Eugen Willerding

Warum expandiert das Universum beschleunigt?

Welche Rolle spielt die Strukturbildung?

Warum expandiert das Universum beschleunigt?

Welche Rolle spielt die Strukturbildung?

Eugen Willerding

www.eugen-willerding.de
Titelbild: NASA/Hubble Abell 370 cluster
©2024 Eugen Willerding

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **6**

1.1 Historisches zur kosmologischen Konstanten 8

1.2 Defizit mathematischer Methoden, modifizierte Gravitation oder unsichtbare Materie? 21

2 Ein expandierender Teilchenring mit Paarfusion **39**

2.1 Die Dynamik eines expandierenden Teilchenringes 43

2.2 Das Modell von Alexander Friedmann 55

2.3 Der Ringkosmos im Bild der Friedmanngleichungen 60

2.4 Die Entropiegleichung (Energiegleichung) der Paarfusion . 66

2.5 Die Layzer - Irvine Gleichung 74

2.6 Erwin Schrödinger und die Λ-Konstante 78

2.7 Arthur Eddington und die Λ-Konstante 86

2.8 Rückkopplungen (backreaction) 88

2.9 Bemerkungen zur Energiegleichung 93

2.10 Die Dynamik der Paarfusion im Ring 94

2.11 Der Abbé Lemaître und das „atome primitif“ 97

2.12 M. P. Bronstein und die Λ - Variable 102

2.13 Modenwachstum im Ringkosmos 104

2.14 Der statische w - Parameter im Ringkosmos 107

2.15 Der dynamische w - Parameter 110

2.16 Die beschleunigte Expansion des Ringkosmos 114

2.17 Dunkle Energie ist negative Gravitationsenergie 120

3 Das sich beschleunigt ausdehnende Universum **125**

3.1 Franz Selety und der fraktale Kosmos 126

3.2 Ein hydrodynamisches Zwischenspiel 130

3.3 Die Wirkungsfunktion eines Modelluniversums 133

3.4 Fred Hoyle und „steady state“ 141

3.5 Ein zyklisches Null-Energie Universum ? 142

3.6 Äquivalente Bilder der Energiegleichung 144

3.7 Ein Vergleich mit dem Quintessenzmodell 148
3.8 Eichtransformationen der Entropiegleichung 151
3.9 Skalengesetze der Energiedichte 152
3.10 Klassische Deutung der Rotverschiebung 155
3.11 Die Drift der Rotverschiebung 160
3.12 Keplerbewegung im expandierenden Universum 163
3.13 Dunkelmaterie sind Populationen schwarzer Löcher? . . . 175
3.14 Globale Energieerhaltung im Universum? 176

4 Die Zustandsgleichung des Universums auf dem Prüfstand 179
4.1 Der w – Parameter und die Jeansgleichung 179
4.2 Strukturwachstum durch die Jeansgleichung? 181
4.3 Die Zustandsgleichung w[a] 187
4.4 Der allgemeine Zustand w[t] 194
4.5 Der Zustand w = -1 (ΛCDM-Modell) 204
4.6 Der Zustand w = +1 („soft bounce“) 207
4.7 Der Zustand w = -2/3 210
4.8 Der dynamische Zustand w[t] 216
4.9 Ein spekulatives X-CDM Modell 221
4.10 Strukturwachstum und Dunkle Materie 227
4.11 Die S_8 Anomalie und w= -2/3 233
4.12 Akustische Oszillationen 242
4.13 Dunkle Materie, das Virialtheorem und Fritz Zwicky . . . 245

5 Das wCDM - Universum 250
5.1 Die Annahmen des ΛCDM – Modelles 250
5.2 Ein Vergleich mit der „timescape cosmology“ 258
5.3 Die Botschaft der SNe-Ia Supernovae 260
5.4 Die S_8 Anomalie und das xCDM-Modell 271
5.5 Quasare und die H_0-Anomalie 274
5.6 Neuere Auswertungen der Supernova Daten 278

6 Schlussfolgerungen 281

7 Philosophische Gedanken 289

Anhang 297
A.1 Fragment eines Interviews mit George Lemaitre 297

A.2 Summationsformeln 308
A.3 Die Potentialfunktion des Ringes 309
A.4 Adiabatische Zustandsänderungen im Ringkosmos 311
A.5 Ein Punktmassengitter 314
A.6 Die Appellschen und Hornschen Funktionen 317
A.7 Die Ameise auf dem Gummiband 318
A.8 Eine Diskrepanz um den Faktor 2 319
A.9 Planetenbahnen und Photonenbahnen 326
A.10 Madelungkonstanten und Gittersummen 331
A.11 Greensche Funktion der Klein-Gordon Gleichung 333
A.12 Integrale der Fermi-Dirac Statistik 335
A.13 Kosmologie und die Planck'schen Einheiten 338

Literaturverzeichnis **341**

1 Einleitung

Wie alles sich zum Ganzen webt,
eins in dem anderen wirkt und lebt!
Wie Himmelskräfte auf und niedersteigen,
und sich die goldenen Eimer reichen!
Mit segenduftenden Schwingen
vom Himmel durch die Erde dringen,
harmonisch all das All durchklingen!
Faust I; Verse 448-453 J.W. von Goethe

Das Jahr 1998 stellte einen Wendepunkt in der Kosmologie dar, nachdem im wesentlichen zwei konkurrierende Beobachtergruppen aus den USA und Australien durch Helligkeitsmessungen an sehr weit entfernten Supernovae vom Typ Ia entdeckten, dass die Expansion des Universums gegen die allgemeinen Erwartungen immer schneller anstatt langsamer wird. Dieses Verhalten hatte man so nicht erwartet, weil bei anziehenden Kräften und Gravitationsfeldern eigentlich genau das Gegenteil eintreten sollte ([149], [163], [174]) [1]. Außerdem zeigte sich durch zusätzliche Messungen des W-MAP Satelliten bei der kosmischen Hintergrundstrahlung, daß die Geometrie des Kosmos weitgehend euklidisch ist. Das alte **EdS** Standardmodell des expandierenden Kosmos ohne die Einstein'sche Konstante Λ hatte damit ausgedient (Einstein - deSitter Modell). Die eigentliche Topologie des Universums bleibt aber noch unklar; denn auch ein euklidisches Universum kann *räumlich endlich sein.*

Das so realisierte Faktum lässt zunächst zwei alternative Deutungen zu:

- A) Das Phänomen ist ein *realer dynamischer Vorgang* im Universum, indem der Skalenfaktor a durch eine unbekannte Kraft (Gegengravitation; kosmologische Konstante) *nach-beschleunigt*

[1] Die Entdeckung der beschleunigten Expansion des Universums wurde mit dem Physik - Nobelpreis 2011 geehrt

wird. Die Ursache könnte auch eine noch unverstandene Energiebilanz des Universums zwischen Expansion und Strukturbildung sein. Die *nichtlinearen hyperbolischen* Einstein'schen Feldgleichungen lassen hier bis heute einige Fragen offen. Andererseits könnte auch eine noch unbekannte „fünfte" Kraft („dunkle Energie"; „Vakuumenergie"; „Quintessenz"; „Cosmonfeld") oder eine modifizierte Gravitation ins Spiel kommen.[2]

- B) Das Phänomen der beschleunigten Expansion ist *nur scheinbar* („Luftspiegelung"), weil durch die heutigen Inhomogenitäten im Kosmos die optischen Daten wie Rotverschiebung und Helligkeit *im Mittel* verfälscht werden und somit die lokalen „Uhren" in der Nähe von Materiehäufungen stark unterschiedliche Ganggeschwindigkeiten aufweisen könnten. Räumliche Mittellungen und kosmische Evolution sind nicht vertauschbar. Auch eine Verletzung des *Kopernikanischen Prinzips* wäre letztendlich denkbar, obwohl sehr unwahrscheinlich.

