* Masse (*„schweren Masse“*) des Uranus in Bezug auf einzelne Planeten und der Sonne beinhalte. Die betreffende Briefstelle von Bessel lautet ([10]):

> *...Sie werden sich erinnern, dass Bouvard die älteren und neueren Uranus - Beobachtungen nicht in Übereinstimmung bringen konnte; er scheint dies auf Fehler der ersteren zu schieben, was mir ganz unstatthaft zu sein scheint. Ich habe daher Argelander veranlasst, die Beobachtungen neu und scharf zu reduzieren, wobei sich denn Fehler gezeigt haben, welche zuweilen bis auf eine halbe Minute (30 Bogensekunden) gehen, aber doch nicht die Übereinstimmung mit der*

Rechnung herbeiführen. Nun fällt es bei der Ansicht der Bouvard'schen Vergleichung auf, dass ein von sin[Uranus-Saturn] abhängiges Glied einen großen Teil des Fehlers verbessern würde, und dies gab mir Veranlassung, Herrn Rosenberger zu bitten, in die Bedingungsgleichungen noch die Verbesserungen der Saturnsmasse einzuführen und dann dieselben neu aufzulösen. Dadurch hat er diese Verbesserung 0.5 gefunden und Alles in die vollkommenste Harmonie gebracht; die Summe der Quadrate der Fehler wird über zehnmal kleiner. Inzwischen muss sich die Übereinstimmung noch weiter treiben lassen, denn es ist unseren Störungstheorien noch etwas hinzuzufügen, wenn wir zu der Annahme gezwungen werden, dass die Massen der Planeten anders werden, je nachdem sie auf diesen oder jenen Körper wirken...

Bessel deutete hier eine gewagte Hypothese an, welche Gauss die Annahme ungleicher *affinitas chemica corporum coelestium* nannte. Bessel formulierte in seinem Brief eine modifizierte Bewegungsgleichung für die relative Bewegung von zwei Planeten um die Sonne. Aus heutiger Perspektive würde man in Analogie sagen, dass er im Newtonschen Gravitationsgesetz spekulativ zwischen *träger* und *schwerer* Masse unterscheiden will. Schreiben wir also mit Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

so könnte man auf der linken Seite der Gleichung für die Gravitationskräfte die *schwere Masse* , auf der rechten Seite der Gleichung im Impuls die *träge Masse* einsetzen. Bezeichnet man mit dem Index „1" den Saturn, mit Index „2" den Uranus, so lautet die Bewegungsgleichung für den Uranus nach Newton

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 + G(M + m_2)\,\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + G\,m_1\,\left(\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}\right) = 0.$$

Unterscheiden wir dagegen zwischen *träger* und *schwerer* Masse, so gilt stattdessen

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 + G\left(M_s\,\frac{m_{2s}}{m_{2t}} + m_{2s}\,\frac{M_s}{M_t}\right)\,\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + \\ G\,m_{1s}\,\left(\frac{m_{2s}}{m_{2t}}\right)\,\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + G\,m_{1s}\,\left(\frac{M_s}{M_t}\right)\,\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} = 0.$$

Der Index „t“ bezieht sich hier auf die *träge* Masse, der Index „s“ entsprechend auf die *schwere* Masse. Bessel selber formuliert die letzte Bewegungsgleichung für Uranus in der alternativen Form

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 + G\left(M_s\,\frac{m_{2s}}{m_{2t}} + m_{2s}\,\frac{M_s}{M_t}\right)\frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} + G\,m_{1s}\left(\frac{m_{2s}}{m_{2t}}\right)\left(\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|^3} + \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}\right) + G\,m_{1s}\left(\frac{M_s}{M_t} - \frac{m_{2s}}{m_{2t}}\right)\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} = 0.$$

und stellt sich dabei unterschiedliche *chemische Affinitäten* der Körper vor. Gegenüber der klassischen Bewegungsgleichung entsteht so ein zusätzlicher Term, der proportional $M_s/M_t - m_{2s}/m_{2t}$ ist und für die Anomalie des Uranus verantwortlich *sein könnte*. Da aber das Keplersche Gesetz der Umlaufzeiten für die Planeten und auch für die Monde um die Planeten sehr gut erfüllt ist, kamen damals schnell Zweifel an dieser Hypothese *unterschiedlicher chemischer Affinitäten* unter den Planeten auf. Bessel schreibt dazu an Olbers:

> *...Es wird mir sehr schwer zu begreifen, wie, bei dieser Beschaffenheit der Sache, Saturn eine andere Affinität zum Uranus haben kann als zum Jupiter u.s.w. Dennoch muss dies angenommen werden, weil es unmöglich ist, mit einer und derselben Saturnsmasse die Störungen des Uranus und Jupiter darzustellen...*

In einem Brief vom 12. Februar 1825 an Gauss hat Bessel bezüglich seiner Hypothese noch viel Zuversicht ([9]):

> *Von meiner Abhandlung über den Teil der Störungen, welcher aus der Sonnenbewegung entsteht*[1]*, habe ich den letzten Bogen vor acht Tagen zur Korrektur hier gehabt; sie muss demnach in wenigen Tagen gedruckt sein und wird ihnen dann von Ideler zugesandt werden. Möchten Sie sie für nicht gänzlich missraten erkennen.*

Am 21. März 1825 antwortet ihm Gauss sehr wohlwollend:

[1] Nach Bessel's gesammelten Werken ([8]) wurde die Abhandlung schon im Januar 1824 vor der Preußischen Akademie verlesen

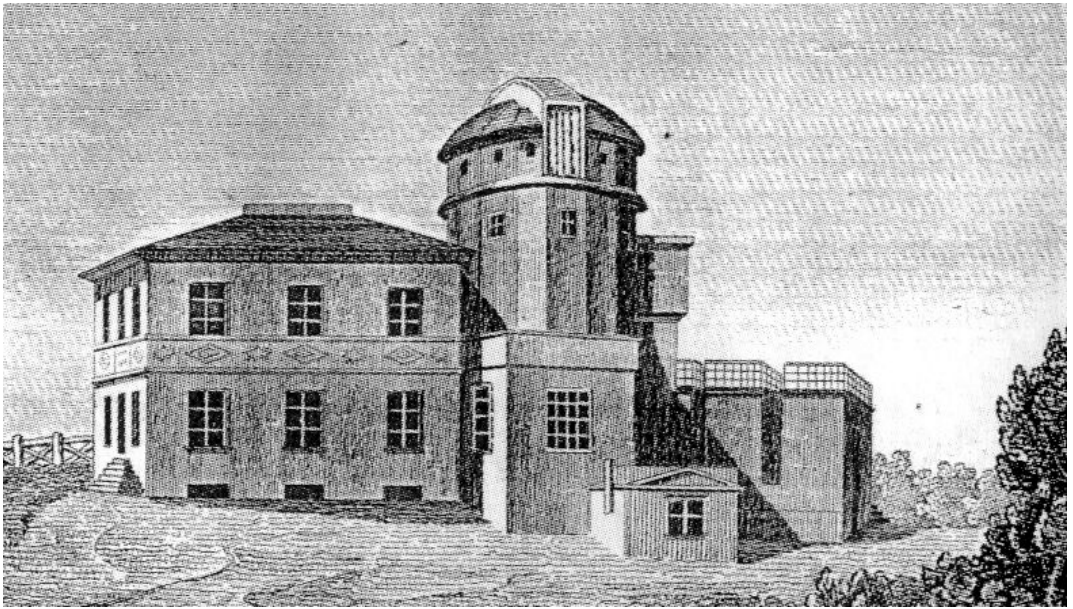

Fig. 2.1: *Die Königsberger Sternwarte in Ostpreußen um 1830, deren Direktor* Bessel *bis zu seinem Tode 1846 war. Sie wurde später durch einen seitlichen Turm erweitert und existierte von 1813 - 1944.*

Ihre schöne Abhandlung habe ich dieser Tage von Berlin aus zugeschickt erhalten und statte ihnen meine verbindlichsten Dank ab. Es war mir interessant, dass Sie durch eine sinnreiche Hypothese die ***Möglichkeit*** *einer Abweichung von Newton's Gesetzen gezeigt haben, was, so viel ich weiß, noch nicht geschehen war, daher ich, wie ich offenherzig gestehe, auf die von anderen aufgestellte Zweifel an letzteren wenig gegeben habe; Sie erwähnen die Abhandlung von J.T. Mayer*[2]*, aber nicht, dass sie starke mathematische Fehler enthält. Dass die nach den älteren unzulänglichen Methoden berechneten Störungen z.B. für den Jupiter andere Massen gegeben haben, schien mir noch kein zureichender Beweis für die Unrichtigkeit des Newton'schen Gesetzes.*

Doch Gauss spricht sich schließlich in einem Brief an Olbers vom 2. April 1826 sehr entschieden gegen die Hypothese von Bessel aus:

Encke hat mir nunmehr auch seine Vesta - Rechnungen mitgeteilt. Es geht daraus hervor, dass wenigstens Vesta und die Sonne vom Jupiter nicht merklich verschieden angezogen werden. Ich habe der Hypothese (die durch nichts begründet ist) von einer ungleichen ***affinitas chemica corporum coelestium*** *nie Geschmack abgewinnen können, wenigstens müssten erst schlagende Beweise dafür vorhanden sein. Dass Bouvard die Jupitermasse aus den Saturnstörungen etwas kleiner gefunden hat, beweist gar nichts, denn ich kann nicht zugeben, dass Laplace's Näherungsmethode für die Planetenstörungen zur Entscheidung eines so delikaten Punktes tauglich ist...*

Da alle Überlegungen der spezifischen chemischen Gravitation in eine Sackgasse führten, verzichtete Bessel auf eine noch größere Untersuchung und konstatierte am 2. Juli 1828 in einem Brief an A.v.Humboldt: ([16])

„Ich glaube an einen Planeten über Uranus"

[2] Bessel schreibt in seiner Abhandlung ([8]): Der erste, welcher die Anziehung im Verhältnisse der Massen bezweifelte, ist Johann Tobias Mayer". Er zitiert die Arbeit: Comment. Soc. Reg. Scient. Gottingensad A. MDCCCIV-VIII.

Ab dieser Zeit verfolgte Bessel die Hypothese, dass noch ein großer Planet außerhalb der Uranusbahn existieren müsse. Doch andere Arbeiten wie die Pendelversuche, Zonenbeobachtungen und Gradmessungen verhinderten ein schnelles Fortkommen. Erst 1838, als Airy seine alarmierende Messung über die anomale Zunahme des Radiusvektors von Uranus in den Astronomischen Nachrichten veröffentlichte ([4]), beauftragte er seinen Schüler und Assistenten F.W. Flemming (1812-1840), alle vorhanden Beobachtungen mit Berücksichtigung der Störungen von Saturn und Jupiter neu zu reduzieren und die daraus folgenden nicht mehr erklärbaren Residuen in heliozentischer Länge abzuleiten. Diese Restgrößen müssen dann einen Hinweis auf den neuen Planeten liefern.

Flemming stellte darauf alle 361 verfügbaren Beobachtungen verschiedener Observatorien zusammen. Am 28. Februar 1840 hielt Bessel einen Vortrag *Über die Verbindung der astronomischen Beobachtungen mit der Astronomie* vor der Königsberger physikalisch - ökonomischen Gesellschaft. Unter anderem sagte er dort ([36]):

> *...Fernere Versuche der Erklärung werden nämlich die Absicht verfolgen, einem unbekannten Planeten jenseits des Uranus, der vielleicht wegen zu großer Lichtschwäche nicht sichtbar ist, eine Bahn und eine Masse anzuweisen, welche so beschaffen sind, dass daraus Störungen des Uranus hervorgehen, welche die jetzt nicht vorhandene Übereinstimmung seiner Beobachtungen herstellen. Kann man die Bewegung des Uranus wirklich auf diese Art erklären, so wird der Verlauf der Zeit diese Erklärung auch zur Evidenz erheben, in demselben Maße, in welchem er die Einflüsse auf die Bewegung des Nachbarplaneten des Uranus, nämlich des Saturn, äußern, welche zwar viel kleiner sind, jedoch sich einer, besonders auf sie gerichteten Untersuchung wahrscheinlich nicht entziehen, und dann eine von dem Entdeckungsmittel unabhängige Bestätigung des Daseins des neuen Planeten ergeben werden.*

Der Naturforscher und Forschungsreisende Alexander von Humboldt schildert in seinem monumentalen fünfbändigen Werk KOSMOS ([27]), Band III, unter der Rubrik: *Kosmische Erscheinungen: Sonnengebiet* recht ausführlich die Geschichte um die Entdeckung des Planeten Neptun. In einer langen Fußnote schreibt er hierzu:

Da in der Geschichte der Entdeckung des Neptun oft von einem Anteil geredet worden ist, welchen der große Königsberger Astronom früh an der, schon von Alexis Bouvard (dem Verfasser der Uranustafel) im Jahre 1834 geäußerten Hoffnung „von der Störung des Uranus durch einen uns noch unbekannten Planeten „ genommen habe; so ist vielleicht vielen Lesern des Kosmos angenehm, wenn ich hier einen Teil des Briefes veröffentliche, welchen Bessel mir unter dem 8. Mai 1840 (also zwei Jahre vor seinen Gesprächen mit Sir John Herschel bei dem Besuche zu Collingwood) geschrieben hat:

...Sie verlangen Nachricht von dem Planeten jenseits von Uranus. Ich könnte wohl auf Freunde in Königsberg verweisen, die aus Mißverständnis mehr davon zu wissen glauben als ich selbst. Ich hatte die Entwicklung des Zusammenhanges zwischen den astronomischen Beobachtungen und der Astronomie zum Gegenstand einer (am 28. Februar 1840 gehaltenen) öffentlichen Vorlesung gewählt. Das Publikum weiß keinen Unterschied zwischen beiden; seine Ansicht war also zu berichtigen. Die Nachweisung der Entwicklung der astronomischen Kenntnisse aus den Beobachtungen führte natürlich auf die Bemerkung: daß wir noch keineswegs behaupten können, unsere Theorie erkläre alle Bewegungen der Planeten. Die Beweise davon gab der Uranus, dessen ***alte*** *Beobachtungen gar nicht in Elemente passen, welche sich an die* ***späteren*** *von 1783 bis 1820 anschließen.*

Wie in einer wehmütigen Rückschau seines Lebens erinnert sich Bessel dann in einem Brief an Gauss vom 8. November 1843:

Uranus ist oft Gegenstand meiner Bemühungen gewesen, und hat auch veranlasst, dass ich einen jungen Mann - Flemminghier ein Paar Jahre unterhalten habe, um durch ihn die Reduktion der vorhandenen älteren Beobachtungen des Planeten zu erlangen. Diese Arbeit ist fast fertig; nicht ganz, weil das Nervenfieber meinen armen Flemming[3] *fortnahm. Ich woll-*

[3] W. Flemming (1812-1840), Schüler von Bessel in Königsberg, ging dann nach Danzig, wo er früh starb.

te sie selbst vollenden, bin aber durch die vorjährige Reise, die diesjährige Arbeit mit dem neuen Meridiankreis und andere unabweisbare Geschäfte davon abgehalten worden. An der Vollständigkeit der Störungsformeln, in so fern alles ***bekannte*** *im Sonnensystem berücksichtigt wird, fehlt nichts bedeutendes.*

Früher glaubte ich einmal, dass eine Verschiedenheit der auf die Sonne und auf den Uranus bezogenen Saturnsmassen das Rätsel lösen könnte. Auch würde eine Untersuchung der Beobachtungen, in welcher der Saturnsmasse zwei Werte zugeschrieben wurden, dieser Hypothese günstig ausgefallen sein, wenn nicht die herausbrachte, sich auf die Sonne beziehende Masse mit der Bewegung des Jupiters unvereinbar gewesen wäre. Ich habe aus diesem Grund die Hypothese fahren lassen, obgleich sie - indem sie der ganzen Reihe der Beobachtungen erträglich entsprach - einigermaßen verführerisch war.

Den oben erwähnten Brief von Bessel hat dann wohl Humboldt an seinen Freund und Kollegen Arago () geschickt. den Grobe Übersetzung aus Tisserand: band I, seite 375. Arago tifft Levverie und zeigt Brief von bessel an Humboldt

die Frage der Unregelmäßigkeit der städtischen Bewegungen wird somit in die Tagesordnung zu setzen. im Laufe des Sommers 1845 signalisiert die arago dringend Weise hat Leverrier, der in seinen frühen Arbeiten, musste einen ersten ordre. C'est Talente zu dieser Zeit als Humboldt-Bessel schrieb offenbaren: Ich denke, ein Moment wird kommen, wenn die Lösung des Geheimnisses von Uranus wird vielleicht gut versorgt einen neuen Planeten, würden die Elemente durch seine Wirkung auf Uranus erkannt und durch das, was sie über Saturn ausübt, geprüft.

Der französische Astronom und Himmelsmechaniker F.F. Tisserand (1845 - 1896) war wohl der Letzte, der im ersten Band seines Lehrbuches zur Himmelsmechanik 1889 der Neptunentdeckung das ganze Kapitel XXIII (*Decouverte de Neptune*) gewidmet hat. Le Verrier und Adams untersuchten die Variationen der ekliptikalen Länge von Uranus im Rahmen der Laplace'schen Störungstheorie für den Zeitraum 1781 - 1845.

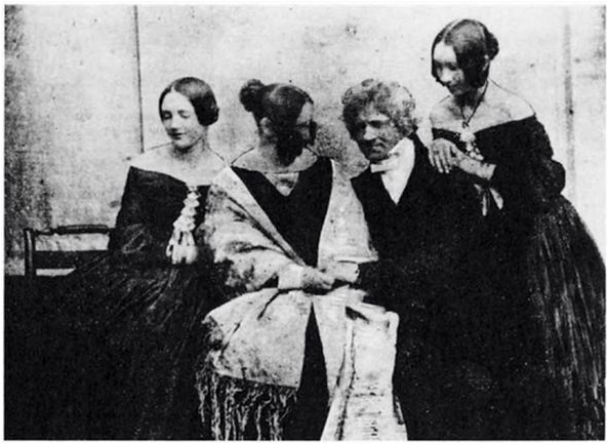

Fig. 2.2: *F.W. Bessel (1784-1846) mit seiner Frau Johanna Hagen (1794-1885) und seinen Töchtern Elise (1820-1913) und Johanna (1826-1856). Daguerreotypie von dem Physiker Ludwig Moser um 1843. (Archive der Franz Neumann Stiftung)*

Aus den Fourierkoeffizienten der Störungsfunktion konnte schließlich Le Verrier 1846 Bahndaten des hypothetischen Planeten ableiten. Für die große Halbachse a und Bahnexzentrizität ϵ ergab sich so $a = 36.1639$ und $\epsilon = 0.107610$. Die Masse ergab etwa das Doppelte der wahren Neptunmasse.

Was Le Verrier nicht wußte oder nicht deduzieren konnte: Neptun bewegt sich in Wirklichkeit in einer genäherten 2:1 Resonanz zu Uranus[4]. Hier versagt eigentlich die klassische Störungstheorie.