Natürlich könnten auch beide Prozesse eine Rolle spielen – mit unterschiedlichen Gewichtungen. Sehr einfach – fast trivial ist es, wenn eine zusätzliche „abstoßende" Kraft in die Dynamik des Universums eingeführt wird. Doch genau diese „dunkle Kraft" wurde schon 1917 von Albert Einstein in die Gravitationstheorie eingeführt, um einerseits ein statisches und damit letztendlich ein nicht-evolutionäres Universum zu ermöglichen, andererseits aber auch gewisse Grenzbedingungen des unendlich ausgedehnten euklidischen Raumes zu erfüllen. A. Einstein nannte diesen künstlichen Parameter λ, der die Dimension einer reziproken Länge ins Quadrat hat. E. Schrödinger hat im gleichen Jahr darauf hingewiesen, dass diese Konstante anstatt auf der linken Seite der Feldgleichung als Zusatz zum Einsteinschen Tensor auch auf der rechten Seite im Energie - Impulstensor stehen kann. Einstein war von dieser Idee aber wenig begeistert, weil dieses Vorgehen in ein „Gestrüpp" von Hypothesen führen würde. Es lohnt sich also, die Geschichte dieser merkwürdigen „Konstanten" näher zu betrachten.

[2] Der Begriff „Dunkle Energie" ist im Gegensatz zum Begriff „Dunkle Kraft" aufgrund der Einstein'schen Relation $E = m\,c^2$ völliger Unsinn, da „Dunkle Energie" sofort einem Äquivalent von „Dunkler Materie" entspräche.

Fig. 1.1: *Eine Supernova (1994D) in der Galaxie NGC 4526, beobachtet im Jahre 1994. Diese „Leuchtfeuer“ dienen als Entfernungsstandards in den Weiten des Universums.(Hubble Space Telescope)*

1.1 Historisches zur kosmologischen Konstanten

Das Auf und Ab in der Geschichte dieser kosmologischen Konstanten λ (physikalische Dimension ist eine reziproke Länge ins Quadrat; heutige Definition $\Lambda = \lambda c^2$, wo c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet und Λ von der Dimension eine Frequenz ins Quadrat darstellt) begann mit EINSTEIN, als er – geleitet von einem Vorurteil – am 8. Februar 1917 in den Sitzungsberichten der Preußischen Akademie sein „statisch geschlossenes Universum“ unter Ausschluss von Grenzbedingungen mit Hilfe seiner Feldgleichungen beschreiben wollte ([42]). In einem Unterkapitel *Die Grenzbedingungen gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie* schreibt er:

> *Im folgenden führe ich den Leser auf dem von mir selbst zurückgelegten, etwas indirekten und holperigen Wege, weil ich nur so hoffen kann, dass er dem Endergebnis Interesse entgegenbringe. Ich komme nämlich zu der Meinung, dass die von mir bisher vertreten Feldgleichungen der Gravitation noch einer kleinen Modifikation bedürfen, um auf der Basis der*

allgemeinen Relativitätstheorie jene prinzipiellen Schwierigkeiten zu vermeiden, die wir im vorigen Paragraphen für die Newtonsche Theorie dargelegt haben.

Zuvor hatte er schon in einem Brief an EHRENFEST geschrieben:

...Ich habe wieder etwas verbrochen in der Gravitationstheorie, was mich ein wenig in Gefahr bringt, in ein Tollhaus interniert zu werden...

Er argumentierte zunächst auf der Basis der Newton'schen Theorie und modifizierte die Poissongleichung – die skalare Feldgleichung der Newton'schen Theorie – in eine Helmholtzgleichung ([42]). Die dann erweiterten Feldgleichungen nach EINSTEIN lauten ([211])

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\, \mathbf{R} - \lambda\, g_{\mu\nu} = \frac{8\pi\, G}{c^4}\, \mathbf{T}_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

wo $\mathbf{R}_{\mu\nu}$ den Riemannschen Krümmungstensor, $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ den metrischen Tensor, $\mathbf{R}$ das Ricci Skalar (*Gaußsche Krümmung*) und $\mathbf{T}_{\mu\nu}$ den *Energie - Impuls-Tensor* bezeichnen. Er verallgemeinert den *Maxwellschen Spannungstensor*, indem er Energiedichte, Impulsdichte und Energiestromdichte zusammenfasst. Für eine ideale Flüssigkeit hat der Tensor die Gestalt

$$\mathbf{T}_{\mu\nu} = (\varrho\, c^2 + p)\, u_\mu\, u_\nu - p\, g_{\mu\nu}. \tag{1.2}$$

Hier ist $\epsilon \equiv \varrho\, c^2$ die Energiedichte, ϱ die Massendichte, p der Druck und u_μ die Vierergeschwindigkeit. Die μ, ν bezeichnen alle 16 möglichen Kombinationen der Raum-Zeit Indizes t, x, y, z. Da aber die Kombinationen tx, xt, ty, yt, tz, zt sowie xy, yx, yz, zy, xz, zx dasselbe ausdrücken, reduzieren sich die Einsteinschen Gleichungen auf genau **10** unabhängige Beziehungen.

Das physikalisch irreführende ist nun, dass sowohl A. EINSTEIN, H. WEYL als auch W. PAULI in seinem berühmten Enzyklopädieartikel von 1920 behaupten oder notieren, dass der Newton'sche Grenzfall der erweiterten Einstein'schen Feldgleichungen durch die skalare Feldgleichung (Helmholtzgleichung, Yukawa-Gleichung)

$$\boxed{\Delta\, \Phi - \lambda\, \Phi = 4\pi G \varrho} \tag{1.3}$$

gegeben ist ([75, 143]. Φ ist jetzt das skalare Gravitationspotential und ϱ die Dichte des euklidischen unendlich ausgedehnten Raumes. A. EINSTEIN notiert für diese Gleichung die Lösung

$$\Phi = -\frac{4\pi G}{\lambda}\,\varrho, \tag{1.4}$$

welche auch im Unendlichen einen endlichen Wert hat. Die Poissongleichung hat als partikuläre Lösungen immer noch die allgemeine Lösung der Laplacegleichung, also eine Summe der Form $\sum_{l,m} a_{l,m}\, r^l\, Y_{l,m}$, welche aber für $r \to \infty$ nicht verschwinden. A. EINSTEIN suchte aber eine Feldgleichung, welche „automatisch" die richtigen Randbedingungen im Unendlichen liefern. Was er aber 1917 nicht notierte (und auch nicht W. PAULI 1920), ist die vollständige Lösung der obigen *Helmholtzgleichung* in Kugelkoordinaten. Mit den Konstanten A und B (Kontinuum und Massenpunkt im Koordinatenursprung) gilt

$$\Phi = -\frac{4\pi G}{\lambda}\,\varrho + A\,\frac{e^{+\sqrt{\lambda}\,r}}{r} + B\,\frac{e^{-\sqrt{\lambda}\,r}}{r}. \tag{1.5}$$

Es treten also im Newton'schen Grenzfall für eine Punktmasse zwei modifizierte Potentiale vom Typ „Yukawa" auf, von dem aber nur der Teil proportional A die gewünschte „Abstoßung" in großen Entfernungen liefert, die Randbedingung $\Phi = konstant$ im Unendlichen aber verletzt. Der andere Teil proportional B wurde schon gegen Ende des 19. Jahrhunderts von H. v. SEELIGER[183] und vor diesem von C. NEUMANN als mögliche Modifikation der Gravitation in großen Entfernungen diskutiert. Im Unterschied zu EINSTEIN 1917 wollte H. SEELIGER 1895 die Newton'sche Gravitation exponentiell abschwächen, um unendliche Potentialdifferenzen für bestimmte Massenanordnungen in einem euklidisch – unendlichen statischen Kosmos zu vermeiden (Optische Analogie: *Olber's Paradoxon*). Während der Term proportional B eine Abschwächung herbeiführt, führt der Term proportional A in großer Entfernung zu einer Antigravitation und eine endliche Grenzbedingung ist nicht erfüllbar. Auch führt in einer Newton'schen Kosmologie das obige Potentialgesetz nicht zu den richtigen Friedmann - Lemaître Gleichungen der Kosmologie mit λ- Term.

Die endlichen Grenzbedingungen im unendlichen Raum kann somit EINSTEIN mit dem „antigravitiven" Potential $\exp[+\sqrt{\lambda}\,r]/r$ im Fernbereich nicht lösen. Doch wie lautet nun die „richtige" Feldgleichung mit

λ - Term im Grenzfall der Newton'schen Kosmologie? Die Diskrepanz entsteht dadurch, dass in der ART die Quelle des Skalarfeldes nicht nur die Massendichte ϱ, sondern der Ausdruck $\varrho + 3p/c^2$ ist. Neben der Dichte $\varrho_\Lambda = \Lambda/(8\pi G)$ gibt es auch noch den „Negativdruck" $P_\Lambda = -\varrho_\Lambda$. Die Korrektur des Quellterms ist also $-2\varrho_\Lambda$ und erklärt somit, warum vielleicht eine *positive* „Vakuumdichte", *wenn sie denn wirklich existiert*, eine „Abstoßung" herbeiführt. Die „richtige" Poissongleichung im NEWTONschen Grenzfall lautet in diesem Bilde ([157])

$$\Delta\,\Phi = 4\pi G\,(\varrho - 2\varrho_\Lambda) \equiv 4\pi G\,\varrho - \Lambda \tag{1.6}$$

Die physikalische Dimension von Λ ist hier jetzt eine Frequenz ins Quadrat. O. HECKMANN hat in seinen Untersuchungen zur Newtonschen Kosmologie auf diesen richtigen Limes hingewiesen ([75])[3]. Nur mit Hilfe der Potentialgleichung (1.6) erhält man im Rahmen der Newton'schen Dynamik die „richtigen" Friedmann – Lemaître Gleichungen mit Λ-Term.

EINSTEIN hat die Einführung dieser Konstanten später immer bedauert, da sie die *Schönheit seiner Feldgleichungen* zerstört. Seinen Glauben an ein statisches Universum musste EINSTEIN ab etwa 1929 aufgeben; seinen Glauben an die mathematische Schönheit einer Gravitationstheorie hat er nie aufgegeben. Ein aus einer Singularität sich dynamisch entwickelndes Universum kam ihm absurd vor - vielleicht weil hier metaphysisch ein „Schöpfungsakt" suggeriert wird. Mit dieser Auffassung war er ja nicht allein. Philosophisch ist es ja auch natürlicher, anzunehmen, dass das Universum als das Absolute seit *ewigen Zeiten existiert, vielleicht in zyklischen Pulsationen, also vollkommen unzerstörbar ist und eben nicht „mythologisch erschaffen" wurde.*

Die Voraussetzungen, welche zu den Singularitäten in der Newtonschen Theorie führten, waren damals:

- Die Materieverteilung hat eine nichtverschwindende mittlere Dichte (wobei die mittlere Dichte als Grenzwert der in einem beliebigen Volumen V enthaltenden Masse M_V dividiert durch V für $V \to \infty$

[3] Es ist nicht ganz klar, wann genau in der Literatur diese Richtigstellung geschah. Bei A. EINSTEIN 1917 und bei PAULI in seinem Enzyklopädieartikel 1920 steht zumindest die „Helmholtzgleichung" als Newtonsches Analogon zur Einstein - Gleichung mit Λ Term. LEMAÎTRE muss schon um 1930 diese Korrektur vollzogen haben, denn in einem Artikel zur Solvay Konferenz 1958 in Brüssel benutzt er die Poissongleichung 1.6.

definiert ist. Hat das „unendlich angenommene“ Universum eine hierarchisch fraktale Struktur, kann dieser Limes auch Null sein.

- Die Materieverteilung soll statisch sein. Bei einer energetischen Betrachtung führt dieses statische Bild aber zu Widersprüchen, da es innerhalb einer beliebigen Kugel nur die Gravitationsenergie – keine kinetische Energie gibt. Ein unendlich ausgedehnter euklidischer Raum müßte also **sofort kollabieren**.

Gegen die zweite Voraussetzung gab es aber noch um 1900 keinen empirischen Grund. Die Astronomen hatten ja noch nicht einmal die Rotation der eigenen Galaxis richtig verstanden; die eigentliche **galaktozentrische Revolution** fand erst um 1926 statt. Daher nahmen sowohl SEELIGER als auch EINSTEIN wie selbstverständlich ein statisches *nicht - evolutionäres* Universum an. Es gab daher nur ein Ausweg aus diesen „selbstgemachten“ Schwierigkeiten: Man musste das NEWTONsche Gravitationsgesetz oder gar die EINSTEINschen Gravitationsgleichungen abändern[4]. Und genau dies taten SEELIGER und auch EINSTEIN durch einen zusätzlichen Parameter λ – aber mit gänzlich unterschiedlichen Absichten.

Man muss also festhalten: Die Motivation bei Einstein, ein λ einzuführen, kam **nicht** aus der Herleitung der Feldgleichungen, sondern aus seinem Vorurteil, dass seine Feldgleichungen letztendlich keinen *statischen nicht - evolutionären* Kosmos zuließen. Um aber sein eigenes „Gefühl“ in der Theorie bestätigt zu sehen, „veränderte“ er einfach „auf Kosten der Schönheit“ seine eigenen Gleichungen. Die sich daraus ergebenden Veränderungen sind auch im „Newton'schen“ Grenzfall erheblich und verkomplizieren diese alte Theorie durch zusätzliche „ad - hoc“ Bedingungen.[5] Dieses „kleine“ λ (Λ) von EINSTEIN wurde aber entbehrlich, als man spätestens 1929 feststellte, dass **1a)** ein solches statisches Einstein – Universum instabil ist und dass **1b)** nach den Beobachtungen das Universum wirklich expandiert. 1931 setzten de Sitter und Einstein in

[4] In der Kontroverse SEELIGER - WILSING ([219]) deutet J. WILSING (1856-1943) an, dass ein Teil der Schwierigkeiten gerade durch die Annahme einer statischen Verteilung hervorgerufen werden könnte

[5] O. Heckmann schrieb dazu in seinen Untersuchungen zur Kosmologie: *„Es ist aber hervorzuheben, dass die Einführung der Funktion Λ_0, mag man sie auch bei kosmologischen Betrachtungen für angemessen halten, in die Newton'sche Gravitationsauffassung ein schwer zu deutendes Element einführt, weil der einfache Sinn der Poisson'schen Gleichung – die Divergenz der Gravitationskraft ist an jeder Raumstelle der Massendichte proportional – verloren geht.*