Unterstützt wird diese Sicht auch durch eine nationale *„Planetgate - Affäre“*, denn unabhängig von Le Verrier hatte auch schon der Engländer J. C. Adams (1819 - 1892) - ein wahres Rechengenie mit autistischen Zügen - ab 1845 versucht, die Position des Neptuns aus den bekannten heliozentrischen Winkelpositionen des Uranus längs der Ekliptik zu berechnen. Doch es gelang ihm zunächst nicht, G.B. AIRY davon zu

[4]Eine neuere Untersuchung mit einem vereinfachten Oszillatormodell der Wechselwirkung Uranus - Neptun sowie Diskussion der genäherten 2:1 Resonanz stammt von Chinesen Lai, H.M.,Lam, C.C. und Young, K. *Perturbation of Uranus by Neptune: A modern perspective.* American Journal of Physics **58**, 1990

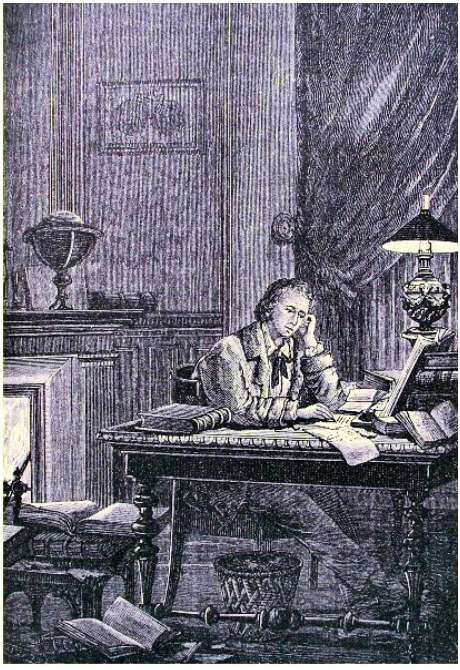

Fig. 2.3: *Eine zeitgenössische Darstellung aus dem 19. Jahrhundert zeigt den jungen Urbain Leverrier um das Jahr 1845 bei seinen umfangreichen Rechnungen zu den Bahnstörungen von Uranus und der möglichen Position eines neuen unbekannten Planeten.*

überzeugen, dass seine vagen Positionsangaben wirklich reell sein könnten. Zudem interessierte sich AIRY zunächst mehr für die Vergrößerung des Bahnradius des Uranus von seiner idealen Keplerbahn. Dies ergaben nämlich parallaktische Messungen, die Airy ab 1830 durchgeführt hatte. Doch Adams, wohl abgelenkt durch Details der Rechnung, antwortete nicht auf Airy's Anfrage bezüglich des Radiusvektors.

Nach 1846 wurde aber wohl Airy von namenhaften Personen in England indirekt dazu gedrängt, der Öffentlichkeit den Eindruck zu vermitteln, dass eigentlich Adams die Priorität der theoretischen Neptunberechnung zugesteht. Dieser Umstand ist natürlich deshalb brisant, weil ja schon der Planet Uranus am 13. März 1781 von William und

Caroline HERSCHEL in *England* entdeckt wurde. Die Bahndaten von J.C. Adams waren deutlich ungenauer als die von Leverrier - besonders seine von ihm zuletzt mitgeteilten Positionen wichen bis zu 20° von der Wirklichkeit ab - bei Le Verrier lagen sie bei nur etwa 1 °. Selbst während einer sechswöchigen Suche am Observatorium der Universität Cambridge im Sommer 1845 durch Challis war Adams nicht in der Lage, genaue Koordinaten für Neptun zu liefern.

Viele Jahre nach dieser „Neptunaffäre“ in England standen Historiker zudem vor dem Problem, dass viele Originalpapiere seit Airys Zeiten im *Royal Greenwich Observatory (RGO)* unter Verschluss standen - niemand konnte oder durfte sie einsehen. Die sehr komplizierte Geschichte kann jetzt in einem neuen Licht gesehen werden, nachdem die von dem Astronomen Olin Eggen (1919-1998) um 1965 gestohlenen Originalmanuskripte aus dem *RGO* nach seinem Tode 1998 in seinem Büro in Chile wiedergefunden werden konnten. Adams gebührt in jedem Fall hohe Achtung für seine mathematischen Rechnungen, aber es wurde ihm wohl in der Vergangenheit mehr zugeschrieben, als ihm tatsächlich zustand.

Unabhängig von diesen historischen und politischen Details steht die entscheidende Frage zur Neptunentdeckung im Raum: Wo liegen genau die Schwierigkeiten bei dieser *historisch einmaligen* Anwendung der inversen Störungstheorie und warum waren die theoretischen Vorraussagen für die ekliptikale Länge des Neptuns relativ genau, obwohl die Bahnelemente des Neptuns sowohl bei Le Verrier als auch bei Adams von den wirklichen Bahndimensionen des Planeten Neptun *sehr stark abwichen*. Auf dieses physikalisch interessante Problem soll hier näher eingegangen werden.

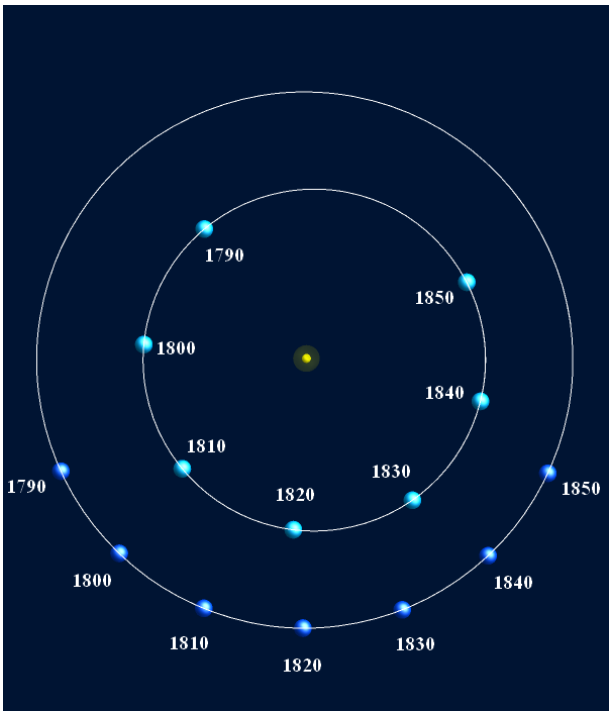

Fig. 2.4: *Die Bahnpositionen von Uranus (innen) und Neptun (außen) von 1800 bis 1850 in Zeitschritten von 10 Jahren. Besonders nach 1822 machten sich die Neptunstörungen bei der Uranusbahn sehr auffällig in Form einer „Abbremsung“ bemerkbar.*

3 Das Oszillatormodell

3.1 Klassische Bahnbestimmung

Um eine geeignete und äußerst einfache Methode zur Bestimmung der Uranusbahn unter dem Einfluss einer äußeren Störung eines noch unbekannten Planeten zu entwickeln, müssen wir zunächst einen Blick auf die klassischen Methoden werfen. Die Bahnbestimmung eines *bereits entdeckten* sichtbaren Planeten oder Kometen an der Himmelssphäre im Rahmen eines mathematischen Modelles gehört seit dem Altertum zu den klassischen Problemen der Astronomie. Mit dieser Aufgabe sind - unter vielen anderen - Namen wie PTOLEMÄUS, N. KOPERNIKUS, J. KEPLER, I. NEWTON, L. EULER, J.H. LAMBERT, P.S. LAPLACE, H. OLBERS und C.F. GAUSS verbunden. Seit dem 17. Jahrhundert wird als Modell die Bahnellipse von J. KEPLER angenommen, die als Grenzfall auch die Parabelbahn (Kometen) oder die Hyperbelbahn einschließt. In einem ihrer Brennpunkte befindet sich dabei die Sonne. Eine gewisse Schwierigkeit entsteht dadurch, dass der Beobachter selbst auf einem in einer Ellipse sich bewegenden Planeten sitzt, von dem er einen anderen sich bewegenden Planeten oder Kometen beobachtet.

Wir wollen kurz das mathematische Problem dieser klassischen Bahnbestimmung skizzieren, damit man die Schwierigkeiten des *Uranus-Problems* um 1840 besser versteht. Bezeichnen wir mit $\mathbf{R}$ und $\mathbf{r}$ den Positionsvektor der Erde und des Planeten, so gelten nach I. NEWTON die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}} &= -G\,(M+m_E)\,\frac{\mathbf{R}}{R^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= -G\,(M+m_P)\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Hier bedeutet G die Gravitationskonstante und M, m_E, und m_p die Massen der Sonne, der Erde und des Planeten. Die Massen der Erde und des Planeten können wir hier gegenüber der Masse der Sonne

zunächst vernachlässigen. Auch gravitative Störungen anderer Planeten werden nicht berücksichtigt. Von der Erde aus wird der Planet zu einem Zeitpunkt t in einer bestimmten Richtung $\mathbf{e}$ an der Himmelssphäre gesehen. Für den Verbindungsvektor gilt

$$\mathbf{r} - \mathbf{R} = \varrho\,\mathbf{e} \tag{3.2}$$

Der Einheitsvektor $\mathbf{e}(t)$ beschreibt durch seine Richtungsänderungen die scheinbare Schleifenbahn eines Planeten oder Kometen an der Himmelssphäre. Die Größe ϱ ist einfach die Distanz vom Planeten zur Erde - beide Körper als Punktmassen aufgefasst. Durch zweimaliges Differenzieren nach der Zeit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} - \mathbf{R} &= \varrho\,\mathbf{e} && (3.3)\\
\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}} &= \dot{\varrho}\,\mathbf{e} + \varrho\,\dot{\mathbf{e}} && (3.4)\\
\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{R}} &= \ddot{\varrho}\,\mathbf{e} + 2\,\dot{\varrho}\,\dot{\mathbf{e}} + \varrho\,\ddot{\mathbf{e}} && (3.5)
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung ersetzen wir die zweiten Ableitungen der Bahnvektoren wieder durch die Bewegungsgleichung und erhalten (m_E und $m_P \approx 0$)

$$G\,M\left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = \ddot{\varrho}\,\mathbf{e} + 2\,\dot{\varrho}\,\dot{\mathbf{e}} + \varrho\,\ddot{\mathbf{e}} \tag{3.6}$$

Den heliozentrischen Positionsvektor $\mathbf{R}$ der Erde oder entsprechend den geozentrischen Vektor $-\mathbf{R}$ der Sonne (*Sonnentafeln*) muss man hier natürlich als bekannt voraussetzen. Der unbekannte Planetenort $\mathbf{r}$ lässt sich ebenfalls durch (3.3) ersetzen, so dass auch

$$G\,M\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right)\mathbf{R} = \left(G\,M\,\frac{\varrho}{r^3} + \ddot{\varrho}\right)\,\mathbf{e} + 2\,\dot{\varrho}\,\dot{\mathbf{e}} + \varrho\,\ddot{\mathbf{e}} \tag{3.7}$$

gilt. Da der Vektor $\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}$ senkrecht auf $\mathbf{e}$ und $\dot{\mathbf{e}}$ steht, können wir durch skalare Multiplikation die Terme proportional $\dot{\varrho}$ und $\ddot{\varrho}$ zum verschwinden bringen. Wir erhalten so die fundamentale Relation zwischen zwei *Spatprodukten*

$$G\,M\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right)[\mathbf{R}, \mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}] = [\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}, \ddot{\mathbf{e}}]\,\varrho. \tag{3.8}$$

Diese fundamentale Beziehung spielte im 18. und 19. Jahrhundert eine große Rolle. Mit ihr konnte J.H. Lambert (1728 - 1777) einen Satz zwischen der Krümmung der scheinbaren Bahn des Planeten oder Kometen am Himmel im Bezug zur Sonne und seiner Entfernung r im Vergleich zur Erde formulieren. Gelingt es außerdem, die beiden Spatprodukte für einen bestimmten Zeitpunkt aus den Beobachtungen *numerisch* zu bestimmen, so führt dies mit der quadrierten Gleichung (3.1)

$$r^2 - 2\,\mathbf{r} \circ \mathbf{R} + R^2 = \varrho^2 \tag{3.9}$$

zu einer algebraischen Gleichung achten Grades in r. Damit wäre das Problem der Bahnbestimmung[1] eigentlich gelöst - wenn es nicht Probleme bei der numerischen Bestimmung von Ableitungen zweiter Ordnung aus diskreten Beobachtungen gäbe. Die Bestimmung einer Kreisbahn ist etwas einfacher, da reicht schon die Gleichung (3.4) nach vektorieller Multiplikation mit $\mathbf{e}$ aus, um mit (3.9) vier Gleichungen für die vier Unbekannten r, ϱ und für die zwei Richtungskomponenten des Drehimpulsvektors abzuleiten. Genau diesen Spezialfall hat 1783 der schwedisch - finnische Mathematiker A. J. Lexell (1740-1784) bei der ersten Bahnbestimmung des neu entdeckten Planeten Uranus angewendet, um zu zeigen, dass es sich nicht um einen Kometen handeln kann. Idealisiert man die Bahnen von Erde und Uranus als Kreise in der Ekliptikebene, so gilt für den Richtungswinkel φ die Gleichung

$$e^{2\,\imath\,\varphi} = \frac{R_2\, e^{+\imath\,\omega_2\,t} - R_1\, e^{+\imath\,\omega_1\,t}}{R_2\, e^{-\imath\,\omega_2\,t} - R_1\, e^{-\imath\,\omega_1\,t}}. \tag{3.10}$$

Kurz darauf hat dann 1797 der Bremer Arzt und Fachastronom H.W. Olbers eine neue Methode für parabolische Kometenbahnen angegeben, bei der die Verwendung von Ableitungen vermieden wird. Endgültig hat C.F. Gauss (1777-1855) in seiner *Theoria motus* von 1809 die obige Schlüsselgleichung mit Hilfe des *Sektor zu Dreieck* Verhältnisses in einer beliebigen Keplerbahn auf drei diskrete Beobachtungsrichtungen erweitert. Er hat damit das *Anfangswertproblem* in ein *Randwertproblem* verwandelt, welches man mit den Beobachtungsdaten numerisch genauer lösen kann.

[1] Diese Methode hat insbesondere P.S. Laplace (1749-1827) in seiner *Méchanique céleste* diskutiert

Doch die Problematik bei der Uranusbahn um 1835 war eine ganz andere. Man hatte seit seiner Entdeckung 1781 durch W. HERSCHEL zahlreiche Positionsmessungen vorliegen, die sich aber nach Abzug der schwachen gravitativen Störungen von Jupiter und Saturn nicht durch eine einfache Ellipsenbahn darstellen ließen. Der Planet wich immer wieder aus der schwach elliptischen Sollbahn aus. Am 5. Dezember 1844 erschien in der Zeitschrift *Göttingische gelehrte Anzeigen* auf Seite 1929/1930 in zunächst lateinischer und dann in deutscher Sprache folgende Hauptpreisfrage für den November 1846:[2]

> *Die Uranustafeln, deren wir uns noch gegenwärtig bedienen, sind allein auf die in dem Zeitraume von 1781 - 821 erhaltenen Beobachtungen gegründet, und stellen dieselben sehr gut dar, so weit die von dem Urheber der Tafeln allerdings nur in einem sehr abgekürzten Auszügen beigebrachten Mitteilungen ein Urteil verstatten. Die siebenzehn aus zufälligen älteren Beobachtungen von Flamsteed, Bradley, Tobias Mayer und Lemonnier hergeleiteten Ortsbestimmungen hatten sich mit den neueren nicht befriedigend vereinigen lassen, und waren deshalb von der Begründung der Tafeln ausgeschlossen geblieben, von welchen sie zum Teil etwas über eine Minute abweichen.*
>
> *Allein auch jene Übereinstimmung der Tafeln mit den neueren Beobachtungen hat sich nicht lange bewährt: die Abweichungen der Tafeln haben bald angefangen merklich zu werden, und sind, von Jahr zu Jahr sich vergrößernd, jetzt bereits auf fast zwei Bogenminuten angewachsen. Die königliche Sozietät verlangt daher:*
>
> *Eine den hinlänglich bekannten Anforderungen, welche der gegenwärtige Stand der Wissenschaft an derartige Untersuchungen macht, genügende neue Bearbeitung der Theorie der Uranusbewegungen, und erwartet die Darlegung der Hauptmomente in einer angemessenen Ausführlichkeit.*

Es ist in dieser etwas geheimnisvollen Ankündigung - die wahrscheinlich von GAUSS formuliert wurde - bemerkenswert, dass mit keinem Wort

[2] Göttingische gelehrte Anzeigen 194.195. Stück (1844)

auf die vielleicht zu bearbeitende Hypothese eines weiteren Planeten jenseits von Uranus und seine gravitativen Störungen eingegangen wird. Auch wird nicht gezielt die Teilaufgabe gestellt, eine Prognose für die Masse, Bahn und Position eines hypothetischen Planeten jenseits von Uranus auszusprechen, welcher die beobachtenden Abweichungen der letzten Jahrzehnte erklären könnte.

Doch genau dieser Aufgabe werden wir uns jetzt - wie ADAMS und LE VERRIER - in einer historischen Rückschau stellen. Mit der Hypothese, dass sich noch ein weiterer Planet außerhalb von Uranus bewegt, muss seine Bewegungsgleichung noch durch einen zusätzlichen Term (neben den Störungen von Saturn und Jupiter)

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_U &= -G(M+m_U)\,\frac{\mathbf{r}_U}{r_U^3} + \\ &\quad +G\,m_N\,\epsilon\left(\frac{\mathbf{r}_N-\mathbf{r}_U}{|\mathbf{r}_N-\mathbf{r}_U|^3}-\frac{\mathbf{r}_N}{|\mathbf{r}_N|^3}\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_N &= -G(M+m_N)\,\frac{\mathbf{r}_N}{r_N^3} + \\ &\quad +G\,m_U\,\epsilon\left(\frac{\mathbf{r}_U-\mathbf{r}_N}{|\mathbf{r}_U-\mathbf{r}_N|^3}-\frac{\mathbf{r}_U}{|\mathbf{r}_U|^3}\right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

erweitert werden. Der Index „U“ bezieht sich hier auf den Planeten Uranus, der Index „N“ auf den noch unbekannten Planeten Neptun. Die Vektoren beziehen sich auf den Sonnenmittelpunkt - die Bewegung wird also *heliozentrisch* beschrieben. Der Störparameter ϵ wurde hier *künstlich* eingeführt, um die Größenordnung einer analytischen Störungstheorie im nächsten Abschnitt zu veranschaulichen. Die Störungsfunktion zerfällt hier in zwei Teile - den direkten Teil, der umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung des unbekannten Planeten ist, und den durch die Verschiebung des Baryzentrums (*Schwerpunktes*) erzeugten indirekten Teil im Dreikörperproblem. In diesem Koordinatensystem ruht also die Sonne im Zentrum des *heliozentrischen Systems*.

Es wäre nun aber für J.C. ADAMS oder U. LE VERRIER nicht ratsam gewesen, diese Bewegungsgleichung in die differentielle Bilanzgleichung (3.5) einzusetzen und dann nach einem geeigneten Rechenschema zu suchen, welches dann den genauen Positionsvektor $\mathbf{r}_N$ zu einer bestimmten Epoche liefert. Die Zahl der Unbekannten und die Unwägbarkeiten

sind einfach viel zu groß. Hinzu kommt, dass beide Spatprodukte in (3.8) nahe Nullen liegen, weil die Uranusbahn praktisch in der Ekliptikebene liegt. Da die Bahn des Uranus seit 1781 schon genähert bekannt war, kommt es bei der Rechnung eigentlich nur darauf an, *mit möglichst geringem Aufwand die genaueste Aussage zur wahrscheinlichsten Position des unbekannten Störplaneten zu machen.* Man war sich um 1840 auch darüber im Klaren, dass durch genauere Sternkarten in naher Zukunft dieser Planet - wenn er denn existiert - auch ohne eine theoretische Prognose rein zufällig entdeckt werden würde.

3.2 Die Approximation erster Ordnung

Die klassische Methode, die gekoppelten Bewegungsgleichungen (3.11) und (3.12) zu lösen, besteht darin, eine Reihenentwicklung nach Potenzen eines fiktiven Störparameters ϵ in der Form[3]

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_U[t] &= \mathbf{r}_{U_0}[t] + \epsilon\, \mathbf{r}_{U_1}[t] + O[\epsilon]^2, \\ \mathbf{r}_N[t] &= \mathbf{r}_{N_0}[t] + \epsilon\, \mathbf{r}_{N_1}[t] + O[\epsilon]^2. \end{aligned}$$

anzusetzen. Dieser künstliche dimensionslose Parameter ϵ dient zur Kontrolle der Ordnung der störenden Kräfte beim Einsetzen in die Bewegungsgleichungen. Wir beschränken uns hier auf Störungen erster Ordnung in ϵ und somit auch in den Massenverhältnissen m_U/M und m_N/M. Setzt man die obigen Reihen in die Bewegungsgleichungen (3.11) und (3.12) ein, so erhält man durch Koeffizientenvergleich von ϵ in nullter Ordnung

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_{U_0} &= -G(M+m_U)\,\frac{\mathbf{r}_{U_0}}{|\mathbf{r}_{U_0}|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_{N_0} &= -G(M+m_N)\,\frac{\mathbf{r}_{N_0}}{|\mathbf{r}_{N_0}|^3}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen beschreiben die ungestörten Bewegungen der beiden Planeten in Keplerschen Ellipsen. Für die Korrektur erster Ordnung

[3] Die Entwicklung ist aber nur semikonvergent

ergibt sich für Uranus die Vektorgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}}_{U_1} + \frac{G\,(M + m_U)}{|\mathbf{r}_{U_0}|^3}\left(\mathbf{r}_{U_1} - 3\,(\mathbf{r}_{U_0} \circ \mathbf{r}_{U_1})\,\frac{\mathbf{r}_{U_0}}{|\mathbf{r}_{U_0}|^2}\right) = G\,m_N\left(\frac{\mathbf{r}_{N_0} - \mathbf{r}_{U_0}}{|\mathbf{r}_{N_0} - \mathbf{r}_{U_0}|^3} - \frac{\mathbf{r}_{N_0}}{|\mathbf{r}_{N_0}|^3}\right). \tag{3.13}$$

Diese Gleichung repräsentiert drei gekoppelte *inhomogene Mathieusche* oder *Hillsche Differentialgleichungen* für die durch Neptunstörungen verursachte Bahnabweichung $\mathbf{r}_{U_1}[t]$ erster Ordnung des Planeten Uranus von seiner Keplerschen Ellipse erster Ordnung. Eine analoge Vektorgleichung gilt natürlich auch für die Abweichungen des Neptuns von einer Keplerschen Ellipse, welche wir aber hier für unsere Betrachtungen vernachlässigen werden.