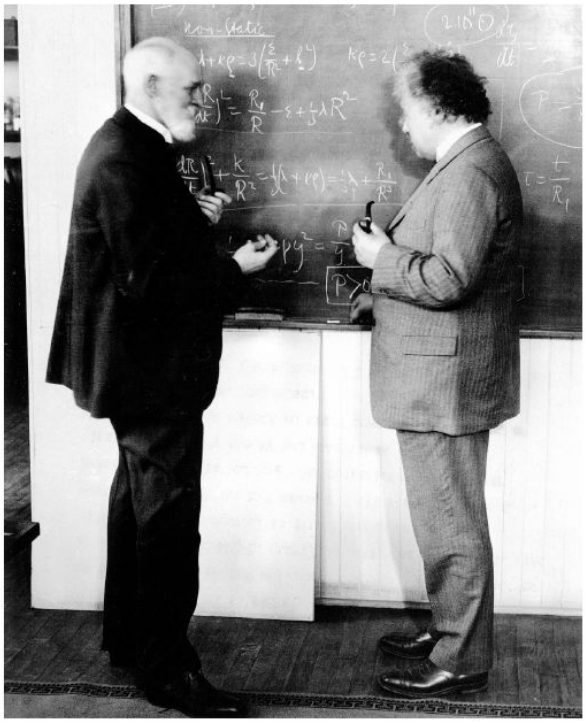


Fig. 1.2: *W. de Sitter (links) und A. Einstein diskutieren im Januar 1932 in Pasadena ihr neues Weltmodell, hier noch mit $\lambda \equiv \Lambda \neq 0$. Das Bild erschien am 28.02.1932 in der New York Times im Artikel „Where great scientist sit as pupils". Bildunterschrift: „Genius at the Blackbord. Dr. de Sitter shows Dr. Einstein a Few Equations". Im unteren Teil der Tafel steht für den Druck die Forderung $P > 0$, die wohl Einstein notiert hat. Eine mögliche λ Konstante im Energie - Impulstensor kann aber in einem Flüssigkeitsmodell nur durch die Forderung $P < 0$ realisiert werden. Im Jahre 1918 hatten Einstein und Schrödinger mit dem Problem $P > 0$ oder $P < 0$ in hypothetischen Fluiden im Kosmos gerungen. (Bildquelle: [170])*

ihrem neuen euklidischen Kosmosmodell diese Konstante einfach Null[6]. In

[6] In dem Sitzungsbericht der Preußischen Akademie vom 16. April 1931 notierte Einstein in seinem Aufsatz „Zum Kosmologischen Problem der Allgemeinen Relativitätstheorie": „Unter diesen Umständen muss man sich die Frage vorlegen, ob man den Tatsachen ohne die Einführung des theoretisch ohnehin unbefriedigenden

einem Brief an LEMAÎTRE vom 26. September 1947 drückt sich EINSTEIN noch einmal sehr kritisch aus:([28])

> *„Ich fand es widerwärtig, annehmen zu müssen, dass die Gleichung für das Gravitationsfeld aus zwei logisch unabhängigen Termen zusammengesetzt sein sollte, die sich zueinander additiv verhalten. Es ist schwierig, Argumente zur Rechtfertigung solcher Gefühle zu geben, wie ich sie bezüglich der logischen Einfachheit empfinde. Ich kann mich aber nicht dagegen wehren, sie mit aller Kraft zu empfinden und ich bin nicht im Stande zu glauben, dass eine so widerwärtige Sache in der Natur verwirklicht werden könnte.“*

Und in seinem Buch *Grundzüge der Relativitätstheorie* schreibt EINSTEIN 1954 im Anhang

> *Die Einführung des „Kosmologischen Gliedes“ in die Gravitationsgleichungen ist zwar relativistisch möglich, vom Standpunkt der logischen Ökonomie aber verwerflich..*[7]

Die kosmologische Konstante (um 1935 das *„little lambda“* oder journalistisch missverstanden das *„kleine Lamm“*) blieb somit nach EINSTEIN *in den Feldgleichungen* ein unschöner *ad hoc* Parameter, der außerdem für die Erklärung der Expansion des Universums überflüssig war. A. EDDINGTON und auch G. LEMAÎTRE dachten zeit ihres Lebens allerdings anders. GEORGE GAMOW (1904-1968) schreibt in seiner unvollendet gebliebenen Autobiographie : *My World Line* ([62]):

> *... However, in the course of his proof, Einstein had divided both sides of one of his intermediate equations by a complicated expression which, in certain circumstances, could become zero. In the case, however, when this expression becomes equal to zero, Einstein's proof does not hold, and Friedmann realized that this opened an entire new world of time-dependent universes: expanding, collapsing, and pulsating ones. Thus,*

λ-Gliedes gerecht werden kann“...

[7] Der mathematische Physiker LOVELOCK konnte 1971 zeigen, dass in 3+1 Dimensionen und unter Einschluss zweiter Feldableitungen der Lambda-Term die einzige mögliche Erweiterung des Einsteintensors darstellt. Daraus folgt natürlich nicht seine notwendige Existenz in der Realität ([118])

Einstein's original gravity equation was correct, and changing it was a mistake. Much later, when I was discussing cosmological problems with Einstein, he remarked that the introduction of the cosmological term was the biggest blunder he ever made in his life[8]*. But this „blunder", rejected by Einstein, is still sometimes used by cosmologists even today, and the cosmological constant denotes by the Greek letter Λ rears its ugly head again and again and again....*

Ab 1998 hat aber diese kosmologische Konstante Λ eine eigenartige Renaissance erlebt. Anhand der Helligkeit und Rotverschiebung von entfernten Supernovae des so genannten Typs **Ia**[9] kann man feststellen, dass sich das Universum beschleunigt ausdehnt. Diese beschleunigte Expansion des Skalenfaktors a (so zunächst die Prämisse), welche somit zunächst die einfachste Interpretation der Beobachtung ist, lässt sich wiederum mit einem kosmologischen Parameter beschreiben und ist heute Bestandteil des vorläufigen **Λ-CDM – Modells**.

Die Kosmologische Konstante wird heutzutage in zweierlei Hinsicht neu diskutiert:

- Die Λ Konstante wird im Zusammenhang mit den „Quantenfluktuationen" des Vakuums gesehen. Nach den Quantenfeldtheorien hat selbst das sogenannte „Vakuum" eine Energiedichte ungleich Null. Doch eine Berechnung dieser Energiedichte weicht von dem beobachteten Wert um **120** Größenordnungen ab. Aufgrund dieser Diskrepanz erscheint es nicht ganz unwahrscheinlich, dass die Ursache von Λ eine völlig andere sein muss. Historisch ist interessant, daß schon Eddington die Konstante als „Selbsteichung" des Universums ansah, de Sitter sie als Ursache der anfänglichen Expansion des Universums betrachtete und auch Erwin Schrödinger im Rahmen seiner nichtlinearen affinen Feldtheorie eine solche Konstante erhielt.

[8] „Die größte Eselei, die er je in seinem Leben gemacht habe"

[9] „Typologisches" Denken in den Naturwissenschaften ist immer problematisch, da es „identische" Objekte im Makrokosmos nicht gibt. Strenggenommen gibt es also nur bedingt Supernovae vom Typ Ia, weil – im Sinne des Essentialismus – jeder Stern, jeder Sternhaufen und jede Galaxie einzigartige „Individuen" und nicht „identische ununterscheidbare Elektronen" sind.