Wir beabsichtigen in diesem Buch, mit den gleichen Beobachtungsdaten, die ADAMS und LE VERRIER zu Gebote standen, die analytischen Rechnungen aus einer modernen physikalisch - kosmogonischen Perspektive zu wiederholen. In der wichtigen Vektorgleichung (3.13), deren allgemeine Lösungen schon sehr kompliziert sein können, nehmen wir zunächst an, dass die Bahnebene des unbekannten Planeten mit der des Uranus *identisch* ist. Gegenüber ADAMS und LE VERRIER machen wir zusätzlich noch drei weitere sinnvolle Vereinfachungen:

- Die Bahn von Uranus soll bei der Entwicklung der gravitativen Störfunktion exakt kreisförmig angenommen werden. Dies reduziert die Mathieusche Differentialgleichung auf eine einfachere Oszillatorgleichung. Diese Annahme kann allerdings die Genauigkeit einer späteren Positionsprognose von Neptun für das Jahr 1846 beeinflussen.

- Die Bahn des unbekannten Planeten (Neptun) soll ebenfalls kreisförmig sein. Die sichere Bestimmung einer Bahnexzentrizität des störenden Planeten halten wir mit den wenigen Daten von 1760-1845 für sehr ungenau und auch nicht nötig.

- Für den Bahnradius des Neptun nehmen wir eine *entwicklungsbedingte* 2:1 Resonanz zu Uranus an. Der störende äußere Planet Neptun soll also die doppelte Umlaufzeit von Uranus haben. Die Güte dieser Annahme kann man leicht mit anderen Resonanzen der Form $\ell : \ell - 1$ testen

Motiviert wird die Annahme einer exakten 2:1 Resonanz auch durch die dadurch wesentlich vereinfachte analytische Störungstheorie. Wir setzen so für die Distanz des unbekannten Planeten von der Sonne nicht die sogenannte *Titius - Bodesche Regel* an, wie es J.C. Adams und auch U. Le Verrier in ihren ersten Modellrechnungen getan haben. Wir werden sehen, dass die Annahme einer exakten Resonanz nicht nur *kosmogonisch* bedeutsam ist, sondern auch für die Eindeutigkeit der Prognose für die ekliptikale Länge des unbekannten Planeten Neptun wichtige Vorteile bietet.

Die Annahme gleicher Bahnneigungen bedeutet, dass die Bewegung zweidimensional ist. Wir gehen zudem in unserem Modell davon aus, daß sich die Planeten Uranus und auch der noch unbekannte Neptun auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegen. Wir können daher für Uranus die zeitlich konstante Umlauffrequenz

$$\omega_U^2 = \frac{G(M+m_U)}{|\mathbf{r}_{U_0}|^3} \tag{3.14}$$

einführen. Die obige Vektorgleichung (3.13) vereinfacht sich so zu

$$\ddot{\mathbf{r}}_{U_1} + \omega_U^2 \left(\mathbf{r}_{U_1} - 3\,(\mathbf{r}_{U_0} \circ \mathbf{r}_{U_1})\,\frac{\mathbf{r}_{U_0}}{|\mathbf{r}_{U_0}|^2} \right) = G\,m_N \left(\frac{\mathbf{r}_{N_0} - \mathbf{r}_{U_0}}{|\mathbf{r}_{N_0} - \mathbf{r}_{U_0}|^3} - \frac{\mathbf{r}_{N_0}}{|\mathbf{r}_{N_0}|^3} \right). \tag{3.15}$$

Wir interpretieren zweidimensionale Vektoren nun als *komplexe Zahlen* und fassen Real - und Imaginärteil zu einer Gleichung zusammen. Es gilt somit

$$\mathbf{r}_{U_0}[t] = R_U\, e^{\imath\,\omega_U\,t} \qquad \mathbf{r}_{N_0}[t] = R_N\, e^{\imath\,\omega_N\,t}. \tag{3.16}$$

Die Zeitepoche $t = 0$ entspricht der unteren Konjunktion der beiden Planeten. Sie stehen dann auf der gleichen Seite in einer Linie mit der Sonne. Die kleinen Abweichungen $\mathbf{r}_{U_1}$ des Uranus von dieser Kreisbahn zerlegen wir im mitrotierenden Uranussystem in eine rein radiale und in eine rein tangentiale Komponente. Wir schreiben (siehe Abb. 3.1 und 3.2)

$$\mathbf{r}_U = x_U + \imath\, y_U = (R_U + \epsilon\, x)\, \exp\left[\imath\,(\omega_U\, t + \epsilon\, y/R_U)\right] \tag{3.17}$$

Der Parameter ϵ ist wieder ein *symbolischer* Entwicklungsparameter, der nach einer Taylorentwicklung eins gesetzt wird . Die Koordinate

$x[t]$ beschreibt nun die kleine radiale Abweichung des Uranus von einer Kreisbahn mit Radius R_U, wobei $x > 0$ die Richtung nach nach außen bedeutet. Die Größe y/R_U beschreibt die tangentiale Winkelabweichung von einer gleichförmigen *heliozentrischen* Kreisbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω_U, wobei $y > 0$ in Richtung der Bahnbewegung weist. Nur diese Winkelgröße war zu Beginn des 19. Jahrhunderts nach Abzug der Erdbahnbewegung auf das Sonnenzentrum direkt beobachtbar. Bis zur ersten Ordnung lautet die obige Transformation

$$\mathbf{r}_U = R_U\, e^{\imath\,\omega_U\, t} + (x + \imath\, y)\, e^{\imath\,\omega_U\, t} + \ldots \tag{3.18}$$

Der erste Teil ist $\mathbf{r}_{U_0}[t]$, der zweite Teil $\mathbf{r}_{U_1}[t]$ im rotierenden System. Damit gilt mit

$$z = x + \imath\, y \tag{3.19}$$

die Transformation

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{U_1} &= z\, e^{\imath\,\omega_U\, t}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_{U_1} &= \left(\ddot{z} + 2\,\imath\,\omega_U\,\dot{z} - \omega_U^2\, z\right)\, e^{\imath\,\omega_U\, t}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\ddot{\mathbf{r}}_{U_1} + \omega_U^2\, \mathbf{r}_{U_1} = \left(\ddot{z} + 2\,\imath\,\omega_U\,\dot{z}\right)\, e^{\imath\,\omega_U\, t}$$

sowie

$$\frac{\mathbf{r}_{U_0}}{|\mathbf{r}_{U_0}|^2} = \frac{e^{\imath\,\omega_U\, t}}{R_U}$$

Das Skalarprodukt ergibt im rotierenden System einfach

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{U_0} \circ \mathbf{r}_{U_1} &= \begin{pmatrix} R_U\, \cos[\omega_U\, t] \\ R_U\, \sin[\omega_U\, t] \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x\, \cos[\omega_U\, t] - y\, \sin[\omega_U\, t] \\ x\, \sin[\omega_U\, t] + y\, \cos[\omega_U\, t] \end{pmatrix} \\ &= R_U\, x \\ &= R_U\, \Re[z]. \end{aligned}$$

Nun lässt sich die Bewegungsgleichung (3.15) in der kompakten linearisierten Form

$$\begin{aligned} &\ddot{z} + 2\,\imath\,\omega_U\,\dot{z} - 3\,\omega_U^2\,\Re[z] = \\ &\qquad G\, m_N \left(\frac{\mathbf{r}_{N_0} - \mathbf{r}_{U_0}}{|\mathbf{r}_{N_0} - \mathbf{r}_{U_0}|^3} - \frac{\mathbf{r}_{N_0}}{|\mathbf{r}_{N_0}|^3}\right) \exp[-\imath\,\omega_U\, t] \end{aligned} \tag{3.20}$$

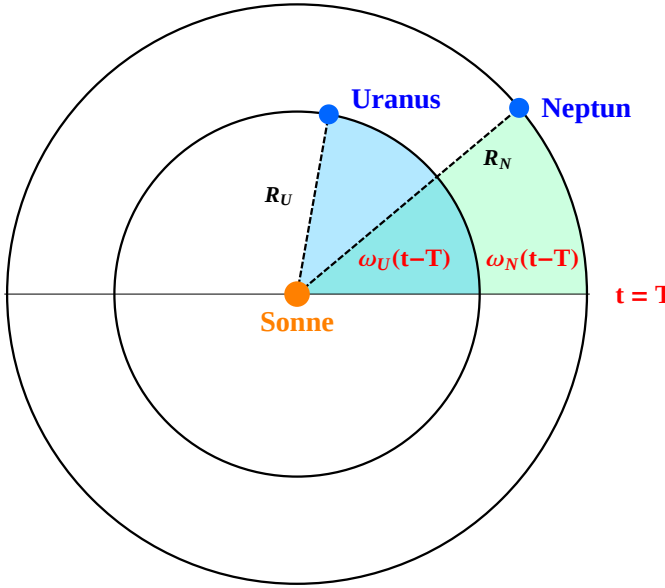

Fig. 3.1: *Die als Kreise idealisierten Bahnen von Uranus und Neptun. Der Zeitpunkt $t = T$ bezeichnet die untere Konjunktion, bei der Sonne, Uranus und Neptun auf derselben Seite in einer Linie stehen.*

schreiben. In diesem Modell ist der Zeitpunkt $t = 0$ oder $t = T$ die relative Position beider Planeten in der *unteren Konjunktion*, wenn Sonne, Uranus und Neptun in einer geraden Linie stehen. Die Bestimmung dieses Zeitpunktes ist für die spätere Positionsbestimmung des unbekannten Planeten essentiell.

Mit (3.20) liegt die *fundamentale Modellgleichung* für das Studium von gravitativen Störungen *erster Ordnung* an einer kreisförmigen oder schwach elliptischen Uranusbahn durch einen äußeren Planeten in einer Kreisbahn vor. Getrennt in Realteil und Imaginärteil wurde sie so zuletzt von den chinesischen Physikern Lai, Lam & Young im Jahre 1990 diskutiert ([35]). Als Grundlage für eine *numerische* oder *elegante analytische Modellierung* von beobachteten Residuen ist sie hervorragend geeignet. Die von Adams und Le Verrier verwendete Störungstheorie und besonders deren Ergebnisse werden wir anhand die-

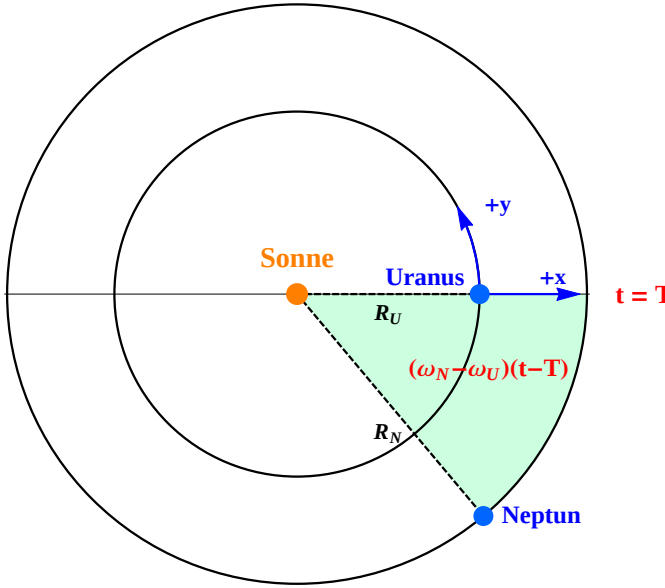

Fig. 3.2: *Die Situation im rotierenden Koordinatensystem von Uranus. Der Zeitpunkt $t = T$ bezeichnet wieder die untere Konjunktion von Uranus und Neptun. Kleine Abweichungen des Uranus von der Kreisbahn werden durch das mit-rotierende lokale x-y Koordinatensystem beschrieben.*

ser Modellgleichung besonders im Falle elliptischer Bahnen für Neptun testen.

Die Modellgleichung beschreibt ganz allgemein kleine Abweichungen des Uranus von der angenommen ungestörten Kreisbahn. Doch die Gleichung beschreibt auch kleine Abweichungen von einer angenommenen Ellipsenbahn. Denn (3.20) ist invariant gegenüber der Transformation

$$z[t] \to z[t] + \epsilon_U \, R_U \, \left(\cos[\omega_U \, (t-T)] - 2\,\imath \, \sin[\omega_U \, (t-T)]\right),$$

wobei der zweite Teil im rotierenden Koordinatensystem die epizyklische Bewegung einer Ellipsenbahn mit der Exzentrizität ϵ_U darstellt . Diese Invarianz unserer linearisierten Modellgleichung erleichtert die Interpretation der beobachteten Residuen bei den ekliptikalen Längen der Uranusbahn.

3.3 Die Oszillatorgleichung

Im nächsten Schritt ist es zweckmäßig, die Längeneinheit in der Modellgleichung (3.20) dimensionslos zu machen. Wir setzen

$$z = R_U\,\zeta. \tag{3.21}$$

Die Größe $\Im\{\zeta[t]\}$ bedeutet jetzt direkt die Abweichung der heliozentrischen Länge des Uranus von seiner Sollbahn in *Bogenmaß*. Für die Zeiteinheit ist sicherlich das siderische Jahr weiterhin zweckmäßig.

In der Tradition der klassischen Himmelsmechanik führen wir weiterhin die dimensionslose Verhältniszahl der Bahnradien R_U und R_N nach

$$\alpha = \frac{R_U}{R_N} = \left(\frac{\omega_N}{\omega_U}\right)^{2/3} = \left(\frac{T_U}{T_N}\right)^{2/3} \tag{3.22}$$

ein, wobei $0 < \alpha < 1$ gilt und T_U sowie T_N die Umlaufzeiten der Planeten Uranus und Neptun bedeuten. Wir setzten hier das dritte Keplersche Gesetz ohne die Massenkorrekturen als genügend genau voraus. Mit alledem lautet unsere endgültige fundamentale Modellgleichung

$$\boxed{\ddot{\zeta} + 2\,\imath\,\omega_U\,\dot{\zeta} - 3\,\omega_U^2\,\Re[\zeta] = \mu\,\omega_U^2\;\mathbf{g}[\alpha, t]} \tag{3.23}$$

mit der periodischen gravitativen Störfunktion

$$\mathbf{g}[\alpha,\varphi] = \alpha^2\left\{\frac{\exp\left[-\imath\,\varphi\right]-\alpha}{\left(1-2\,\alpha\,\cos\left[\varphi\right]+\alpha^2\right)^{3/2}} - \exp\left[-\imath\,\varphi\right]\right\} \tag{3.24}$$

und dem Massenverhältnis $\mu = m_N/M$ von Neptunmasse zur Sonnenmasse. Für die Phase φ gilt

$$\varphi = (\omega_U - \omega_N)\,(t - T), \tag{3.25}$$

wobei T die zu bestimmende zeitnahe Epoche der unteren Konjunktion beider Planeten Uranus und Neptun bezeichnet. Da die Abweichung der heliozentrischen Länge $\Im\{\zeta[t]\}$ in Bogensekunden gemessen wird, ist es sinnvoll, das Massenverhältnis μ durch Multiplikation mit der Zahl

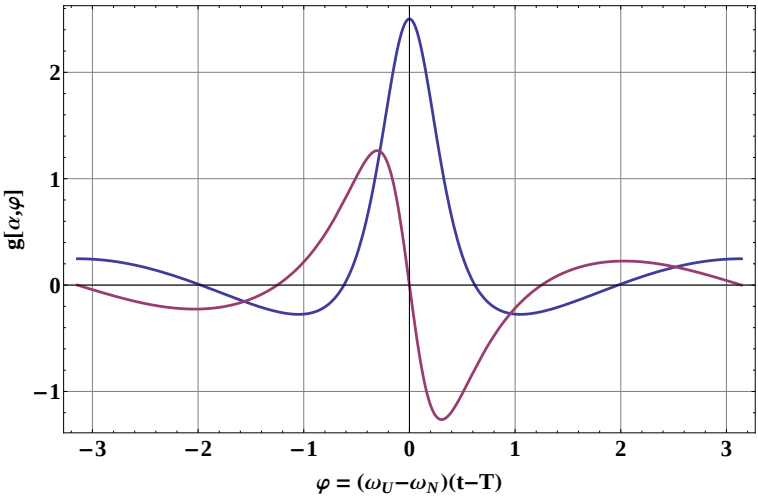

Fig. 3.3: *Die radiale (blau) und die tangentiale (rot) Störbeschleunigung* $\Re[g[\alpha,\varphi]]$ *sowie* $\Im[g[\alpha,\varphi]]$ *bei einer 2:1 Resonanz mit* $\alpha = 2^{-2/3}$. *Im Falle von Uranus - Neptun liegt die Periode bei etwa 171.4 Jahren, im hypothetisch Fall einer exakten 2:1 Resonanz bei 168.0 Jahre. Der Zeitpunkt* $t = T$ *bezeichnet wieder die untere Konjunktion oder gleiche heliozentrische Längen beider Planeten in ihrer Bahn.*

206265 in Bogensekunden umzuwandeln. Für das Massenverhältnis von Neptun zur Sonne gilt der heutige moderne Wert

$$\mu = \frac{m_N}{M} \sim \mathbf{1 : 19412}. \tag{3.26}$$

Durch Multiplikation mit dem gerundeten Faktor 206265 Bogensekunden pro Radian ($= 360^2/(2\pi)$) ergibt sich so in der eigentlichen Störfunktion der zu erwartende Massenwert in Bogensekunden

$$\mu \sim \frac{206265}{19412} \sim \mathbf{10.63}[''] \tag{3.27}$$

In einem *Modell-fit*, in der die heliozentrischen Winkelabweichungen $\Im[\zeta[t]]$ in Bogensekunden gemessen werden, erwarten wir somit für die Amplitude des unbekannten Massenparameters μ in (3.23) ein Winkelmaß in der Größenordnung von 10 Bogensekunden.

Die fundamentale Schlüsselgleichung (3.23) zur Interpretation der Irregularitäten in der Uranusbahn von 1690 bis zum Jahre 1845 hat eine wichtige Invarianzeigenschaft bezüglich der Transformation

$$\zeta[t] \quad \rightarrow \quad \zeta[t] + \epsilon \, \{\cos[\omega_U \, (t-T)] - 2\,\imath \, \sin[\omega_U \, (t-T)]\} \, .$$

Die aufgeprägte *epizyklische* Bewegung in unserem rotierenden Koordinatensystem mit der Winkelgeschwindigkeit ω_U entspricht aber in einem nicht-rotierenden System einer elliptischen Bahnbewegung mit der Exzentrizität ϵ. Die Oszillatorgleichung beschreibt somit nicht nur kleine Abweichungen von einer Kreisbahn, sondern auch kleine Abweichungen von einer schwach exzentrischen Ellipsenbahn. Diese Eigenschaft ist entscheidend bei der Interpretation der Beobachtungsdaten von ADAMS und LE VERRIER am Planeten Uranus. Und dies ist auch der Vorteil unserer analytischen Lösung der Modellgleichung: Wir können sehr einfach zwischen dem Anteil der *Nachjustierung der Uranusbahn* und der eigentlichen Störung durch Neptun unterscheiden.

Um die Modellgleichung im analytischen Bild weiter zu vereinfachen, müssen wir die Gleichung wieder in ihren Realteil und Imaginärteil aufspalten. Dann gilt

$$\ddot{\xi} - 2\,\omega_U \dot{\eta} - 3\,\omega_U^2 \xi = \mu \, \omega_U^2 \, \alpha^2 \left\{ \frac{\cos[\varphi] - \alpha}{\left(\sqrt{1 - 2\,\alpha \, \cos[\varphi] + \alpha^2}\right)^3} - \cos[\varphi] \right\} . \tag{3.28}$$

und

$$\ddot{\eta} + 2\,\omega_U \dot{\xi} = -\mu \, \omega_U^2 \, \alpha^2 \left\{ \frac{\sin[\varphi]}{\left(\sqrt{1 - 2\,\alpha \, \cos[\varphi] + \alpha^2}\right)^3} - \sin[\varphi] \right\} . \tag{3.29}$$

Die Größe $\eta[t]$ bedeutet jetzt direkt die sehr kleine *heliozentrische Winkelabweichung* von der elliptischen Sollbahn in Bogenmaß oder in Bogensekunden. Die Größe $R_U \, \xi[t]$ beschreibt dagegen sowohl die radiale Abweichung der Uranusbahn von ihrer Sollbahn durch die Störung des unbekannten Planeten Neptun als auch Korrekturen zur oskulierenden Ellipsenbahn von BOUVARD.

3.4 Die homogene Lösung

Das allgemeine Integral von zwei gekoppelten *linearen inhomogenen Differentialgleichungen* besteht aus zwei Teilen: 1.) Das allgemeine Integral der zugehörigen gekoppelten homogenen Gleichungen zweiten Grades, welches *vier willkürliche Konstanten* enthält und das *komplementäre Integral* genannt wird, und 2.) eine *partikuläre Lösung* der gekoppelten inhomogenen Gleichungen, welche keine willkürlichen Konstanten mehr enthält. Nur der zweite Teil bezieht sich auf die Störung durch Neptun. Zunächst wollen wir uns mit der homogenen Lösung des Systems beschäftigen. Es gilt

$$\ddot{\xi} - 2\,\omega_U \dot{\eta} - 3\,\omega_U^2 \xi = 0; \qquad \ddot{\eta} + 2\,\omega_U \dot{\xi} = 0. \tag{3.30}$$

Die allgemeine Lösung mit den Anfangsbedingungen

$$\xi[0] = a,\ \eta[0] = b,\ \dot{\xi}[0] = \omega_U\, c,\ \dot{\eta}[0] = \omega_U\, d \tag{3.31}$$

lautet

$$\begin{aligned} \xi[t] &= 4\,a + 2\,d - (3\,a + 2\,d)\,\cos[\omega_U\, t] + c\,\sin[\omega_U\, t] \\ \eta[t] &= b - 2\,c - 3\,(2\,a + d)\,\omega_U\, t + 2\,c\,\cos[\omega_U\, t] \\ &\quad +2\,(3\,a + 2\,d)\,\sin[\omega_U\, t] \end{aligned}$$

Die Bewegung in $\eta[t]$ wird somit von vier Termen mit vier Parametern bestimmt. Führen wir anstatt der Anfangsbedingungen vier neue Konstanten $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ und β_4 ein, so gilt einfacher

$$\xi[t] = -\frac{2}{3}\,\beta_2 + \frac{1}{2}\,\beta_3\,\sin[\omega_U t] - \frac{1}{2}\,\beta_4\,\cos[\omega_U t] \tag{3.32}$$

$$\eta[t] = \beta_1 + \beta_2\,\omega_U\, t + \beta_3\,\cos[\omega_U t] + \beta_4\,\sin[\omega_U t] \tag{3.33}$$

Die Zeitfunktion $\xi[t] + \imath\,\eta[t]$ mit ihren willkürlichen Parametern β_j ist somit immer eine Lösung der Modellgleichung (3.23) und beschreibt physikalisch nur eine *Korrektur der elliptischen Bahn*, die als Grundlage von Bouvard zur Berechnung der Uranusbahn bis zum Jahre 1846 benutzt wurde.

Man sieht anhand von (3.33) noch mehr. Ist die tangentiale Bewegung in der obigen homogenen Lösung $\eta[t]$ mit ihren vier Konstanten $\beta_j, (j =$

$1, .., 4$) aus Beobachtungen bekannt, so ist auch die radiale Bewegung $\xi[t]$ festgelegt. Diese Tatsache wird noch eine wichtige Rolle spielen, wenn wir später den Brief von AIRY vom 5. November 1845 an ADAMS in Betracht ziehen müssen. Hier fragte der zweifelnde AIRY:

> *... I shall be very glad to know whether the assumed perturbation will explain the error of the radius vector of Uranus. This error is now very considerable ...*

Der historische Fehler von ADAMS war hier, dass er auf diesen entscheidenden Brief nicht sofort geantwortet hatte. Konnte er nicht oder wurde er durch seine schüchterne Verhaltensweise daran gehindert? Denn am 13. November 1845 bemerkte AIRY auf einer RAS-Konferenz nochmals:

> *... I therefore considered that the trial, whether the error of the radius vector would be explained by the same theory which explained the longitude, would be truly an* ***experimentum crucis****...*

Bei der Frage von AIRY drängt sich schon hier das Problem auf, ob die radiale Abweichung mehr dieser homogenen Lösung oder mehr der wirklichen inhomogenen partikulären Lösung zu Schulden ist, welche ja nur von der Masse des Störplaneten abhängig ist. Die obige homogene Lösung zeigt zumindest schon eindeutig, dass man aus einer bekannten heliozentrischen Bewegung $\eta[t] = \Im\{\zeta[t]\}$ in ekliptikaler Länge eindeutig auf die dazugehörige radiale Abweichung $\xi[t] = \Re\{\zeta[t]\}$ schließen kann.

3.5 Die partikuläre Lösung

Die Aufgabe ist jetzt, die charakteristische partikuläre oder inhomogene Lösung des Systems (3.28) und (3.29) oder der Schlüsselgleichung (3.23) zu finden. Die allgemeine Lösung wird dann eine *Superposition beider Funktionssysteme* sein. Die radiale und tangentiale Beschleunigungskomponente eines *äußeren Störplaneten in einer kreisförmigen Bahn* lautet nach den obigen Ergebnissen

$$\begin{aligned} g_\xi[\alpha, t] &= \frac{\cos[(\omega_U - \omega_N)\, t] - \alpha}{\left(\sqrt{1 - 2\,\alpha\,\cos[(\omega_U - \omega_N)] + \alpha^2}\right)^3} \\ &\quad - \cos[(\omega_U - \omega_N)\, t] \end{aligned} \tag{3.34}$$

und

$$g_\eta[\alpha,t] \;=\; -\frac{\sin[(\omega_U-\omega_N)\,t]}{\left(\sqrt{1-2\,\alpha\,\cos[(\omega_U-\omega_N)\,t]+\alpha^2}\right)^3} + \sin[(\omega_U-\omega_N)\,t]. \tag{3.35}$$

Der Zeitpunkt $t=0$ entspricht hier der unteren Konjunktion, bei der beide Planeten mit der Sonne auf der gleichen Seite eine gerade Linie bilden und so der Drehimpulsübertrag verschwindet. Diese gravitativen Störbeschleunigungen werden jetzt in Fourierreihen der Form

$$g_x[n,t] = c_x[0,\alpha] + \sum_{n=1}^{\infty} c_x[n,\alpha]\,\cos[n\,(\omega_U-\omega_N)\,t] \tag{3.36}$$

und

$$g_y[n,t] = -\sum_{n=1}^{\infty} c_y[n,\alpha]\,\sin[n\,(\omega_U-\omega_N)\,t] \tag{3.37}$$

entwickelt. Man beachte hier das Minuszeichen in der Darstellung von $g_y[n,t]$.

Mit den skalierten Fourierkoeffizienten

$$C_x[n,\alpha] = \alpha^2\,c_x[n,\alpha], \qquad C_y[n,\alpha] = \alpha^2\,c_y[n,\alpha] \tag{3.38}$$

muss jede diskrete partikuläre Lösung (*Fouriermode*) ξ_n und η_n den gekoppelten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_n - 2\,\omega_U\dot{\eta}_n - 3\,\omega_U^2\xi_n &= +\mu\,\omega_U^2\,C_x[n,\alpha]\,\cos[n\,(\omega_U-\omega_N)\,t] \\ \ddot{\eta}_n + 2\,\omega_U\dot{\xi}_n &= -\mu\,\omega_U^2\,C_y[n,\alpha]\,\sin[n\,(\omega_U-\omega_N)\,t] \end{aligned}$$

genügen. Diese Forderung führt auf die Lösungen

$$\xi_n = \mu\,\frac{n\,(1-\frac{\omega_N}{\omega_U})\,C_x[n,\alpha]+2\,C_y[n,\alpha]}{n\,(1-\frac{\omega_N}{\omega_U})\,\{1-n^2\,(1-\frac{\omega_N}{\omega_U})^2\}}\,\cos[n\,(\omega_U-\omega_N)\,t] \tag{3.39}$$

und

$$\eta_n = \mu\,\frac{2\,n\,(1-\frac{\omega_N}{\omega_U})\,C_x[n,\alpha]+\{3+n^2\,(1-\frac{\omega_N}{\omega_U})^2\}\,C_y[n,\alpha]}{n^2\,(1-\frac{\omega_N}{\omega_U})^2\,\{n^2\,(1-\frac{\omega_N}{\omega_U})^2-1\}} \times \sin[n\,(\omega_U-\omega_N)\,t] \tag{3.40}$$

Diese partikulären *Responsefunktionen* sind brauchbar für $n \neq 0$ und $n\,(\omega_U - \omega_N) \neq \omega_U$. Für den Fall $n = 0$ gibt es die zwei einfachen partikulären Integrale

$$\xi_0 = 0; \qquad \eta_0 = -\frac{1}{2}\,\mu\,C_x[0,\alpha]\,\omega_U\,t \tag{3.41}$$

oder

$$\xi_0 = -\frac{1}{3}\,\mu\,C_x[0,\alpha]; \qquad \eta_0 = 0 \tag{3.42}$$

Die zweite Lösung ohne die tangentiale Driftbewegung werden wir in unserem Modell bevorzugen. Hier zeigt sich aber deutlich, dass die Zerlegung einer allgemeinen Lösung der Gleichung (3.23) in einen störungsfreien homogenen und einen speziellen partikulären Störungsanteil *nicht ganz eindeutig ist*, sondern letztendlich von Anfangsbedingungen der partikulären Lösung abhängig ist. Eine Erweiterung der Gleichung (3.23) auf nichtlineare Terme würde eine solche Zerlegung gänzlich illusorisch machen. Bei der Auswertung der Originaldaten hat dies nur Einfluss auf die Parameter β_j, $j = 1, ...4$, nicht aber auf die wichtigen Parameter μ und T.

Im Falle der **Resonanz** erfüllt *eine* der Frequenzen $n\,(\omega_U - \omega_N)$ für ein bestimmtes n die Bedingung

$$n = \frac{\omega_U}{\omega_U - \omega_N} = 2,\,3,\,4,\ldots \tag{3.43}$$

und die obigen partikulären Lösungen werden singulär und sind unbrauchbar. Für diesen speziellen Fall besitzen die gekoppelten Gleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_n - 2\,\omega_U\,\dot{\eta}_n - 3\,\omega_U^2\,\xi_n &= +\mu\,\omega_U^2\,C_x[n,\alpha]\,\cos[\omega_U\,t] \\ \ddot{\eta}_n + 2\,\omega_U\,\dot{\xi}_n &= -\mu\,\omega_U^2\,C_y[n,\alpha]\,\sin[\omega_U\,t] \end{aligned}$$

spezielle partikuläre analytische Lösungen. Eine mögliche partikuläre Lösung lautet

$$\begin{aligned} \xi_n^{(1)}[t] &= +\frac{1}{2}\,\mu\,\{C_x[n,\alpha] + 2\,C_y[n,\alpha]\}\,[\omega_U\,t]\,\sin[\omega_U\,t] \\ &\quad -\frac{1}{2}\,\mu\,\{C_x[n,\alpha] + C_y[n,\alpha]\}\,\cos[\omega_U\,t] \\ \eta_n^{(1)}[t] &= \mu\,\{C_x[n,\alpha] + 2\,C_y[n,\alpha]\}\,[\omega_U\,t]\,\cos[\omega_U\,t] \end{aligned} \tag{3.44}$$

Eine alternative *partikuläre Lösung* lautet

$$\begin{aligned}\xi_n^{(2)}[t] &= +\frac{1}{2}\,\mu\,\{C_x[n,\alpha]+2\,C_y[n,\alpha]\}\,[\omega_U\,t]\,\sin[\omega_U\,t]\\ \eta_n^{(2)}[t] &= \mu\,\{C_x[n,\alpha]+2\,C_y[n,\alpha]\}\,[\omega_U\,t]\,\cos[\omega_U\,t]\\ &\quad -\mu\,\{C_x[n,\alpha]+C_y[n,\alpha]\}\,\sin[\omega_U\,t] \qquad (3.45)\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung $\tau = \omega_U\,t$ enthalten beide Alternativen in radialer Richtung den säkularen Term $\tau\,\sin[\tau]$, in tangentialer Richtung den säkularen Term $\tau\,\cos[\tau]$ - beide mit identischer Amplitude. Die rein harmonischen Terme der Form $\cos[\tau]$ oder $\sin[\tau]$ werden bei der Superposition mit der homogenen Lösung *„verschluckt“*. Die erste partikuläre Lösung soll bei der weiteren Untersuchung bevorzugt werden, weil der Term $\eta_n^{(1)}[t]$ die resonante Signatur gegenüber der homogenen harmonischen Lösung *eindeutig* und in *einfachster Form* zeigt. Die Frage, ob der unbekannte Planet sich exakt oder in der Nähe einer Resonanz mit Uranus um die Sonne bewegt, kann mit Hilfe der Daten durch eine spätere wesentlich aufwendigere Simulation getestet werden.

Die vollständige analytische Darstellung für die gestörte heliozentrische Bewegung in ekliptikaler Länge lautet nach den obigen Ergebnissen im *nicht - resonanten Falle*

$$\begin{aligned}\eta[t] &= \beta_1 + \beta_2\,\omega_U\,(t-T) +\\ &\quad \beta_3\,\cos[\omega_U(t-T)] + \beta_4\,\sin[\omega_U(t-T)] +\\ &\quad \mu\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{yn}\,\sin[n\,(\omega_U-\omega_N)(t-T)].\end{aligned} \qquad (3.46)$$

Die wichtigen *Oszillatoramplituden* γ_{yn} ergeben sich zu

$$\gamma_{yn} = \frac{2\,n\,(1-\frac{\omega_N}{\omega_U})\,C_x[n,\alpha] + \{3+n^2\,(1-\frac{\omega_N}{\omega_U})^2\}\,C_y[n,\alpha]}{n^2\,(1-\frac{\omega_N}{\omega_U})^2\,\{n^2\,(1-\frac{\omega_N}{\omega_U})^2-1\}}. \qquad (3.47)$$

Das Radienverhältnis α kann durch das Frequenzverhältnis in der Form

$$\alpha = \left(\frac{\omega_N}{\omega_U}\right)^{2/3} \qquad (3.48)$$

ausgedrückt werden. Damit sind die Koeffizienten γ_n eine reine Funktion des Indexes n und des Frequenzverhältnisses ω_N/ω_U.

Eine ähnliche Analyse können wir auch für die radiale Bewegung durchführen. Mit (3.33) und (3.39) ergibt sich

$$\begin{aligned}\xi[t] = &-\frac{2}{3}\,\beta_2 + \\ &\frac{1}{2}\beta_3\,\sin[\omega_U\,(t-T)] - \frac{1}{2}\beta_4\,\cos[\omega_U\,(t-T)] + \\ &\mu\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{xn}\,\cos[n\,(\omega_U-\omega_N)(t-T)].\end{aligned} \tag{3.49}$$

mit

$$\gamma_{xn} = \frac{n\,(1-\frac{\omega_N}{\omega_U})\,C_x[n,\alpha] + 2\,C_y[n,\alpha]}{n\,(1-\frac{\omega_N}{\omega_U})\,\{1-n^2\,(1-\frac{\omega_N}{\omega_U})^2\}} \tag{3.50}$$

Die Modellfunktion (3.46) für die tangentialen Abweichungen enthält so sieben Parameter, die aus Beobachtungen gewonnen werden müssen. Setzt man nämlich die Umlaufzeit und damit auch die Frequenz ω_U von Uranus als bekannt voraus, so können durch Abgleich mit den Beobachtungen neben den vier Parametern β_j der homogenen Lösung, *die sich auf eine Korrektur der ungestörten Bahn des Planeten Uranus beziehen*, auch die eigentlich wichtigen Parameter μ, ω_N und T des unbekannten Planeten (Neptun) bestimmt werden. Die radialen Abweichungen folgen dann automatisch aus (3.49). Eine mögliche Bahnexzentrizität des störenden Planeten Neptun wird hier vollständig vernachlässigt. Spätere numerische Simulationen werden zeigen, dass ohne diese Annahme einer verschwindenden Exzentrizität *fast jede elliptische Bahn mit zunehmender Halbachse und Exzentrizität des störenden Planeten die Bahnanomalien des Uranus von 1690 bis 1845 erklären kann.*

3.6 Die Resonanz - Hypothese

Ähnlich wie Adams und Le Verrier werden wir nun für die *analytische Störungstheorie* in unserem idealisierten Modell eine vereinfachende Annahme machen. Anstatt doppelten Abstand der Neptunbahn nach

der *Titius-Bodeschen Regel* nehmen wir zunächst ganz allgemein an, dass sich der störende Planet in einer Resonanz zum Uranus befindet. Sehr interessant wäre hier die 2:1 Resonanz, also doppelte Umlaufzeit des störenden Planeten gegenüber der Uranusbahn. Diese Annahme ist nicht nur mathematisch von großem Vorteil, sondern diese Hypothese ist auch physikalisch durch kosmogonische Entwicklungsprozesse in der frühen Akkretionsscheibe durchaus wahrscheinlich[4] .

Wir setzen also jetzt für das Verhältnis der Bahnradien von Uranus und Neptun

$$\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \equiv \mathbf{0.629960}... \tag{3.51}$$

Mit dem Phasenwinkel

$$\tau = \omega_U\,(t - T) = \frac{2\,\pi}{T_U}\,(t - T) \tag{3.52}$$

erhält man im Resonanzfall $\omega_U = 2\,\omega_N$ mit (3.46) und der speziellen partikulären Lösung (3.44)

$$\eta[\tau] = \beta_1 + \beta_2\,\tau + \beta_3\,\cos[\tau] + \beta_4\,\sin[\tau] + \mu\,\{C_x[2,\alpha] + 2\,C_y[2,\alpha]\}\,\tau\,\cos[\tau] + \tag{3.53}$$

$$\mu\sum_{\substack{n=1\\ n\neq 2}}^{\infty}\frac{16\,n\,C_x[n,\alpha] + 4\,(12 + n^2)\,C_y[n,\alpha]}{n^2\,(n^2-4)}\,\sin\left[\frac{n\,\tau}{2}\right]. \tag{3.54}$$

Der mittlere Term proportional $\tau\,\cos[\tau]$ beschreibt die *säkulare Zunahme* der tangentialen Abweichungen durch die 2:1 Resonanz mit dem störenden Neptun um den Zeitpunkt der unteren Konjunktion beider Planeten bei $\tau = 0$. Der Term stellt eine spezielle partikuläre Lösung dar, die zusammen mit dem homogenen Teil die allgemeine Lösung darstellt. In Fig. (3.4) ist der Einfluss dieses Terms deutlich zu sehen. Die obige allgemeine Funktion besitzt somit die Struktur

$$\boxed{\eta[\tau] = \eta_h[\tau] + \mu\,\eta_p[\tau],} \tag{3.55}$$

[4] Um 1845 wurde die Hypothese einer doppelten Distanz des störenden Planeten kaum in Zweifel gezogen, da der 1781 entdeckte Planet Uranus im Vergleich zu Saturn eine etwa doppelt so große mittlere Entfernung zur Sonne hatte und somit die Titius-Bodesche Regel der einzige Leitfaden war. Allerdings kannte man schon lange die Bahnen von drei inneren Jupitermonden als ein physikalisches Vorbild für eine 2:1 Resonanzstruktur.