- Unter „Quintessenz“ („das fünfte Seiende“) versteht man ein alternatives Konzept zur kosmologischen Konstanten, nämlich eine nun zeitlich variable „Dunkle Energie“. Den Begriff „Quintessenz“ hat 1988 der Kosmologe Paul Steinhardt[17] eingeführt, den Begriff der „dunkle Energie (dark energy)“ der Teilchenphysiker M. Turner. Erste Ideen einer variablen „Vakuumenergie“ in Form einer „Zugspannung“ findet man schon bei Schrödinger im Jahre 1917 bei einer Diskussion eines λ - Terms auf der *rechten Seite* der Einsteinschen Feldgleichungen ([175]). Im Jahre 1933 veröffentlichte der russische Physiker und Astrophysiker M.P.Bronstein (1906-1938) einen Artikel über das expandierende Universum mit einer variablen kosmologischen Konstanten (*„On the Expanding Universe“*)([11]). Neuere Modelle wurden schließlich von C.Wetterich (1987) oder P.J.E.Peebles, B. Batra (1987) diskutiert. C. Wetterich schlägt vor, dass ein Skalarfeld – das **Kosmon Feld** – für eine zeitlich veränderliche kosmologische „Konstante“ verantwortlich ist.

- Seit einigen Jahren wird auch versucht, die beschleunigte Expansion des Universums völlig konventionell mit der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) ohne einen Λ Term und ohne exotische Physik zu erklären. T. Buchert formulierte hierzu eine modifizierte FLRW - Gleichung (Buchert & Ehlers, 1997, [12]), obwohl ähnliche Ideen schon ab 1960 in der russischen Literatur diskutiert wurden. Entscheidende Rolle sollen hier die Strukturierungsprozesse im stark heterogenen Kosmos spielen, bei denen räumliche und zeitliche Mittellungen nicht vertauschbar sind. Quantitativ überzeugende Resultate liegen aber noch nicht vor, was mit den extrem komplizierten mathematisch rekursiven Lösungsalgorithmen der ART zusammenhängt.

Die Idee der „Vakuumenergie“ als Ursache der sogenannten „kosmologischen Konstante“ ist im Jahre 2005 von J.L. Jaffe stark in Zweifel gezogen worden ([86]). Er diskutiert dabei den *Casimir Effekt*, der von vielen Autoren als Beleg für die Existenz oder die Realität der *Nullpunktsenergie* oder *Vakuumenergie* angesehen wird. Jaffe bewies aber, dass der Casimir-Effekt ohne Bezug zu einer hypothetischen Nullpunktsenergie als eine rein relativistische Quantenkraft zwischen Ladungen und Strömen erklärt werden kann. Zudem konnte er zeigen, dass der Effekt von der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten α nur scheinbar unabhängig ist

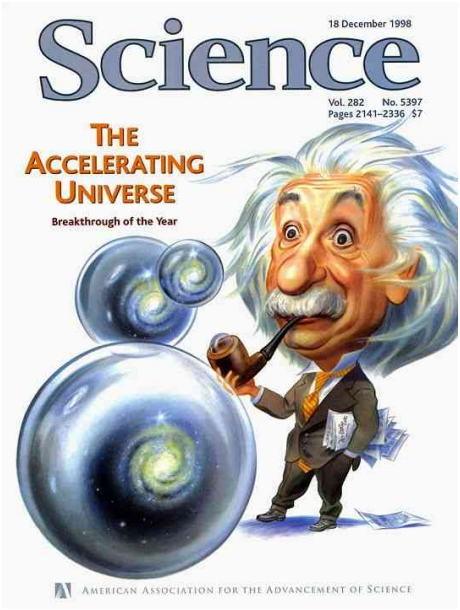


Fig. 1.3: *Titelblatt von Science im Dezember 1998 (John Kauscht's cover illustration). Als Durchbruch des Jahres wird die endgültige Entdeckung der „beschleunigten" Expansion des Universums gefeiert. Dieses Phänomen ist sehr schwer verständlich, da man bei Gravitation immer eine Abbremsung erwartet. Wird ein Stein senkrecht in die Höhe geworfen, wird er immer langsamer, nicht aber schneller. Eine Ursache könnte sein, dass eine zusätzliche abstoßende Kraft („Vakuumenergie") existiert. Das Phänomen ist äußerst verwirrend, weil zusätzlich noch das Problem der „Dunklen Materie" im Kosmos existiert (Zu langsames Dichtewachstum im expandierenden Kosmos und konstante und nicht abnehmende Rotationsgeschwindigkeiten in den äußeren Bereichen von Galaxien). Gibt es eine gemeinsame Ursache oder eine Ideenverbindung beider Phänomene?*

und für $\alpha \to 0$ verschwindet. Ein direkter „Beweis" für die Realität von Nullpunktsenergie ist der *Casimir-Effekt* in jedem Falle nicht.

Momentan sind somit die meisten der hypothetischen theoretischen Modelle zur Erklärung der beschleunigten Expansion des Universums mehr als fragwürdig. Man hat den Eindruck, als ob einige dieser Konzepte eher Ähnlichkeit mit **esoterischen Mythologien** haben als mit tragbaren und *falsifizierbaren wissenschaftlichen Konzepten*. So zählt S.

Perlmutter in seinem Vortrag *What We Learn When We Learn that the Universe is Accelerating* während des *Lindau- Nobel - Laureate Meetings* von 2015 fast ironisch folgende „*Erklärungen*“ für die beschleunigte Expansion des Universums auf:

> *Dark Energy - Quintessence - Supergravity - K-essence - Cyclic Universe - Phantom Energy - Extra Dimensions - Big Rip Cosmology - Ekpyrotic Universe - Photon-axion oscillations*

Auffallend bei dieser Aufzählung ist es, dass der wahrscheinlichste Prozess für beschleunigte Expansion - nämlich die Ausbildung von kompakten Materiestrukturen durch Umwandlung von Gravitationsenergien - von S. Perlmutter völlig unerwähnt bleibt. Er ist hier aber in guter Gesellschaft mit den beteiligten Gruppen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanzierten TransRegio Projekt TRR 33: **The Dark Universe**, welches von den Universitäten LMU München, Heidelberg und Bonn im Zeitraum 2006-2018 durchgeführt wurde und noch wird. Unter dem Oberbegriff *Origin of Dark Energy and Dark Matter*[10] liest man hier im theoretischen Teil unter anderem:

- A1: Quintessence, Branes and Higher Dimensions
- A2: Inflation and the origin of Dark Energy
- A3: Origin of Dark Energy and Dark Matter in String Theory

Der wichtige Begriff *Wechselwirkungen zwischen der Expansion und der Bildung großräumiger Strukturen* taucht nur in einem einzigen Projekt des TRR 33 auf - nämlich im astronomischen Teil B14: *Large-scale structure and Dark Energy*, wobei die Autoren nach einem diagnostischen Werkzeug suchen, die Modelle „Dark Energy“ und „Modified Gravity“ unterscheiden zu können. Ein weiteres wichtiges Problem der Kosmologie ist hier auch die Entstehung von „Black Holes“ in den Kernen von Galaxien, die in der Evolution des Kosmos als Kondensationskeime für Galaxien und Sternbildungen dienten.