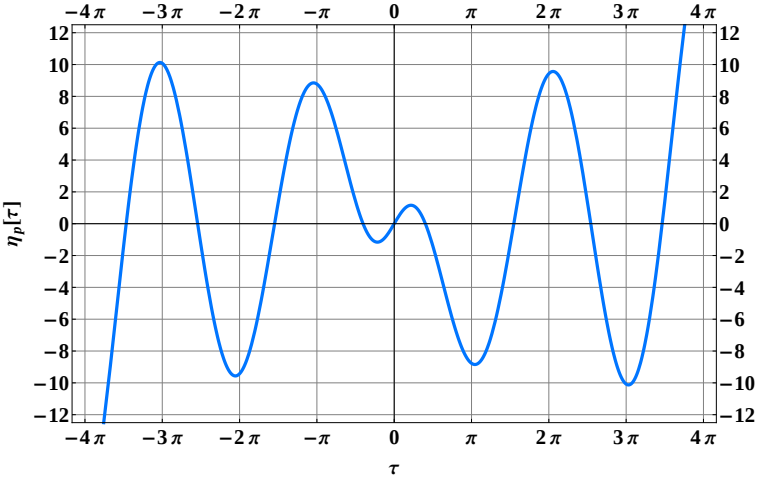

Fig. 3.4: *Die Responsefunktion $\eta_p[\tau]$ der heliozentrischen Länge eines gestörten Planeten bei einer 2:1 Resonanz als Funktion der Phase $\tau = \omega_U(t-T)$. Ein Amplituden - Vergleich mit den empirischen Daten von* Le Verrier *oder* Adams *lässt schon eine grobe Abschätzung der Masse des störenden Planeten Neptun zu. Der Nulldurchgang bei $\tau = 0$ bestimmt für die Planeten Uranus und Neptun den wichtigen Zeitpunkt der unteren Konjunktion.*

wobei $\eta_h[\tau]$ die homogene Lösung der Modellgleichung ist, welche nur eine Korrektur der Uranusbahn von Bouvard bestimmt, dagegen $\eta_p[\tau]$ die wichtige partikuläre oder spezielle Lösung beschreibt, die zusammen mit dem Massenfaktor μ die Einwirkung des störenden Planeten auf die *heliozentrische Länge* der Uranusbahn festlegt. Im Resonanzfall $2:1$ lautet die Darstellung dieser Funktion bis zur siebenten Ordnung explizit

$$\begin{aligned}\eta_p[\tau] \quad = \quad & +\mathbf{1.4999281}\,\tau\,\cos[\tau] \\ & -\mathbf{2.9851717}\,\sin\left[\tfrac{1}{2}\,\tau\right] + \mathbf{1.1464414}\,\sin\left[\tfrac{3}{2}\,\tau\right] \\ & +\mathbf{0.2614283}\,\sin\left[\tfrac{4}{2}\,\tau\right] + \mathbf{0.0872817}\,\sin\left[\tfrac{5}{2}\,\tau\right] \\ & +\mathbf{0.0346694}\,\sin\left[\tfrac{6}{2}\,\tau\right] + \mathbf{0.0152317}\,\sin\left[\tfrac{7}{2}\,\tau\right] + \ldots\end{aligned}$$

Diese Responsefunktion ist in der Figur (3.4) graphisch dargestellt. Multipliziert man diese Funktion mit dem Massenfaktor μ des Neptuns, der

in Winkeleinheiten nach (3.27) etwa 10 Bogensekunden beträgt, so erhält man die zu erwartenden Abweichungen der Uranusbahn von der heliozentrischen ekliptikalen Länge im Bereich von 20 bis 100 Bogensekunden. Das entsprechende Zeitfenster umfasst dabei zwei Uranusperioden vor und nach der unteren Konjunktion um das Jahr 1822.

Für die radiale Störung folgt im Resonanzfall 2:1 mit (3.49) analog

$$\begin{aligned}\xi[\tau] = &-\frac{2}{3}\,\beta_2 + \frac{1}{2}\,\beta_3\,\sin[\tau] - \frac{1}{2}\beta_4\,\cos[\tau] - \\ -\frac{1}{3}\,\mu\,C_x[0,\alpha] + &\frac{1}{2}\,\mu\,\{C_x[2,\alpha] + 2\,C_y[2,\alpha]\}\,\tau\,\sin[\tau] - \\ &\frac{1}{2}\,\mu\,\{C_x[2,\alpha] + C_y[2,\alpha]\}\,\cos[\tau] + \\ +\mu\,&\sum_{\substack{n=1\\ n\neq 2}}^{\infty} \frac{4\,n\,C_x[n,\alpha] + 16\,C_y[n,\alpha]}{n\,(4-n^2)}\,\cos\left[\frac{n\,\tau}{2}\right]. \qquad (3.56)\end{aligned}$$

Auch die radiale Responselösung können wir wieder in einen homogenen und und einen speziellen partikulären Bewegungsanteil gemäß

$$\boxed{\xi[\tau] = \xi_h[\tau] + \mu\,\xi_p[\tau],} \qquad (3.57)$$

aufspalten, wobei $\xi_h[\tau]$ die homogene Lösung ist, welche nur die Korrektur der Uranusbahn von BOUVARD bestimmt, und die partikuläre Funktion $\xi_p[\tau]$, die zusammen mit dem Massenfaktor μ des Neptuns die Einwirkung des störenden Planeten auf die *radiale Abweichung* der Uranusbahn festlegt. Für die exakte 2:1 Resonanz gilt bis zur siebten Dezimale und Ordnung die numerische Entwicklung

$$\begin{aligned}\xi_p[\tau] \;=\; &-\mathbf{0.0731594} \\ &+\mathbf{0.7499640}\;\tau\;\sin[\tau] - \mathbf{0.5198305}\;\cos[\tau] \\ &+\mathbf{0.8262222}\;\cos\left[\tfrac{1}{2}\,\tau\right] - \mathbf{0.7376673}\;\cos\left[\tfrac{3}{2}\,\tau\right] \\ &-\mathbf{0.1936255}\;\cos\left[\tfrac{4}{2}\,\tau\right] - \mathbf{0.0704800}\;\cos\left[\tfrac{5}{2}\,\tau\right] \\ &-\mathbf{0.0296252}\;\cos\left[\tfrac{6}{2}\,\tau\right] - \mathbf{0.0135307}\;\cos\left[\tfrac{7}{2}\,\tau\right] - \ldots\end{aligned}$$

Der Zeitraum von einer unteren Konjunktion bis zur nächsten Konjunktion beträgt in der dimensionslosen Einheit τ (siehe (3.52)) genau $4\,\pi$. Dies ist auch das halbe Zeitfenster der Graphiken (3.4) und (3.5).

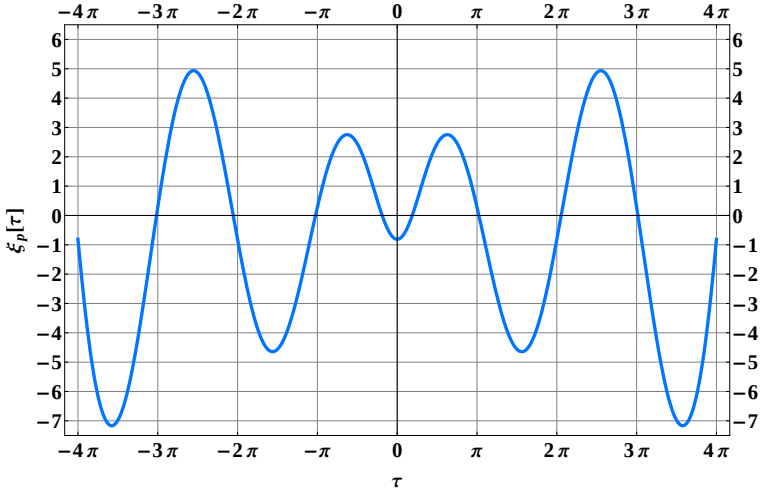

Fig. 3.5: *Die Responsefunktion $\xi_p[\tau]$ der radialen Abweichung eines gestörten Planeten bei einer 2:1 Resonanz als Funktion der Phase $\tau = \omega_U(t - T)$ vom Zeitpunkt der unteren Konjunktion $\tau = 0$.*

In Fig. (5.5) ist die Bahnkurve der partikulären Lösung $\{\xi_p[\tau], \eta_p[\tau]\}$ graphisch dargestellt. Durch die 2:1 Resonanz nimmt die Amplitude der Auslenkung aus der Ruhelage immer weiter zu. Nach Auswertung der historischen Daten mit Hilfe der obigen Formeln wird sich aber zeigen, dass die starke Abweichung des Uranus von seiner erwarteten Position nach 1825 nur zum kleineren Teil von den eigentlichen gravitativen Neptunstörungen herrührte.

3.7 Die Fly - by Approximation

Die Gleichung (3.53) beschreibt im Rahmen unseres Modelles die Abweichung der heliozentrischen Länge des Uranus durch einen äußeren Planeten, der genau doppelte Umlaufzeit hat. Charakteristisch ist dabei der Resonanzterm $\tau \cos[\tau]$, der sich analytisch von den anderen rein trigonometrischen Termen unterscheidet. Vernachlässigen wir diese höheren Terme, so lautet dieser dominante Response der 2:1 Resonanz in

ekliptikaler Länge

$$\eta[\tau] = \beta_1 + \beta_2\,\tau + \beta_3\,\cos[\tau] + \beta_4\,\sin[\tau] + \\ \mu\,\left\{C_x[2, 2^{-\frac{2}{3}}] + 2\,C_y[2, 2^{-\frac{2}{3}}]\right\}\,\tau\,\cos[\tau] + \ldots \tag{3.58}$$

Für unsere physikalische Diskussion ist es nun interessant, nur den *Resonanzterm* auf eine allgemeine $\ell : \ell - 1$ Resonanz *asymptotisch* zu erweitern. Bewegen sich Uranus und Neptun in einer idealisierten Kreisbahn um die Sonne, so treten diese Resonanzen bei den Radienverhältnissen

$$\frac{R_U}{R_N} = \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^{2/3}$$

auf. Im Grenzprozess $\ell \to \infty$ können wir jetzt den obigen Resonanzterm als (siehe Anhang)

$$\sim \frac{2}{\pi}\,\mu\,\ell\,\left\{2\,\mathbf{K_0}[\tfrac{2}{3}] + \mathbf{K_1}[\tfrac{2}{3}]\right\}\,\tau\,\cos[\tau] \tag{3.59}$$

schreiben. Dabei haben wir den zusätzlichen Faktor $\left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^{4/3}$ zu Eins werden lassen.

Beobachter	Jahr	$\eta[''] $
Flamsteed	1690	+61.2
Flamsteed	1712	+92.7
Flamsteed	1715	+73.8
Le Monnier	1750	-47.6
Bradley	1753	-39.5
Mayer	1756	-45.7
Le Monnier	1764	- 34.9
Le Monnier	1769	- 19.3
Le Monnier	1771	- 2.3

Tab. 4.1: *Die rekonstruierten „antiken“ heliozentrische Abweichung des Uranus von seiner theoretischen Sollbahn in Bogensekunden nach* Adams *([3]). Sie entsprechen auch den Datenpunkten aus dem Buch „Pioneers of Science“ von* Sir O. Lodge *aus dem Jahre 1893 . ([45]).*

4 Die Beobachtungsdaten

Die folgenden Tabellen zeigen auch die Sichtungen von Uranus als Stern vor dem Jahre 1781, dem Jahr seiner Entdeckung als großer Planet jenseits von Saturn. Zu den damaligen sehr versierten Beobachtern zählen der englische Astronom J. Flamsteed (1646-1719), welcher im Dezember 1690 Uranus als den Stern „34 Tauri“ notierte, dann der französische Astronom P.C. Le Monnier (1715-1799) ,

Jahr	$\eta[''] $	Jahr	$\eta[''] $
1780	+3.46	1813	+22.00
1783	+8.45	1816	+22.88
1786	+12.36	1819	+20.69
1789	+19.02	1822	+20.97
1792	+18.70	1825	+18.16
1795	+21.38	1828	+10.82
1798	+20.95	1831	- 3.98
1801	+22.21	1834	- 20.80
1804	+24.16	1837	- 42.66
1807	+ 22.07	1840	- 66.64
1810	+23.16		

Tab. 4.2: *Die „modernen“ heliozentrischen Abweichungen (Beobachtung - Theorie) des Uranus von seiner Sollbahn unter Einbeziehung der Saturn - und Jupiter - Störungen in Bogensekunden, wie sie in der ersten Tabelle von* Adams *ohne die falsche Korrektur $r^2/(ab)$ aufgeführt sind ([3], Seite 11) .*

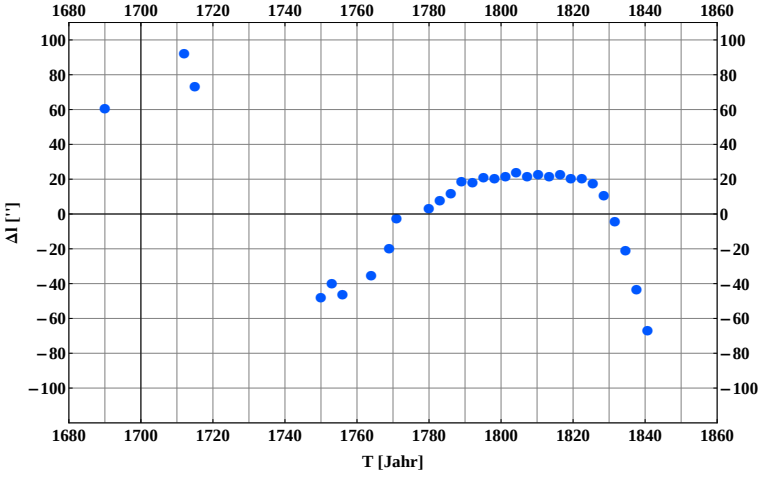

Fig. 4.1: *Die Residuen (blaue Punkte) der heliozentrischen Länge des Planeten Uranus, wie sie* Adams *erhielt und die Tabelle (4.2) zeigt.*

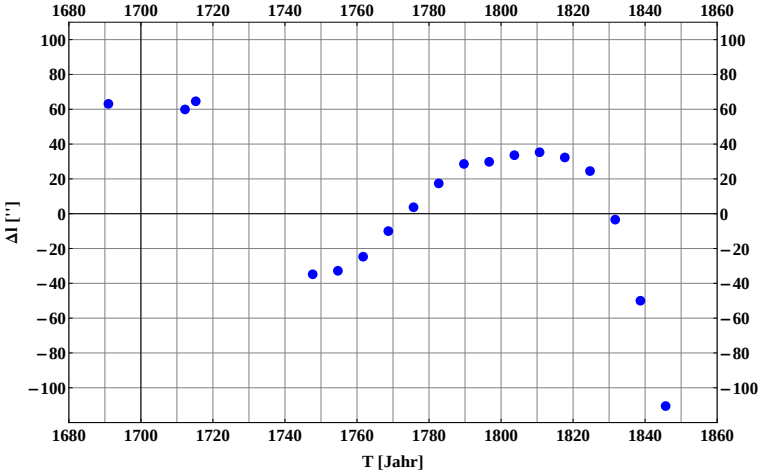

Fig. 4.2: *Die Residuen (blaue Punkte) der heliozentrischen Länge des Planeten Uranus, wie sie* Le Verrier *in den Astronomischen Nachrichten ([39]) veröffentlichte und in der Tabelle (4.3) abgedruckt sind.*

Jahr	$\eta[''] $	Jahr	$\eta[''] $
1690.98	+63.1	1803.70	+33.6
1712.25	+59.9	1810.70	+35.3
1715.23	+64.6	1817.70	+32.3
1747.70	- 34.8	1824.70	+24.5
1754.70	- 32.8	1831.70	- 3.4
1761.70	- 24.7	1838.70	- 50.0
1768.70	- 10.0	1845.70	- 110.5
1775.70	+3.7		
1782.70	+17.4		
1789.70	+ 28.6		
1796.70	+29.8		

Tab. 4.3: *Der erste Datensatz von* Le Verrier *für die heliozentrischen Abweichungen (Beobachtung - Theorie) des Uranus von seiner Sollbahn. Die Daten dienten auch zur ersten Abschätzung der Neptunmasse. ([39]) .*

Jahr	N	$\eta[''] $	Jahr	N	$\eta[''] $
1690	1	+65.9	1811-1813	11	+37.2
1712-1715	4	+66.5	1813-1815	11	+37.4
1750	2	- 35.3	1816-1817	9	+33.9
1753-1756	2	- 33.4	1818-1820	12	+ 32.5
1764	1	- 21.2	1821-1823	9	+27.4
1768-1769	8	- 8.2	1824-1827	11	+25.2
1771	1	- 11.9	1828-1830	11	+ 7.5
1781-1782	10	+17.2	1835-1835	9	- 27.9
1783-1784	9	+20.6	1836-1836	10	- 30.6
1785-1786	10	+23.9	1837-1838	11	- 45.7
1789-1790	11	+29.1	1839-1840	10	- 63.1
1791-1792	10	+27.9	1841-1842	9	- 77.0
1793-1794	9	+30.9	1842-1844	9	- 86.4
1795-1797	9	+31.9	1844-1845	8	- 105.7
1797-1801	9	+32.2			
1802-1804	11	+34.2			
1804-1806	10	+35.4			
1807-1808	12	+35.1			
1809-1810	10	+36.7			

Tab. 4.4: *Die reduzierten Datenpunkte von* Le Verrier *für die heliozentrische Abweichung des Uranus von seiner Sollbahn unter Einbeziehung der Saturn- und Jupiter - Störungen in Bogensekunden. Übernommen aus der Arbeit von* Baghdady *([7]).*

Jahr	$\eta[''] $	Jahr	$\eta[''] $
1690.00	+ 65.9	1799.00	+32.2
1690.98	+63.1	1803.00	+34.2
1712.25	+59.9	1803.70	+33.6
1713.50	+66.5	1805.00	+35.4
1715.23	+64.6	1807.50	+35.1
1747.70	- 34.8	1809.50	+36.7
1750.00	-35.3	1810.70	+35.3
1754.50	-33.4	1812.00	+37.2
1754.70	- 32.8	1814.00	+37.4
1761.70	- 24.7	1816.50	+33.9
1764.00	-21.2	1817.70	+32.3
1768.50	-8.2	1819.00	+32.5
1768.70	- 10.0	1822.00	+27.4
1771.00	-11.9	1824.70	+24.5
1775.70	+3.7	1825.50	+25.2
1781.50	+17.2	1829.00	+7.5
1782.70	+17.4	1831.70	-3.4
1783.50	+20.6	1835.00	-27.9
1786.50	+23.9	1835.50	-30.6
1789.50	+29.1	1837.50	-45.7
1789.70	+ 28.6	1839.50	-63.7
1791.50	+27.9	1841.5	-77.0
1793.50	+30.9	1843.00	-86.4
1796.00	+31.9	1844.50	-105.7
1796.70	+29.8	1845.70	-110.5

Tab. 4.5: *Die insgesamt 50 reduzierten Datenpunkte von Le Verrier für die heliozentrische Abweichung des Uranus von seiner Sollbahn unter Einbeziehung der Saturn- und Jupiter - Störungen in Bogensekunden. Übernommen aus der Arbeit von Baghdady ([7]).*

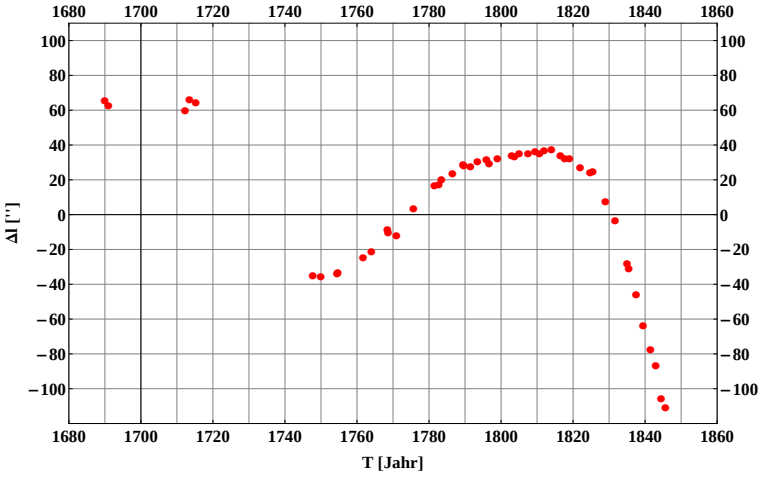

Fig. 4.3: *Die Residuen (rote Punkte) der heliozentrischen Länge des Planeten Uranus, wie sie* Le Verrier *im Jahre 1845/1846 zur Verfügung standen ([39], [7]). In der Tabelle (4.5) sind diese Daten numerisch abgedruckt.*

5 Die Auswertung der Originaldaten

Obwohl wir mit unserer Hypothese einer 2:1 Resonanz zwischen Uranus und Neptun in einer angenommenen Kreisbahn die möglichen Unbekannten um zwei reduziert haben, bleiben immer noch sechs zu bestimmende Parameter übrig. Wirklich interessant sind dabei aber nur der physikalische Massenparameter μ von Neptun und der wichtige Zeitpunkt T der unteren Konjunktion der beiden Eisplaneten Uranus und Neptun. Erst nach Bestimmung dieses Zeitpunktes sind wir in der Lage, eine Prognose der ekliptikalen Länge des erhofften neuen Planeten für den September 1846 abzugeben.

5.1 Die Bahnresiduen nach Le Verrier

In unserer ersten einfachsten Hypothese nehmen wir an, dass der störende Planet oberhalb von Uranus sich in einer exakten 2:1 Resonanz befindet. Mit Hilfe von (3.55) müssen genau die sechs Parameter β_1, β_2, β_3 und β_4 sowie μ und die Epoche T aus den sehr präzisen 50 Datenpunkten von Le Verrier gewonnen werden. Mit der software *Mathematica* erhalten wir mit einem *nonlinear fit* Programm zunächst

$$\beta_1 = \mathbf{-32.80 \pm 1.09}, \qquad \beta_2 = \mathbf{-7.34 \pm 0.21},$$
$$\beta_3 = \mathbf{+60.59 \pm 1.40}, \qquad \beta_4 = \mathbf{-41.49 \pm 0.64}.$$

Für den Massenparameter μ *in Bogensekunden* und für das Jahr der unteren Konjunktion Uranus-Neptun erhalten wir

$$\boxed{\mu = \mathbf{9.81 \pm 0.24}, \qquad T = \mathbf{1822.88 \pm 0.19}.} \tag{5.1}$$

Dies entspricht einem Massenverhältnis des Neptuns zur Sonne von

$$\mu \approx \mathbf{1 : 21000}. \tag{5.2}$$

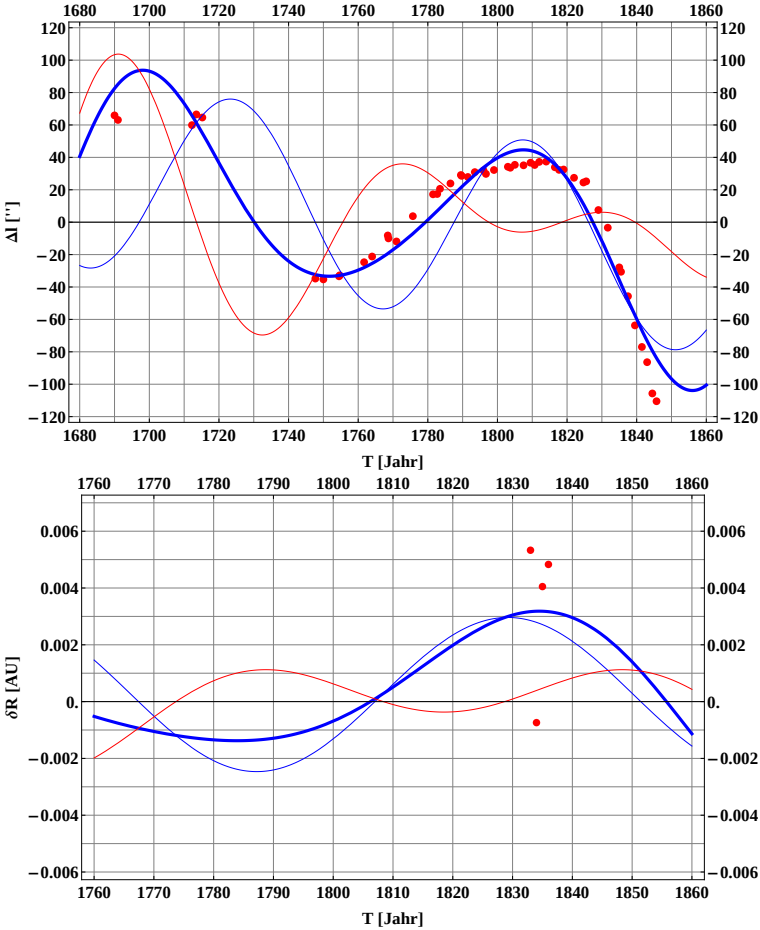

Fig. 5.1: *Die Auswertung der Residuen der Uranusstörungen nach den Originaldaten von Le Verrier mit dem Hauptterm einer allgemeinen* $\mathbf{n} : \mathbf{n} - \mathbf{1}$ *Resonanz. Qualitativ können schon wichtige Eigenschaften der Residuen erklärt werden. Die Signatur des Resonanzterms* $\tau \cos[\tau]$ *sieht man besonders deutlich in den nachträglich gefundenen Daten des 17. Jahrhunderts. Die Daten von Airy bezüglich des Radiusvektors können allerdings noch nicht quantitativ befriedigend erklärt werden.*

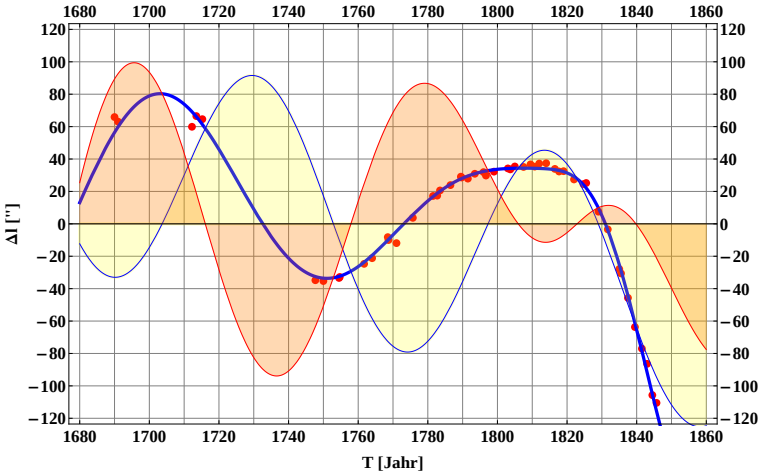

Fig. 5.2: *Die Auswertung der Residuen von der oskulierenden Uranus-Ellipse nach* Bouvard *nach den Originaldaten von Le Verrier mit der Hypothese einer exakten 2:1 Resonanz. Die blaue Kurve stellt die beste Anpassung (Fit) an die Daten dar. Sie besteht additiv aus der homogenen Kurve $\eta_h[\tau]$ (blau mit gelber Füllung), welche eine kleine Bahnkorrektur des Uranus darstellt, und der eigentlichen Störung $\eta_p[\tau]$ (rot mit orange-farbiger Füllung) des Planeten Neptun. Für das wahrscheinlichste Massenverhältnis von Neptun zur Sonne erhält man hier in Bogensekunden $\mu \sim \mathbf{9.81}$. Der Zeitpunkt der unteren Konjunktion ergibt sich aus der zentralen Nullstelle der Funktion $\eta_p[\tau]$ hier zu $T \sim \mathbf{1822.88}$.*

Der so berechnete Wert ist etwas kleiner als die heute deduzierte Masse von Neptun, aber wesentlich genauer als der Massenwert von Le Verrier, der mit der Hypothese einer doppelten Uranus-Entfernung für Neptun gerechnet hat.

Die RMS aller 50 Datenpunkte von Le Verrier für den besten Fit ergibt in Bogensekunden

$$\sigma = \mathbf{2.89}'', \qquad \text{(Le Verrier)}$$

Die dazugehörigen radialen Bahnresiduen zeigt Fig. (5.3). Hier sieht man deutlich den *kontraintuitiven* Effekt, dass das radiale Ausweichen des Uranus aus seiner alten Bahn nach Außen ab 1830 nicht ein Effekt der Neptunstörung, sondern zum überwiegenden Teil Resultat einer Neubestimmung der Uranusbahn war. Airy schrieb im Jahre 1838 in

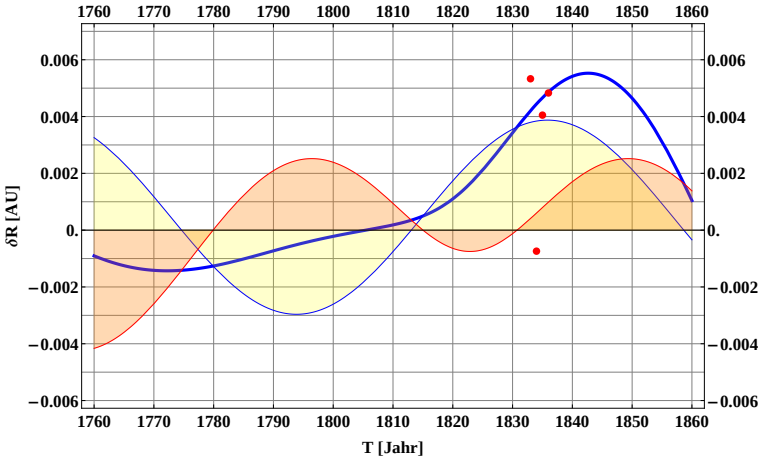

Fig. 5.3: *Die aus den Residuen ekliptikaler Länge eindeutig folgenden radialen Bahnresiduen $\delta R = R_U\,\xi[\tau]$ für die Uranusbahn im Falle einer exakten 2:1 Resonanz. Zusätzlich sind vier Datenpunkte angezeigt, welche* Airy *in den Jahren 1833-1836 an der Uranusbahn ausgemessen hat (bei dem deduzierten Datenpunkt für 1834 vermutete* Airy *einen Fehler im damaligen Nautical Almanac). Die Kurve besteht wieder aus zwei Anteilen, wobei die blau-gelbe Funktion den Anteil der Bahnkorrektur des Uranus darstellt. Die Datenpunkte von* Airy *können fast allein durch diese Korrektur erklärt werden. Die eigentliche Neptun-Störung spielt erst ab 1850 eine gewisse Rolle.*

den *Astronomischen Nachrichten* zunächst zu dem „Datenausreißer“ von 1834 ([4]):

> *I cannot imagine what has made the difference between the result of the observations of the year 1834 and that of the other years. It is not any error in my computations. The observations shew a systematic difference between the progress of the errors in AR in the year 1834 and in the other years. I suspect that some difference must have been made in the radius vector used for the computations of the Nautical Almanac in 1834.*
>
> *If, however, we adopt the mean of the four results, we find $\delta R = -0.00337$. that is, the tables of Bouvard give the radius*

Jahr	$\delta R[AU]$
1833	+0.00533
1834	**−0.00074**
1835	+0.00405
1836	+0.00483

Tab. 5.1: *Die von* Airy *abgeleiteten radialen Abweichungen der Uranusbahn von der Sollbahn nach* Bouvard. *Der fettgedruckte Wert beruht auf fehlerhaften Daten des damaligen Nautical Almanac.* Airy *definierte in seiner Publikation δR mit entgegengesetztem Vorzeichen. ([4]).*

> *vector of Uranus too small by a quantity considerably greater than the moon's distance from the earth. If we adopt the mean of 1833, 1835 and 1836, the error appears to be nearly equal to the diameter of the moon's orbit.*

Die in der Graphik (5.3) gezeigten Datenpunkte sind in der Tabelle (5.1) noch einmal zusammengestellt. Airy benutzte die Größen δR mit entgegengesetzten Vorzeichen, da er von dem *excess of the tabular quantity over the observed quantity* spricht. Man sieht aber in der Fig. (5.3), dass diese radialen Anomalien durch die Auswertung mit den Daten von Le Verrier vollständig erklärt werden können. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, wie wichtig diese Frage für Airy im Briefwechsel mit Adams im Jahre 1845 war.

5.2 Die Bahnresiduen nach Adams

Die Auswertung der 30 Datenpunkte von Adams unter der Hypothese einer 2:1 Resonanz liefert zum Vergleich

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\mathbf{55.20 \pm 2.01}, \qquad \beta_2 = -\mathbf{10.53 \pm 0.36}, \\ \beta_3 &= +\mathbf{72.12 \pm 2.89}, \qquad \beta_4 = -\mathbf{31.36 \pm 1.02}. \end{aligned}$$

Für den Massenparameter und für das Jahr der unteren Konjunktion Uranus-Neptun folgt

$$\boxed{\mu = \mathbf{12.09 \pm 0.43}, \qquad T = \mathbf{1825.69 \pm 0.27}.} \tag{5.3}$$

Die RMS aller 30 Datenpunkte von Adams für den besten Fit ergibt in Bogensekunden

$$\sigma = \mathbf{3.31}''; \qquad \text{(Adams)}$$

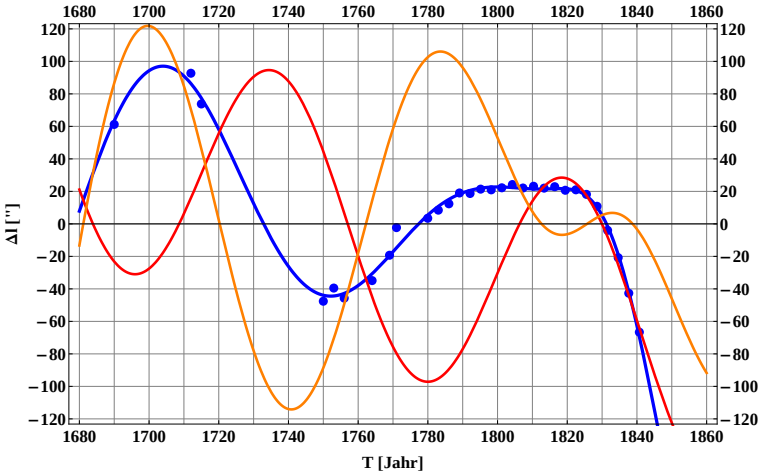

Fig. 5.4: *Die Auswertung der heliozentrischen Residuen des Uranus nach den Originaldaten von Adams. Die blaue Kurve stellt den besten Fit dar. Sie besteht additiv aus der homogenen Kurve $\eta_k[\tau]$ (rot), welche eine kleine Korrektur an der Ellipse des Uranus nach Bouvard darstellt, und der eigentlichen Störung $\mu\,\eta_p[\tau]$ (orange) des Planeten Neptun. Für das wahrscheinlichste Massenverhältnis von Neptun zur Sonne erhält man hier in Bogensekunden $\mu = \mathbf{12.0 \pm 0.4}$*

5.3 Beobachtungsdaten und numerische Simulationen

Das bis jetzt ausgearbeitete rein analytische Modell zur Deutung der Anomalien in der Uranusbewegung hat den großen Vorteil, sowohl die Einflüsse der Störkraft des Neptuns als auch die Neujustierung der Uranusbahn direkt zu sehen. Im Folgenden rein numerischen Modell werden wir ganz auf eine analytische Fourierentwicklung der Störfunktion verzichten, da diese Methode in der Nähe einer Resonanz *singuläres*

Verhalten zeigen. Stattdessen werden wir unter Zuhilfenahme der fundamentalen Modellgleichung (3.23) und einem CAS System (*Mathematica*) ein rein numerischen Modell (*Integrator*) entwickeln. Im 19ten Jahrhundert wäre ein solchen Vorgehen aufgrund des hohen Rechenaufwandes extrem aufwendig gewesen, obwohl Le Verrier und Adams in dieser Hinsicht mehrere Versuche gemacht haben, bessere Werte für die große Halbachse des Neptuns iterativ zu gewinnen.

Ausgangspunkt für das rein numerische Modell ist wieder Gleichung (3.20) mit der komplexen Koordinate $z[t]$.

$$\ddot{z}[t] + 2\,\imath\,\omega_U\,\dot{z}[t] - 3\,\omega_U^2\,\Re\{z[t]\} = G\,m_2\left(\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|^3}\right) e^{-\imath\,\omega_U\,t} \tag{5.4}$$

schreiben. Die Positionen der beiden Planeten in ihren angenommenen Kreisbahnen lauten einfach (siehe Fig. (3.1))

$$\mathbf{r}_1[t] = R_1\,e^{\imath\,\omega_U\,t} \qquad \mathbf{r}_2[t] = R_2\,e^{\imath\,\omega_N\,t}. \tag{5.5}$$

$$\boxed{\ddot{\zeta}[t] + 2\,\imath\,\omega_U\,\dot{\zeta}[t] - 3\,\omega_U^2\,\Re\{\zeta[t]\} = \mu\,\omega_U^2\;\mathbf{g}[\alpha, t]} \tag{5.6}$$

mit der externen Störfunktion

$$\mathbf{g}[\alpha, \varphi] = \alpha^2\left\{\frac{\exp[-\imath\,\varphi] - \alpha}{(1 - 2\,\alpha\,\cos[\varphi] + \alpha^2)^{3/2}} - \exp[-\imath\,\varphi]\right\} \tag{5.7}$$

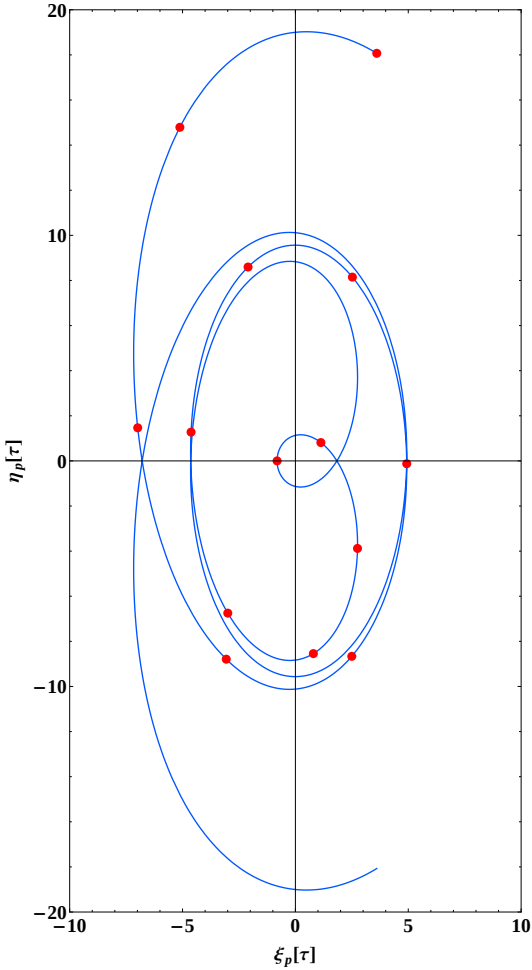

Fig. 5.5: *Die Bahnkurve von* $\{\xi_p[\tau], \eta_p[\tau]\}$*, angeregt durch eine 2:1 Resonanz, als Funktion der Phase* $\tau = \omega_U(t - T)$ *der störenden Kraft. Die roten Punkte bedeuten Zeitpunkte an den Stellen* $\tau = 0$ *bis* $\tau = 13$ *in Zeitschritten von 1.*

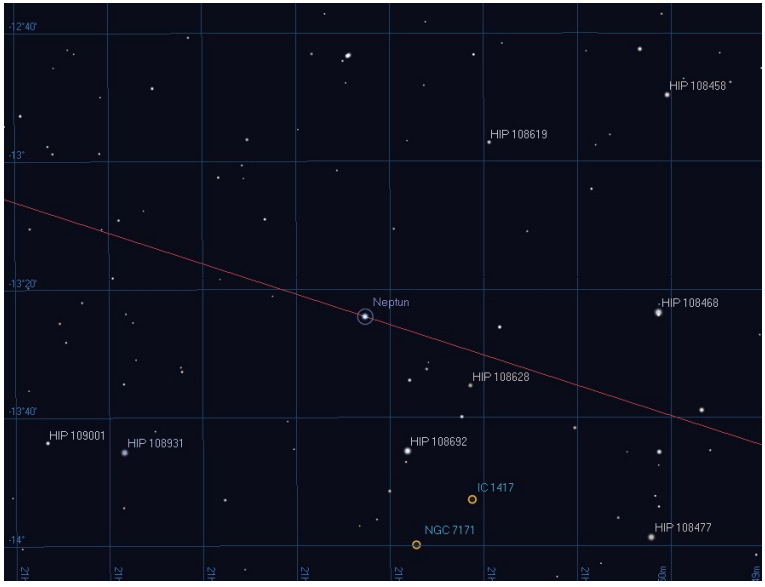

Fig. 6.1: *Die Position von Neptun am 23/24 September 1846 um Mitternacht. Simulation mit der software stellarium.org. Einige Fundamentalsterne sind durch ihre HIP Nummer gekennzeichnet (Hipparchos catalogue) . Die rote Linie ist die scheinbare Bahn von Neptun an der Himmelssphäre. Ein Vergleich mit der originalen Bremikerschen Sternkarte zeigt gute Übereinstimmung mit der handschriftlichen Notiz von* Galle.