Viele der obigen Forschungsprojekte werden ausschließlich vom *spekulativen Wunschdenken* einiger Elementarteilchenphysiker bestimmt. Geisteswissenschaftler sprechen in diesem Zusammenhang schon von einer stark

[10] Ohne Selbstreflexion wird hier die Existenz von Dark Matter alternativlos angenommen oder als Wunschdenken gepredigt

fortgeschrittenen *„metaphysischen Fiktionalisierung der Astrophysik“*. Ja, man hat den Eindruck, als ob sich die Kosmologie bei bestimmten Aspekten wie *Dark Energy* oder *Dark Matter* zu einer Art „Religion“ mit einer speziellen „Theologie“ verwandelt hat, die nicht mehr hinterfragt werden darf.[11].

Offensichtlich liebt es hier *homo sapiens sapiens* heiß und innig, im rücksichtslosen Wettstreit und Karrierekampf mit wissenschaftlichen Konkurrenten Semantik stark aufzublähen, das heißt physikalisch sehr fragwürdige und vielleicht völlig unnötige Dinge zu erfinden – und damit den Befehl des großen Meisters Wilhelm von Ockham[12] zu ignorieren, der da sprach: *Entia non sunt multiplicanda sine necessitate* („Entitäten sollen nicht unnötig vervielfacht werden“). Der Fluch dieser bösen Tat gebiert esoterischen Begriffe wie **Dunkle Materie** und **Dunkle Energie**, die angeblich wie *unsichtbare Dämonen* den Kosmos beherrschen sollen. Dabei nimmt man auch billigend in Kauf, dass eine theoretische Vorhersage für „Dunkle Energie“ um 120 Größenordnungen neben den Fakten liegt.

Im Gegensatz dazu wollen wir hier das Motiv von Isaac Newton befolgen: *Hypotheses non finguo*[13]. Dabei liegt die Betonung hier auf dem Wort **finguo**, also unnötige Hypothesen *„fingieren“*.([135])

[11] Der Theoretische Physiker und Nobelpreisträger Martinus J.G. Veltman sprach seine Meinung zur „Dark Matter“ unverblümt bei der Lindau - Nobel - Laureate Tagung 2012 über Kosmologie aus: „Er sei kein gläubiges Mitglied der *Church of the Dark Matter*“(nature-video)

[12] W. von Ockham, lebte bis 1347; Zahlreiche neuzeitliche Autoren, darunter Leibniz, zitieren das als „Ockhams Rasiermesser“ bekannte Prinzip in der Formulierung *Entia non sunt multiplicanda sine necessitate* („Entitäten sollen nicht unnötig vervielfacht werden“). Ockham ging es nicht um das Sein oder Nichtsein von Dingen, sondern um die Berechtigung von Aussagen. Er hat auch nicht den Begriff „Rasiermesser“ verwendet. Dem Naturphilosophen steht es nicht zu, etwas möglicherweise Seiendes mit der Begründung, es sei überflüssig, zu eliminieren. Wohl aber soll er bei seiner eigenen Tätigkeit, dem Formulieren von Aussagen, nicht mehr Annahmen einführen, als er tatsächlich benötigt. Wenn eine Aussage das Sparsamkeitsprinzip verletzt, folgt daraus nicht ihre Unwahrheit, sondern nur, dass sie dem Ziel wissenschaftlicher Erkenntnis nicht angemessen ist.

[13] Dieser Satz erscheint in der zweiten Ausgabe der Principia von 1713 im Zusammenhang mit der Frage, welches die Ursache der Gravitation sei. Damals wurden sehr spekulative Ideen diskutiert, die mit den späteren Einstein'schen Ideen nicht harmonieren und heutzutage unter dem Begriff *„Le Sage“ Gravitation* zusammengefasst werden (schon von Nicolas Fatio de Duillier, einem Freund Newtons, um 1695 vorgeschlagen). Selbst Richard Feynman hat sich noch 1965 mit diesen Ideen neu beschäftigt, um sie schließlich doch zu verwerfen

Anders gesagt wollen wir hier mehr dem *skeptischen Denken* folgen[14]. C. SAGAN formuliert hierfür in seinem Buch: *The Demon-Haunted World. Science as a Candle in the Dark*([171]) mindestens acht Punkte:

- Die Fakten müssen von unabhängiger Seite bestätigt werden.
- Man sollte eine stichhaltige Diskussion des Beweismaterials durch kenntnisreiche Vertreter aller Standpunkte herbeiführen.
- Autoritäre Argumente haben wenig Gewicht. „Autoritäten“ haben sich immer wieder geirrt und werden sich immer wieder irren. Aussagen von Wissenschaftsjournalisten wie: *Die meisten Forscher glauben...* sind völlig sinnlos, da Mehrheitsverhältnisse nicht über wissenschaftliche Wahrheiten entscheiden.
- Nach Möglichkeit mehr als eine Hypothese entwickeln, welche die Fakten erklären *könnten*. Auch an die Tests denken, durch welche systematisch die Möglichkeiten widerlegt werden *könnten*. Was nach einer solchen „Darwinschen Auslese“ noch übrigbleibt, hat bessere Chancen, die richtige Lösung zu sein, als sich mit der erstbesten Idee zu begnügen, die einem gefällt.
- Nicht allzu sehr nur an einer Hypothese hängen, nur weil sie von einem selbst stammt. Sie ist nur eine Zwischenstation auf dem Weg zum Wissen. Man sollte sich stets fragen, warum einem die eigene Idee so gut gefällt. Mit Alternativen fair vergleichen. Nach Gründen suchen, die eigene Idee abzulehnen oder zu widerlegen. Wenn man es selbst nicht tut, machen es andere.
- Man muss wenn möglich quantifizieren. Nur dann ist man in der Lage, zwischen konkurrierenden Hypothesen zu unterscheiden.
- Bei einer Argumentationskette muss *jedes* Glied funktionieren, einschließlich der Prämissen.
- Occams „Rasiermesser“. Wenn zwei Hypothesen die Fakten *gleich gut* erklären, müssen wir die einfachere vorziehen.

[14] Wohlweislich der Paradoxie: Der Skeptiker zweifelt an allem, außer an seiner eigenen Skepsis

- Hypothesen, die nicht überprüfbar sind, gehören nicht in das Gebiet der Naturwissenschaft.

Nicht überprüfbare Hypothesen sind nicht falsifizierbar (POPPER: Logik der Forschung). Dazu gehört zum Beispiel die Vorstellung, dass unser Universum ein Elementarteilchen ist oder noch unzählige andere Universen (Multiversum) existieren, von denen wir aber nie Informationen erhalten.

1.2 Defizit mathematischer Methoden, modifizierte Gravitation oder unsichtbare Materie?

Schon im 18. sowie im 19. Jahrhundert wurden Anomalien in der Bewegung von Himmelskörpern entdeckt, die man trotz weit entwickelter NEWTON'scher Mechanik nicht zwanglos erklären konnte. Dazu gehörte das Problem des säkularen Fortschreitens des *Mondperigäums*, welches selbst ein NEWTON 1687 in seiner berühmten *Principia Mathematica* nicht vollständig lösen konnte, dann die große Anomalie der mittleren Bewegung der Planeten Jupiter und Saturn, und ab 1830 die beunruhigenden Abweichungen der Uranusposition von der Newton'schen Theorie sowie das zu Ende des 19. Jahrhunderts sehr bohrende Problem der zu schnellen Präzision des Merkurperihels. Wir wollen hier diese vier recht unterschiedlichen historischen Krisen der Himmelsmechanik kurz diskutieren.