6 Die Position von Neptun

Der entscheidende Zeitpunkt für die visuelle Entdeckung des Planeten Neptun war die Nacht vom 23ten auf den 24ten September 1846, von englisch - amerikanischen Historikern auch als D-Day bezeichnet[1]

[1] D-Day bezeichnet im englischen Sprachraum den Tag X einer militärischen Operation - hier besonders den 6. Juni 1944 als Beginn der Landung der Alliierten in

Für diesen Tag lautete die Position des noch unbekannten Planeten für das Äquinoktium J2000

$$RA \quad \mathbf{22}\,h\,\mathbf{01}\,m\,\mathbf{31}\,s \qquad DE \quad \mathbf{-12^\circ\ 40'\ 18''}$$

Rechnet man diese Position in das Äquinoktium B1800 um ([42]), so ergibt sich

$$RA \quad \mathbf{21}\,h\,\mathbf{50}\,m\,\mathbf{44}\,s \qquad DE \quad \mathbf{-13^\circ\ 37'\ 36''}$$

Dies entspricht ziemlich genau der Position, die mit einer handschriftlichen Notiz von Galle auf der akademischen *Bremikerschen Sternkarte* mit dem Stundenwinkel h XXI als Entdeckungsort von Neptun markiert wurde. Die entsprechende topozentrische (geozentrische) ekliptikale Position zum Datum ist dagegen

$$\ell \quad \mathbf{325^\circ\ 52}\,m\,\mathbf{31}\,s \qquad b \quad \mathbf{-0^\circ\ 31'\ 50''}$$

der Normandie. Die Landung selbst lief damals unter dem Codenamen Neptune, also den mit einem Dreizack bewaffneten römischen Meeresgott.

7 Zeittafel und Hintergründe

Im folgenden Kapitel sollen die wichtigsten Ereignisse vor und kurz nach der Neptun - Entdeckung aufgelistet werden. Als Quellen dienten Nicholas Kollerstrom The discovery of Neptune, Bernhard von Lindenau: *Beitrag zur Geschichte der Neptunsentdeckung* ([43]), der Briefwechsel Gauss - Schumacher und Autobiographien von Zeitzeugen.

1838 Februar In seiner Autobiographie schreibt Airy ([6], Seite 133) : *„The Perturbations of Uranus were now attracting attention. I had had some correspondence on this subject with Dr. Hussey in 1834, and in 1837 with Eugéne Bouvard. On Feb. 24th, of 1838, I wrote to Schuhmacher regarding the error in the tabular radius - vector of Uranus, which my mode of reducing the observations enabled me to see“.*

1842 Juli Friedrich Wilhelm Bessel ist am 12. Juli Gast bei John Herschel auf seinem Anwesen *Collingwood* in Hawkhurst, Kent und regt eine Suche nach einem Planeten jenseits von Uranus an. Erbaut wurde das Landhaus im Jahre 1810 für einen gewissen Jesse Gregson. Im Jahre 1816 wurde das Anwesen durch Admiral Lord Collingwood's Tochter und deren Ehemann, George Newnham, gekauft. Nach seinem Tod wurde das sogenannte „Moor House“ im Jahre 1839 von dem Astronomen Sir John Herschel für sich und seine große Familie erworben. John Herschel bekam von Sarah Newnham die Erlaubnis, das Anwesen wieder nach dem Namen ihres Vaters „Collingwood“ zu benennen. Bedeutende Persönlichkeiten ihrer Zeit, wie Airy oder Mary Somerville, waren gerne Gast auf diesem großzügigen Anwesen.

1844 Februar Airy schreibt in seiner Autobiographie ([6], Seite 165): *In this year commenced that remarkable movement which led to the discovery of Neptune. On Feb. 13th Prof. Challis introduce Mr. Adams*

Fig. 7.1: *Das herrschaftliche Anwesen von J. Herschel (1792-1871) in Collingwood in der Nähe von Hawkhurst in Kent südöstlich von London, welches er seit den 1840er Jahren bewohnte (Postkarte aus dem Jahre 1909). Hier trafen sich F.W. Bessel und J. Herschel am 12. Juli 1842 sowie J.C. Adams und U. Le Verrier aus Anlass der Oxford Tagung der BAAS am 10. Juli des Jahres 1847.*

to me by letter. On Feb. 15th I sent my observed places of Uranus, which were wanted. On June 19th I also sent places to Mr. E. Bouvard.“

1844 September Airy schreibt in seiner Autobiographie ([6], Seite 169): *But in this year began a more remarkable planetary discussion. On Sept. 22nd 1844 Challis wrote to me to say that Mr. Adams would leave with me his results on the explanation of the irregularities of Uranus by the action of an exterior planet. In October Adams called, in my absence. On Nov. 5th I wrote him, enquiring whether his history explained the irregularity of radius - vector (as well as that of longitude). I waited for an answer, but received none.*

1845 September Eugene Bouvard presents „New Tables of Uranus“ to the Paris Academy.

Mitte September Adams comments on the new planet's position to Challis

Am 22. September Arago at French Institute asks Leverrier to investigate NE perturbations

Am 26. September Airy returns from France

Am 29. September Letter from Airy to Challis

1845 Oktober 15. The Times prints a letter by Adams about a new comet. 21. Adams visits RGO, unannounced, at 3 & 4 pm 27. Airy investigates incest-murder charge and suspends a senior RGO worker 29. Birth of Airy's 7th child

1845 November 10. November Le Verrier gives first Memoir on Uranus to Paris Academy, his 31st on celestial mechanics since 1839. 12. November Adams finds a solution to radius vector perturbn. 14th Adams elected a FRAS, on Challis' proposal

1845 Dezember 1. Challis sees Biela's comet 4.-6. Dezember Airy visits Challis at Camb. (+ Adams possibly)

paragraph1846 März 9. Adams solves equations for Biela's comet, tells Challis

1846 April Adams addresses RAS, on the two heads of Biela's comet.

1846 Juni Am 1. Juni Leverrier's first prediction, to Paris Academy Am 1. Juni Astronomer Peter Hansen visits Airy, until July 4th. 23rd Airy receives Leverrier's first prediction 29th Airy addresses Board of Visitors of Royal Observatory meeting

1846 Juli 2nd Airy & Hansen meet Adams in Cambridge, crossing St John's bridge. 9th Airy urges Challis to commence a sky-search. Adams prepares an ephemeris, for Challis' guidance 29th Challis starts his sky-search

1846 August Vom 10. August bis 11. Oktober bereist Airy mit seiner Frau und ihrer Schwester Elizabeth Smith Deutschland und die Schweiz ([6], Seite 183). Er schreibt: *.. We stayed for some time in Wiesbaden,*

as my nerves were shaken by the work on the Railway Gauge Commission, and I wanted the Wiesbaden waters[1]*. We visited various places in Germany, and made a 10-days' excursion among the Swiss mountains. At Gotha we lodged with Prof. Hansen for three days; and it was while staying here that I heard from Prof. Encke (on Sept. 29th) that Galle had discovered the expected planet. We visited Gauss at Göttingen and Miss Caroline Herschel at Hannover. We had a very bad passage from Hamburgh to London, lasting five days: a crank-pin broke and had to be repaired: after four days our sea-sickness had gone off, during a gale - a valuable discovery for me, as I never afterwards feared sea-sickness...*

Am 7. Oktober 1846 berichtet Gauss an Schumacher: *Vor einigen Tagen war Airy mit seiner liebenswürdigen Frau und deren Schwester hier. Ersteren hatte ich mir nach einer früheren von Ihnen gegebenen Beschreibung ganz anders gedacht. Sie schrieben, er sei äußerst förmlich, das habe ich gar nicht gefunden. Er behauptet aber, mit Ihnen persönlich noch gar nicht bekannt zu sein. Er hat mir sehr gut gefallen.*

Am 24. November berichtet Schumacher in einem Brief an Gauss : *Airy's Damen hatten in der Deligence zwischen Frankfurt und Gotha zwei Sonnenschirme stehen lassen, die Hansen reklamierte, und die mir von der Post-Direktion hierher, und von mir durch Dr. Harris nach Greenwich gesandt wurden. Airy bedankte sich bei Schumacher mit den Worten: there is a „pride of act" in recovering what is lost at any expence. Die Kosten für eine solche Rückführung betrug damals etwa ein Gulden.*

Am 31. August veröffentlicht Leverrier seine endgültige Bahntheorie mit Voraussagen zur Position des neuen Planeten.

1846 September Am 2. September sendet Adams seinen ersten Brief über den neuen Planeten an Airy. Am 10. September beginnt für eine Woche das *BAAS meeting* in Southampton. Am 18. September schreibt Leverrier einen Brief an Galle, Assistent an der Berliner Sternwarte. In diesem bedankt er sich zunächst für eine wissenschaftliche Abhandlung, die er etwa ein Jahr vorher erhalten hatte. Dann fährt Leverrier fort (in deutscher Übersetzung, [15]): *Heute möchte ich von dem unermüdlichen Beobachter verlangen, daß er einige Augenblicke der Durchforschung einer Region des Himmels widmen möge, wo es*

[1] Der Kochbrunnen in Wiesbaden war die bekannteste Natrium - Chlorid - Thermalquelle der Stadt und im 19. Jahrhundert Zentrum der Wiesbadener Trinkkur.

einen Planeten zu entdecken geben kann. Es ist die Theorie des Uranus, welche mich auf dieses Resultat geführt hat. Einen Auszug meiner Untersuchungen wird in den Astronomischen Nachrichten erscheinen. Ich hätte es alo unterlassen können, Am 23. September erreicht der Brief LEVERRIER'S Berlin. Am selben Abend kurz nach Mitternacht, dem 24. September um 0 Uhr 15 Minuten, wurde der Planet durch GALLE und den damaligen Studenten D'ARREST entdeckt, nur knapp ein Grad entfernt von der berechneten Position.

Am 29. September hört AIRY während seines Aufenthaltes in Gotha bei HANSEN von der Entdeckung des neuen Planeten. 30th Challis hears the news; Hind is first Englishman to see it.

1846 Oktober Am 1. Oktober verschickt LEVERRIER Briefe an die großen Observatorien in Europa, in denen er für den neuen Planeten den Namen "Neptun" vorschlägt - als Symbol den Dreizack. Zugleich erscheint in der Times ein Brief von J.R. HIND (1823-1892), dass ein neuer Planet entdeckt worden sei. Am 3. Oktober wird zum erstenmal von HERSCHEL in einem öffentlichen Vortrag im Atheneaum im Zusammenhang mit dem neuen Planeten der Name ADAMS erwähnt.

Um den 3. Oktober herum Besuch des britischen Arztes und Reiseschriftstellers SIR HENRY HOLLAND (1788-1873) bei ENCKE und GALLE in Berlin. In seiner Autobiographie berichtet er ([26], Seite 299):

> *That which most strongly clings to my memory is an evening I passed with Encke and Galle in the Observatory at Berlin, some ten or twelve days after the discovery of the planet Neptune on this very spot ; and when every night's observations of its motions had still an especial value in denoting the elements of its orbit. I had casually heard of the discovery at Bremen, and lost no time in hurrying on to Berlin.*
>
> *The night in question was one of floating clouds, gradually growing into cumuli ; and hour after hour passed away without sight of the planet which had just come to our knowledge by so wonderful a method of predictive research. Frustrated in this main point, it was some compensation to stay and converse with Encke in his own Observatory, one signalised*

by so many discoveries – the stillness and darkness of the place broken only by the solemn ticking of the astronomical clock, which, as the unfailing interpreter of the celestial times and motions, has a sort of living existence to the astronomer.

Among other things discussed while thus sitting together in a sort of tremulous impatience, was the name to be given to the new planet. Encke told me he had thought of Vulcan ; but deemed it right to remit the choice to Leverrier, then supposed the sole indicator of the planet and its place in the heavens – adding that he expected Leverrier's answer by the first post. Not an hour had elapsed before a knock at the door of the Observatory announced the letter expected. Encke read it aloud; and, coming to the passage where Leverrier proposed the name of Neptune, exclaimed, '"So lass den Namen Neptun sein!" It was a midnight scene not easily to be forgotten.

A royal baptism, with its long array of titles, would ill compare with this simple naming of the remote and solitary planet thus wonderfully discovered. There is no place, indeed, where the grandeur and wild ambitions of the world are so thoroughly rebuked, and dwarfed into littleness, as in the Astronomical Observatory.

Anfang Oktober erfährt AIRY von der Entdeckung Neptuns durch GALLE bei seinem Besuch in Gotha von P.A. HANSEN. In seiner Biographie schreibt er zu den darauffolgenden Ereignissen ([6], Seite 181) : *I was abused most savagely both by English and French.*

Am 5. Oktober besucht AIRY den Herausgeber der Astronomischen Nachrichten SCHUMACHER in Altona. Am 10. Oktober veröffentlicht LEVERRIER seine endgültige Bahntheorie des Neptun. Am 11. Oktober kehrt AIRY mit seiner Frau und deren Schwester nach einer stürmischen Überfahrt mit dem Schiff nach England zurück. CHALLIS und ADAMS schlagen den Namen *Oceanus* für den neuen Planeten vor. Am 19. Oktober berichtet ARAGO von einer stürmischen Tagung der Akademie der Wissenschaften in Paris.

1846 November 13th Adams 'predictions' of 1845 are revealed, at an RAS meeting hearing Airy, Challis and Adams.

December 1846

3rd-10th Seven letters pass between Sedgwick & Airy 5th Athenaeum editorial accuses French of 'mania' 12th Challis reports to Observatory Syndicate at Cambridge

Anhang

A.1 Die Laplace - Koeffizienten

Wir wollen für die beiden Fourierkoeffizienten $c_x[n,\alpha]$ und $c_y[n,\alpha]$ der Störungsentwicklung exakte analytische Ausdrücke ableiten, wie dies schon im Lehrbuch von TISSERAND begonnen wurde ([56]). Die exakten Fourierintegrale lauten zunächst für $n \geq 2$

$$\begin{aligned} c_x[n,\alpha] &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(\cos[\varphi]-\alpha)\,\cos[n\,\varphi]}{\left(\sqrt{1-2\,\alpha\,\cos[\varphi]+\alpha^2}\right)^3}\,d\varphi \\ c_y[n,\alpha] &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin[\varphi]\,\sin[n\,\varphi]}{\left(\sqrt{1-2\,\alpha\,\cos[\varphi]+\alpha^2}\right)^3}\,d\varphi. \end{aligned}$$

In der für die klassische Astronomie so wichtigen analytischen Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\,\alpha\,\cos[\varphi]+\alpha^2}} = c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\cos[n\,\varphi] \tag{A.1}$$

lauten allgemein die Koeffizienten in Abhängigkeit einer *hypergeometrischen Funktion*

$$c_n = \binom{n-\frac{1}{2}}{n}\,\alpha^n\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}+n,1+n,\alpha^2\right]. \tag{A.2}$$

Wird dieser Zusammenhang einmal nach α oder nach φ differenziert, so ergeben sich nach einigen Umformungen die beiden für $n \geq 1$ gültigen Darstellungen

$$\begin{aligned} c_x[n,\alpha] = \quad & \binom{n-\frac{1}{2}}{n-1}\,\alpha^{n-1}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}+n,1+n,\alpha^2\right] + \\ & +2\binom{n+\frac{1}{2}}{n+1}\,\alpha^{n+1}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}+n,2+n,\alpha^2\right] - \\ & -\Delta(1,n). \end{aligned}$$

und

$$c_y[n,\alpha] = \binom{n-\frac{1}{2}}{n-1}\,\alpha^{n-1}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}+n,1+n,\alpha^2\right] - \\ -\Delta(1,n).$$

Das Kroneckersymbol $\Delta(1,n)$ bedeutet 1, wenn $n=1$ gilt, sonst ist es immer Null. Außerdem gilt $c_y[0,\alpha]=0$. Für $c_x[0,\alpha]$ gilt dagegen

n	$c_x[n,\alpha]$	$c_y[n,\alpha]$
0	0.55305	0.00000
1	0.75583	0.20141
2	1.46000	1.15980
3	1.09220	0.92350
4	0.78031	0.68341
5	0.54311	0.48661
6	0.37164	0.33835
7	0.25128	0.23151
8	0.16840	0.15658
9	0.11208	0.10497

Tab. A.1: *Die Laplacekoeffizienten der Störungsentwicklung erster Ordnung für zwei Kreisbahnen mit* $\alpha = 2^{-2/3}$.

$$c_x[0,\alpha] = \tfrac{1}{2}\,\alpha\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2},2,\alpha^2\right]$$

In der Tabelle (A.1) sind für das wichtige Radienverhältnis $R_1/R_2 = \alpha = 2^{-2/3}$ (2:1 Resonanz)

$$\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \sim \mathbf{0.6299605}... \tag{A.3}$$

die numerischen Werte der Koeffizienten $c_x[n,\alpha_{21}]$ und $c_y[n,\alpha_{21}]$ für $n=0$ bis $n=9$ aufgelistet. Wie man sieht, gleichen sich beide Koeffizienten asymptotisch für große n aneinander an. Die Darstellungen sind für $n>1$ auch auf nicht - ganze Werte von n analytisch definiert. In der inhomogenen Lösung der Oszillatorgleichung werden die obigen Koeffizienten noch mit α^2 multipliziert. Es gilt dann mit dieser Definition

$$C_x[n,\alpha] = \quad \binom{n-\frac{1}{2}}{n-1}\,\alpha^{n+1}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}+n,1+n,\alpha^2\right] + \\ +2\binom{n+\frac{1}{2}}{n+1}\,\alpha^{n+3}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}+n,2+n,\alpha^2\right] - \\ -\Delta(1,n).$$

und

$$C_y[n,\alpha] = \binom{n-\frac{1}{2}}{n-1}\,\alpha^{n+1}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}+n,1+n,\alpha^2\right] - \\ -\Delta(1,n).$$

Für den numerischen Koeffizienten des *säkularen Terms* $\tau\cos[\tau]$ der heliozentrischen Länge im Falle einer $2:1$ Resonanz ergibt sich

$$\begin{aligned} C_x[2,2^{-2/3}] + 2\,C_y[2,2^{-2/3}] &= \tfrac{9}{8}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{2};3,2^{-4/3}\right] + \\ &\quad \tfrac{5}{64}\,2^{-1/3}{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{3}{2},\tfrac{7}{2},4,2^{-4/3}\right] \\ &= \mathbf{1.499928069}... \end{aligned}$$

sowie bei der alternativen Responsefunktion für die Amplitude von $\sin[\tau]$

$$\begin{aligned} C_x[2,2^{-2/3}] + C_y[2,2^{-2/3}] &= \tfrac{3}{4}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{2};3,2^{-4/3}\right] + \\ &\quad \tfrac{5}{64}\,2^{-1/3}{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{3}{2},\tfrac{7}{2},4,2^{-4/3}\right] \\ &= \mathbf{1.0396609301}... \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Integraldarstellung lässt sich zudem zeigen, dass an den immer dichter werdenden Resonanzstellen $\omega_U/\omega_N = \ell/(\ell-1)$ die asymptotischen Grenzwerte

$$\begin{aligned} \lim_{\ell\to\infty} \frac{c_x\left[\ell,(1-1/\ell)^{2/3}\right]}{\ell} &= \frac{2}{\pi}\,\mathbf{K_1}\left[\frac{2}{3}\right] \\ \lim_{\ell\to\infty} \frac{c_y\left[\ell,(1-1/\ell)^{2/3}\right]}{\ell} &= \frac{2}{\pi}\,\mathbf{K_0}\left[\frac{2}{3}\right] \end{aligned}$$

gelten. Die Größen $\mathbf{K}_0[z]$ und $\mathbf{K}_1[z]$ sind modifizierte Besselfunktionen vom Argument z. Dieses Ergebnis hat Relevanz bei der Berechnung von Resonanzstärken *spiralförmiger Dichtewellen* in Planetenringen, die von Monden und Kleinstmonden angeregt werden.

A.2 Planetenkoordinaten

Gibt man zu irgendeinem Zeitpunkt (Epoche) die Positionsvektoren und Geschwindigkeitsvektoren vor, so bestimmen diese Gleichungen den früheren und weiteren Bahnverlauf. In Tabelle (A.2) sind für die vier

Pl	x	x	z
Ju	+3.690901886	-3.147530314	-1.439232061
Sa	-0.023802304	+8.332738390	+3.441845157
Ur	-16.803913535	-6.991160134	-2.823921765
Ne	-11.625618812	-26.005701153	-10.355091878
Pl	$\dot{x}$	$\dot{y}$	$\dot{z}$
Ju	+1.853594420	+1.984873484	+0.805691278
Sa	-2.146738586	-0.041561677	+0.075185797
Ur	+0.578255712	-1.257437533	-0.558939360
Ne	+1.052717808	-0.389865774	-0.185726540

Tab. A.2: *Die heliozentrischen Bahndaten der vier großen Gasplaneten Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun im Äquatorsystem nach Krasinsky 1993, Celestial Mechanics* ***55****, 1 - 23; JD : 2442000.5 (14 Nov 1973); Äquinox : J2000.0. Die Geschwindigkeiten sind in Einheiten von AE/(Siderisches Jahr).*

großen Gasplaneten die Positionsvektoren und Geschwindigkeitsvektoren im heliozentischen System für den Zeitpunkt JD 2442000.5 angegeben. Mit Hilfe der Bewegungsgleichungen ist es dann möglich, die historischen Daten des 18. und 19. Jahrhunderts verlässlich zu rekonstruieren.

A.3 Leben in Collingwood

Die folgenden Jugenderinnerungen wurden von Constance Anne Herschel (1855-1939), der jüngsten neunten Tochter von John Herschel, im Jahre 1936 für ihre Verwandten aufgeschrieben

Constance Anne (1855-1939), John Herschel's ninth daughter, grew up to be married to Sir Nevile Lubbock and had seven children. She has been famed for her everlasting great work she wrote late in her life "the Herschel Chronicle"1933, Cambridge, which described in full detail lives of William and Caroline and was subtitled as "the Life-Story of William Herschel and his sister Caroline Herschel". Despite of her prominent work, little has been known about her childhood.

Recently I received a photocopy of "Copy of note written by Lady Lubbock nee Constance Ann Herschel"from Mrs Ellingworth, a Herschel descendant (a granddaughter of Matilda Rose [1844-1914], who was

John's seventh daughter). This is a note as a letter Constance wrote to her children just before her 81st birthday in March 1936.

She described in detail her home life with her parents and sisters. It too seems valuable particularly to know John's personality as a educator in his family. I asked Mrs Ellingworth to allow me to publish the note in a top article in our Newsletter and she kindly gave me a permission. The following is a part of the note:

My education was entirely conducted at home and as an example of the education of a girl in the Victorian age I think it may claim to have been fairly broad and varied, both in matter and in manner, for I had many teachers. My sisters' governess, Miss Karth, who was a French Alsatian, taught me French and German from the moment I could speak, so that when she left Collingwood, I being then not quite 8 years old, I could read both languages easily and chatter nursery French. Thereafter my Father undertook to teach me Latin and mathematics, while my Mother and sisters divided other subjects between them. There was nothing slipshod about this home teaching. The hours were regularly planned out; every day's lessons were settled beforehand. My day began at 8 o'clock when I went to my Father's room to receive half an hour's lesson in Latin while he was yet in bed. I then went to my Mother to read to her first some chapter of the Bible and after than some poetry. I may mention here that before I was fourteen I had read aloud the whole of Milton's Paradise Lost and Paradise Regained and the whole of the Fairy Queen. On Sunday evenings I used to repeat to my Father long pieces of poetry which I had learnt by heart.

After breakfast I was free to run about in the garden, to feed my rabbits or to watch the coachman grooming the horses. At 10.30 I came in to lessons. One of each of my three sisters took the morning lesson for two days in the week. Isabella taught me geography. Julia history and literature and Rose drawing. At 12 o'clock I went either to my Father for mathematics or to read aloud to my Mother in the drawing room till lunch time, 1 o'clock. The books she chose were very various; some times travels, Eustace's Italy or even guide books to Paris and Rome, or more serious subjects such as Butler's Analogy of Natural and Revealed Religion. My Mother, having herself been taught by her Father, a Scotch Doctor of Divinity, laid great stress on the importance of logic and I had to make a very close analysis of Butler's argument to please her.

One thing strikes me on looking back; holidays were not considered at all. When one sister went away from home there was always another at hand to take her place; Amelia for instance would start teaching me Italian if Bella or Julia were absent, but for me the lessons went on happily and uninterrupted month after month, till at length my health suggested to my Mother that a change was desirable and I was sent for some weeks to Hastings with my eldest sister Lady Gordon, was living with her children who were of my own age.

My sister Bella was a born teacher and her geography lessons were delightful though some what discursive. Julia's on the other hand were more systematic. She had been taught history by Miss Karth on the excellent French method and we made elaborate charts of events in Europe and the rest of the world and for reading we had admirable French manuals of history from which I learnt about the Ottoman Empire and the story of the Arabs in Spain and Sicily as well as of Charlemagne's conquests so that when later we read more serious history books I had wider background in my mind than was usual for children at that time. It is a pleasure to recall all the names of the books which Julia and I read together (and of which I had to write analyses). There were first Bonnechose, Histoire d'Angleterre; Anquetil histoire de France. Miss Sewell Ancient History and Mrs delightful Histories of Greece and Rome. Then came Alison's History of Europe which brought the story from the fall of the Roman Empire down to the Middle Ages and then all Prescott's books, The Conquest of Mexico and Peru and finally and most thrilling of all Motley's Dutch Republic and United Netherlands. We also read Macauley's history and Stanhope's Life of Queen Anne, but about this time my Father died and all our regular home life fell in ruin. I was not quite 16 when he died and to me his loss meant the end of all my happy childhood. We continued to live as before at Collingwood but with the absence of his inspiring personality everything seemed objectless. My own education came to a standstill.

Rose was Constance's seventh sister (1844-1914), Amelia was her fifth sister (1841-1921), Bella(=Isabella) was her second sister (1831-93), Julia was her sixth sister (1842-1933) and Lady Gordon was her eldest sister, Caroline (1830-1909).

Quoted from Newsletter Issue No 59 (November 1993) and No 60 (January 1994)

Literaturverzeichnis

[1] Adams, J.C., MA, FRAS, Fellow of St Johns College, Cambridge (1846). *On the Perturbations of Uranus* (p.265). Appendices to various nautical almanacs between the years 1834 and 1854 (reprints published 1851) (note that this is a 50Mb download of the pdf scan of the nineteenth-century printed book). UK Nautical Almanac Office, 1851.

[2] Adams, J. C. (November 13, 1846).Explanation of the observed irregularities in the motion of Uranus, on the hypothesis of disturbance by a more distant planet. MNRAS **7**, pp. 149-152.

[3] Adams, J.C. (1819-1892) :The scientific papers of John Couch Adams. Vol. **I**, Cambridge, at the University Press, 1896

[4] Airy, G.B. (24. Februar 1838). *Schreiben des Herrn Airy, Astronomer Royal, an den Herausgeber.* Astronomische Nachrichten **15**, No. **349**, Seite 217, (1838)

[5] Airy, G. B. (November 13, 1846). *Account of some circumstances historically connected with the discovery of the planet exterior to Uranus.* MNRAS **7**, 121-144. (1846) Bibcode:1846MNRAS...7..121A. doi:10.1002/asna.18470251002.

[6] Airy, G. B.: Autobiography of Sir George Biddell Airy, K.C.B., M.A., LL.D., D.C.L., F.R.S., F.R.A.S., Honorary Fellow of the Trinity College, Cambridge, Astronomer Royal from 1836 to 1881. edited by Wilfrid Airy, B.A., M.Inst. C.E., Cambridge, at the University Press, 1896

[7] Baghdady, M.K.D.: The discovery of Neptune: a critical examination of the theory of LeVerrier. PhD thesis, 1980; University of Aston in Birmingham. 1980

[8] Bessel, F.W.: *Engelmann, R.* (Hrsg.) 1875: *Abhandlungen von Friedrich Wilhelm Bessel* in drei Bänden. Band **I**: Bewegung der Körper im Sonnensystem - Sphärische Astronomie. Leipzig, 1875. Speziell auf Seite 84: *Untersuchungen des Teils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht.* Abhandl. d. Berl. Akademie der Wissenschaften 1824. Mathemat. Cl. p. 1. Der Akademie vorgelegt am 29. Januar 1824.

[9] Bessel, F.W.: *Engelmann, W.* (Hrsg.) : Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel. Herausgegeben von der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften 1880. Verlag von Wilheln Engelmann, Leipzig 1880

[10] Bessel, F.W.: *Erman, A.* (Hrsg.) 1852: Briefwechsel zwischen W. Olbers und F. W. Bessel. Band 2, Leipzig, Avenarius & Mendelssohn, 1852

[11] Brookes, C.J. 1970: *On the prediction of Neptune.* Celestial Mechanics **3**, pp. 67-80, (1970)

[12] Brown, E.W. 1931: *On a Criterion for the Prediction of an Unknown Planet.* MNRAS **92**, pp. 80 - 101, (1931)

[13] Buttmann, Günther: *The Shadow of the Telescope: A Biography of John Herschel*, The Trinity Press, Worcester, and London, (1970, 1974), ISBN 0 7188 2087 8

[14] Challis, Rev. J. (November 13, 1846). *Account of observations at the Cambridge observatory for detecting the planet exterior to Uranus.* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (MNRAS) **7**, pp. 145-149, (1846)

[15] Dick, W.R. 1986: *Zur Auffindung des Planeten Neptun an der Berliner Sternwarte im September 1846.* Die Sterne **62**, Heft V, pp. 251-258

[16] Felber, H.J. (Hrsg.) 1994: *Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und Friedrich Wilhelm Bessel.* Akademie Verlag, pp. 248, (1994)

[17] Flemming, F.W. & H.C. Schumacher 1850 (posthum durch H.C. Schumacher): Reduction der in Greenwich, Paris und Königsberg gemachten Beobachtungen des Uranus, von 1781 bis 1837. AN **30**, Issue 9, p. 129-193

[18] Galle, J.G. 1877: Ein Nachtrag zu den in Band 25 und dem Ergänzungshefte von 1849 der Astron. Nachrichten enthaltenen Berichten über die erste Auffindung des Planeten Neptun. AN **89**, pp. 349-352, (1877)

[19] Galle, J.G. 1882: Einige nachträgliche ergänzende Bemerkungen in Betreff der Auffindung des Planeten Neptun und der Beobachtungen des dunkeln Saturnsringes in den Jahren 1838 u. 1839 AN **101**, pp. 219-222, (1882)

[20] Galle, J.G. 1882: *Über die erste Auffindung des Planeten Neptun.* Copernicus **2**, pp. 63-64, (1882)

[21] Gould, B.A. 1850: Report on the history of the discovery of Neptune. Washington City, Smithonian Institution 1850

[22] Grant, R. 1852: History of physical astronomy from the earliest ages to the middle of the nineteenth century. pp. 672, London, 1852 Robert Grant (1814-1892) war ein schottischer Astronom und Historiker. Um historisches Material zu sammeln, hielt er sich von 1845 bis 1847 in Paris auf. Den Aufenthalt finanzierte er sich durch Englisch - Unterricht. Gleichzeitig hörte er Vorlesungen bei F. Arago sowie U. Le Verrier und erlebte so die dramatische Geschichte der Neptun - Entdeckung vor Ort direkt mit.

[23] Hamel, J. & Eelsalu, Heino 1980: *Ein bisher unbekannter Brief von Encke an Mädler.* Rara Astronomica in Estonia **61**, Suppl. 1980, S. 20-21 (Tartu)

[24] Hamel, J. 1984: *Bessels Hypothese der spezifischen Gravitation und das Problem der Uranusbewegung. Ein bisher unbekanntes Manuskript von F. W. Bessel* Die Sterne **60**, Heft 5, (1984), p. 278-283 (= Mitteilungen der Archenhold - Sternwarte; 156)

[25] Herschel, J.F.W. 1878: Outlines of Astronomy, New Edition, Longmanns Green, London, pp.753, 1893 Die „Outlines of Astronomy“ waren das berühmte Standardwerk der Astronomie im 19ten Jahrhundert, welches in

zehn Auflagen erschien. Schon in der ersten Ausgabe von 1849 auf Seite 481 wird die Entdeckung des Neptuns sehr ausführlich diskutiert.

[26] Holland, Sir Henry: Recollections of Past Life. London, Longmans, Green and Co. 1872 Sir Henry Holland war zeitweise Arzt des englischen Königshauses und wurde durch seine Reiseschilderungen durch den Balkan und Griechenland sehr populär. Er war astronomisch sehr interessiert und beobachtete bei einem Italienaufenthalt in Florenz mit dem italienischen Astronomen und Kometen - Entdecker G. Donati im September 1858 den wohl hellsten und schönsten Kometen des 19ten Jahrhunderts. Im Oktober 1846 war er Gast am Berliner Observatorium und erlebte die Namensnennung des neuen Planeten hautnah mit.

[27] Humboldt, Alexander von, KOSMOS, *Entwurf einer physischen Weltbeschreibung*. Band I-V, (1845-1862). Neudruck des Gesamtwerkes bei *Die andere Bibliothek*, editiert und mit einem Nachwort versehen von Ottmar Ette und Oliver Lubrich, Eichborn Verlag, Frankfurt am Main , Herausgegeben von Markus Enzensberger, 2004.

[28] Jacobi, C.G.J. 1848: *Auszug eines Schreibens des Herrn Professors Jacobi an den Herausgeber*. Astronomische Nachrichten, **28**, Issue 3, pp.43-46, (1848)

[29] Kent, Deborah (2011): The curious aftermath of Neptune's discovery. Physics Today **64**, 12, 46 (2011); doi: 10.1063/PT.3.136

[30] Kollerstrom, N.: RAS - research: Recovering the Neptune-files (2003). Eggen's theft of the British Neptune-file. Astronomy & Geophysics **44**, Issue 5, pp. 5.23-5.24, (2003)

[31] Kollerstrom, N.: The Neptune - Discovery Correspondence - Archive. (2005)

[32] Kollerstrom, N.: John Herschel and the discovery of Neptune. Journal of Astronomical History and Heritage (ISSN 1440-2807), Vol. **9**, No. 2, pp. 151 - 158, (2006).

[33] Kollerstrom, N.: A Hiatus in History: The British Claim for Neptune's Co-prediction, 1845-1846. History of Science, **44**, pp.1-28 (part I) und pp. 349-371 (part II), (2006)

[34] Kollerstrom, N.: The naming of Neptune. Journal of Astronomical History and Heritage (ISSN 1440-2807), **12**, No. 1, pp. 66 - 71, (2009).

[35] Lai, H.M., Lam, C.C. und Young, K. 1990: *Perturbation of Uranus by Neptune: A modern perspective.* American Journal of Physics **58**, 1990

[36] Lawrynowicz, K. : *Friedrich Wilhelm Bessel 1784-1846.* Aus dem Russischen übersetzt von Katja Hansen - Matyssek und Heinz Matyssek. Basel, Boston Berlin, Birkhäuser, 1995 (Vita mathematica; Bd. 9)

[37] Lequeux, James (2013): *Le Verrier, Magnificent and Detestable Astronomer.* Astrophysics and Space Science Library **397**, DOI: 10.1007/978-1-4614-5565-3,©Springer Science 2013

[38] Le Verrier, U.J. 1846: Recherches sur les mouvements d'Uranus. AN **25**, No. 580, pp. 53-64, (1846)

[39] Le Verrier, U.J. 1846: Recherches sur les mouvements d'Uranus (Fortsetzung). AN **25**, No. 581, pp. 65-80, (1846)

[40] Le Verrier, U.J. 1846: Recherches sur les mouvements d'Uranus (Beschluss). AN **25**, No. 582, pp. 83-91, (1846)

[41] Lexell, A.J. : *Recherches sur la nouvelle planete, decouverte par M. Herschel & nominee Georgium Sidus.* Acta Academia Scientarum Imperialis Petropolitanae. **1**, 1783, pp. 303-329. Seine Biografie findet man in dem Buch von Johan C.-E. Sten: A Comet of Enlightenment, (Vita Mathematica Bd. 17), Birkhäuser Verlag, Basel 2014

[42] Lieske, J.H. 1979: *Precession Matrix based on IAU (1976) System of Astronomical Constants.* Astron. Astrophys. **73**, 282-284 (1979)

[43] Lindenau, Bernhard von: Beitrag zur Geschichte der Neptuns - Entdeckung. Ergänzungsheft zu Schumachers Astronomischen Nachrichten AN **29**, 1849, pp. 1-31 (1849) Bernhard August von Lindenau (1779-1854), Sohn von Johann August von Lindenau (1749-1817) und Agnes Friederike Helene Senfft von Pilsach (1751-1810) , war Jurist, Astronom, Minister und Kunstmäzen. Mit dem obigen Artikel hat er wohl seinen profiliertesten

astronomisch - historischen Rückblick geschrieben. Bei Franz Xaver von Zach auf dem Seeberg hat er seine Begeisterung für die Astronomie empfangen. Auch war er ein enger Freund von C.F. Gauss.

[44] Littlewood, J.E. (1953): A Mathematician's Miscellany. Methuen & CO. LTD. London. 36 Essex Street, Strand, W.C. 2

[45] Lodge, Sir Oliver: *Pioneers of Science*. London, MacMillan and Co., New York 1893

[46] Lyttleton, R.A.: *A short method for the discovery of Neptune*. MNRAS **118**, 551-559, (1958)

[47] Lyttleton, R.A. :*The rediscovery of Neptune*. Vistas in Astronomy, **3**, Issue 1, pp. 25-46 (1960)

[48] Lyttleton, R.A. : *The Story of Neptune*. Nature, **197**, Issue 4869, pp. 734 (1963).

[49] Peters, C.A.F. (Hrsg.) 1863: Briefwechsel zwischen C.F. Gauss und H.C. Schumacher. Band **5**, p. 177, Altona: G. Esch 1863.

[50] Pontecoulant, Comte de, P. G. Doulcet: Theorie Analytique du Systeme du Monde, 1829-1846, Paris. Pontecoulant (1795-1874) diente von 1811 bis 1849 in der Armee und entwickelte eine spezielle Störungstheorie im Mehrkörperproblem für Planeten und Kometen (Komet Halley)

[51] Rawlins, Dennis (1992). *The Neptune Conspiracy: British Astronomy's PostDiscovery Discovery* (PDF).

[52] Sampson, R.A. 1904: A Description of Adams's Manuscripts on the Perturbations of Uranus. MNRAS **54**, 143-168, (1904) Ralph Allen Sampson (1866-1939) war u.a. ein Student von John Couch Adams, der sein Tutor für die mathematischen Tripos-Prüfungen war, in denen er 1888 Third Wrangler wurde. 1889 erhielt er den Smith-Preis und wurde Fellow des St. John's College

[53] Schilling, C. (Hrsg.) : *Wilhelm Olbers - Sein Leben und seine Werke - Band II*, Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss. Zweite Abteilung. Göttingen, 1909

[54] Schoenberg, E & A. Perlick (1955): *Unbekannte Briefe von C.F.Gauss und Fr. W. Bessel*. Abhandlungen der bayerischen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch Naturwissenschaftliche Klasse . Neue Folge , Heft **71**, 1955

[55] Smart, W.M. 1947: „*John Couch Adams and the Discovery of Neptune*“, Occasional Notes of the Royal Astronomical Society, No. **11**, 2, 33-38, London

[56] Tisserand, F. 1889: *Traité de mécanique Céleste*. Tome **I-IV**, (1889-1896). Hier Band **I**, Kapitel XXIII: *Decouverte de Neptune*, pp. 374-387, (1889)