Die Mondbahn - Krise: Im 11. Abschnitt seiner *Principia* konnte I. NEWTON zeigen, daß zwei Körper der Massen m_1 und m_2, die sich mit der Kraft $F \propto m_1\, m_2/r^2$ anziehen, sich in KEPLER'schen – Ellipsen umeinander bewegen müssen. Für NEWTON war dies aber noch kein hinreichender Beweis für die *universelle Gültigkeit des so formulierten Gravitationsgesetzes*. Da gab es ja noch den Erdmond, der , wie J. KEPLER schon feststellte, sich keineswegs einfach in einer Ellipsenbahn bewegt. Die Bewegungsgleichung für den geozentrischen Ortsvektor des Mondes $\mathbf{r}$ im rotierenden Erde-Sonne System lautet nämlich in der niedrigsten

Approximation (*Hillsche Näherung*) in der x-y Ebene (Ekliptikebene)

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\,\mathbf{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 3\,\Omega^2\,\mathbf{r}_x - G\,(m_1 + m_2)\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

mit der Umlauffrequenz der Erde um die Sonne (Tropisches Jahr)

$$\Omega^2 = \frac{G\,(M + m_1 + m_2)}{|\mathbf{s}|^3}.$$

Die Mondbahn ist in dieser niedrigsten Approximation keine klassische Ellipsenbahn mehr. I. NEWTON ahnte dies natürlich und es gelang ihm, durch Einführung der Zahl

$$\mu = \frac{27.32158}{365.242199} \approx 0.074804 \tag{1.7}$$

welche das Verhältnis des tropischen Monats zum tropischem Jahr darstellt (Frühlingspunkt zu Frühlingspunkt) und dessen Quadrat die Stärke der Sonnenstörungen repräsentiert, alle zu seiner Zeit bekannten Anomalien der Mondbewegung zu erklären. Alle – bis auf die Präzession des Mondperigäums, die um einen Faktor 2 zu klein herauskam. NEWTON erhielt für die Umlaufperiode der Apsidenlinie des Mondes den theoretischen Wert von 17.8 Jahren, während der beobachtete Wert bei etwa 8.85 Jahren lag. Schon seit dem Altertum kennt man sehr genau die Unterschiede zwischen dem tropischen Monat (Frühlingspunkt zu Frühlingspunkt) $T_0 = 27.321$ Tagen, dem anomalistischem Monat (Perigäum zu Perigäum) $T_a = 27.554$ Tagen und dem drakonitischen Monat (Knoten zu Knoten) $T_d = 27.212$ Tagen. NEWTON erhielt die beiden Resultate

$$\begin{aligned} T_d &= T_0\,\left(1 - \frac{3}{4}\,\mu^2 + \ldots\right) \\ T_a &= T_0\,\left(1 + \frac{3}{4}\,\mu^2 + \ldots\right) \end{aligned} \tag{1.8}$$

Die erste Formel liefert gute Resultate, die zweite dagegen ist unbefriedigend, denn sie ergibt nur etwa den halben Wert. NEWTON war über diese Diskrepanz von T_a so bestürzt, dass er ernsthaft an seinem Gravitationsgesetz zweifelte. Hat man ganz allgemein ein kugelsymmetrisches anziehendes Gravitationspotential $\mathbf{V}(r)$ vorgegeben und es existiert ein innerer und äußerer radialer Umkehrpunkt r_1 sowie r_2, so erhält

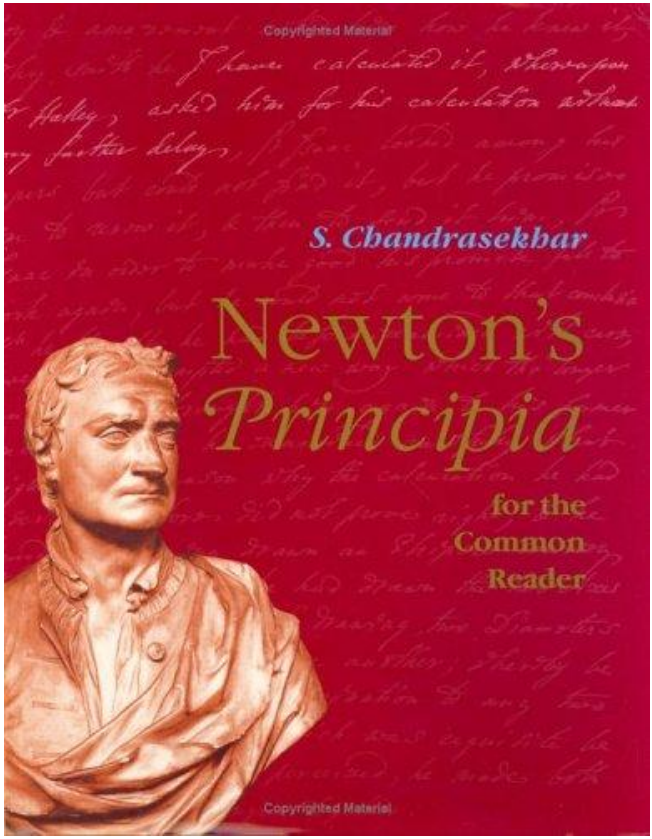


Fig. 1.4: *Das Bild zeigt den Titeleinband der Neuübersetzung von Newton's Principia nach S. Chandrasekhar. Da I. Newton die Absidenbewegung des Mondes nicht befriedigend erklären konnte, versuchte er ernsthaft, bei seinem schönen Gravitationsgesetz den Exponenten $n = 2$ auf $n = 2 + 4/243$ zu erhöhen. Erst 50 Jahre später konnte dieses Problem durch neue mathematische Methoden im Dreikörperproblem und $n = 2$ geklärt werden. Diese historische Entwicklung wird sehr schön im vierbändigen Meisterwerk "Traite de Mecaniqué celésté" von F.F. Tisserand aus den Jahren 1889-1896 geschildert, fast hundert Jahre nach dem gleichnamigen Werk von P.S. Laplace*

.

man in Polarkoordinaten $r(\varphi)$ die Bahnkurve aus dem Differential (siehe Tisserand, Band I, Seite 46)([202])

$$d\varphi = \pm \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)\left(\frac{\mathbf{V}(r) - \mathbf{V}(r_1)}{\mathbf{V}(r_2) - \mathbf{V}(r_1)}\right) - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)}}. \qquad (1.9)$$

Für den Spezialfall $\mathbf{V}(r) \propto r^{n+1}$ folgt aus dem obigen Differential für den doppelten Bahnbogen zwischen den Umkehrpunkten r_1 nach r_2 die Entwicklung

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{n+3}}\left(1 + \frac{1}{24}(n-1)(n+2)\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}\right)^2 - \ldots\right) \qquad (1.10)$$

Von NEWTON stammt der Vorfaktor in der obigen Formel. Er setzte nun anstatt $n = -2$, was für den Bahnbogen $\Delta\varphi = 2\pi$ ergibt – also keine Periheldrehung – den Exponenten $n = -(2+4/243)$, der dann die schnellere Apsidendrehung des Mondes *beschreiben*, aber *nicht erklären* konnte!

Doch wirklich geglaubt hat I.NEWTON an dieses *„unschön" modifizierte Gravitationsgesetz* wohl nict! CLAIRAUT konnte 1752 durch Berücksichtigung zusätzlicher *nichtlinearer Störterme wie Evektion und Variation* die Unstimmigkeiten zwischen Theorie und Beobachtung erklären. Auf Vorschlag von L. EULER erhielt er dafür den Preis der Petersburger Akademie. Für EULER selber war dies der Anlass, 1753 seine erste Mondtheorie *Theoria motus lunae* zu veröffentlichen und hierin das Newton'sche Problem der Apsidendrehung des Mondes ganz im Rahmen des „schönen Newton'schen" $1/r^2$ Gesetzes zu erklären.

Die beiden wichtigen Standarwerke "Traite de Mecaniqué celésté" von P.S. LAPLACE und F. TISSERAND aus den Jahren 1799 - 1825 und 1889-1896 erfahren erst heutzutage in der „Kosmologie" („Mechanik des Universums") ihre eigentlich physikalische Vollendung. In der Astronomie des 19. Jahrhunderts ging es ja ausschließlich um die Bewegung der Planeten und Kometen um die Sonne und ihren gegenseitigen Störungen – also noch nicht um die Dynamik des Universums als Ganzes („Mechanik des Himmels"). Ja, noch nicht einmal die Dynamik von Galaxien und ihren Strukturen war damals bekannt, geschweige die der eigenen Galaxis.

Die Jupiter - Saturn - Krise: Schon J. KEPLER hatte entdeckt, daß die scheinbaren Bewegungen von Jupiter und Saturn nicht genau nach seinen Gesetzen folgten. Genauer haben dann J. HORROCKS (1618-1641) und 1676 E. HALLEY durch Vergleich alter antiker und neuerer Beobachtungen darauf hingewiesen, dass über lange Zeiträume die mittlere tägliche Bewegung von Jupiter zunimmt, die von Saturn dagegen abnimmt. Astrometrisch wirkte sich dieser Effekt aus, indem Jupiter vor und Saturn hinter der berechneten Position am Himmel stand. E. HALLEY vermutete dahinter die gegenseitigen gravitativen Störungen der beiden Riesenplaneten, wobei die Differenz zwei Grad und mehr am Himmel betragen konnte. Das Phänomen schien anzudeuten, dass die eine Bahnhalbachse sich mit den Jahrhunderten immer weiter vergrößert (Jupiter wurde *scheinbar* in seiner Bahn beschleunigt), die andere aber immer weiter verkleinert (Saturn wurde *scheinbar* in seiner Bahn abgebremst) (siehe Fig. (1.5)). Dies war mit dem Newton'schen Gravitationsgesetz eigentlich nicht direkt erklärbar - ja, schien dem sogar zu widersprechen. Man nannte diesen unerklärlichen Effekt *„Die große Ungleichheit (Anomalie)"* der beiden Planeten. Das Thema war Gegenstand von zwei Preisaufgaben der Akademie der Wissenschaften zu Paris in den Jahren 1748 , 1750 und 1752. L. EULER hatte zwar die Preise 1748 und 1752 gewonnen, doch seine Berechnungen konnten nicht die Umkehrung der großen Ungleichheit im Jahre 1560 erklären. Die mathematischen Hilfsmittel auf der Grundlage des Gravitationsgesetzes waren noch nicht zur Reife entwickelt. Nach Vorarbeiten von I. NEWTON, L. EULER, J. LAMBERT, CLAIRAUT, J. LALANDE und L. LAGRANGE gelang es erst 1784 P.S. LAPLACE [15] durch eine Störungstheorie höherer Ordnung die wechselseitige Bedingtheit des Phänomens zu erklären. Mathematisch bestand das Problem darin, die beiden gekoppelten vektoriellen Bewegungsgleichungen für den Jupiter

$$\frac{d^2\mathbf{r}_J}{dt^2} = -G\,(M+m_J)\frac{\mathbf{r}_J}{|\mathbf{r}_J|^3} + G\,m_S\left(\frac{\mathbf{r}_S-\mathbf{r}_J}{|\mathbf{r}_S-\mathbf{r}_J|^3} - \frac{\mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_S|^3}\right)$$

und für den Saturn

$$\frac{d^2\mathbf{r}_S}{dt^2} = -G\,(M+m_S)\frac{\mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_S|^3} + G\,m_J\left(\frac{\mathbf{r}_J-\mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_J-\mathbf{r}_S|^3} - \frac{\mathbf{r}_J}{|\mathbf{r}_J|^3}\right)$$

so zu zerlegen, daß man die zeitliche Wirkung der periodischen Störterme proportional $G\,m_J$ und $G\,m_S$ über Jahrhunderte genau abschätzen

[15] also 100 Jahre nach der *Principia*

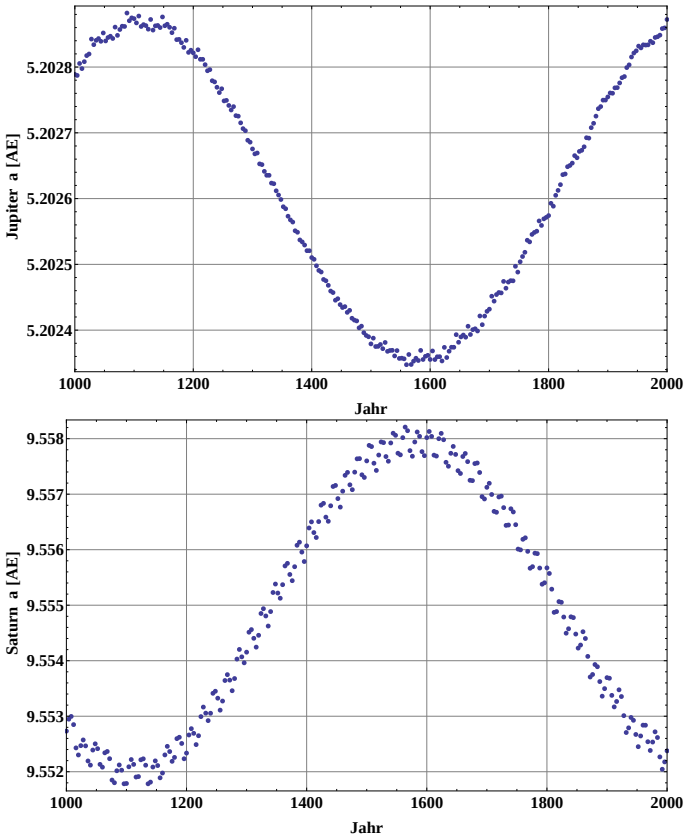


Fig. 1.5: *Die säkularen Änderungen der großen Halbachsen der Planeten Jupiter (obere Grafik) und Saturn (untere Grafik) in den letzten 1000 Jahren. Die von Jahr zu Jahr stark oszillierenden Daten der numerischen Integration wurden zwecks Glättung über eine Zeitspanne von 60 Jahren (genäherte 5:2 Resonanz) gefaltet. Im 18. Jahrhundert wurden diese Schwankungen einfach* ***„Die Große Ungleichheit“*** *der beiden Riesenplaneten genannt. Erst P.S. DE LAPLACE konnte dieses Phänomen 1784 auf der Grundlage der Newtonschen Theorie vollständig erklären. (Eigene Simulation des Verfassers)*

konnte. Die einfachen Keplerschen Gesetze, die man noch in Tafeln bis 1780 benutzt hatte, reichten nun nicht mehr aus. Die Lösung gelang LAPLACE durch eine hinreichend genaue Entwicklung der Störbeschleunigung nach *Fourierreihen* der mittleren Bewegungen der beiden großen Planeten. Die große Anomalie ist so Folge einer sehr langperiodischen Gravitationsstörung von etwa ≈ 900 Jahren . Das Phänomen entsteht durch die fast perfekte *5:2 Resonanz* der mittleren Umlauffrequenzen der beiden Planeten um die Sonne.[16] Sehr schön beschrieben hat dies zuletzt die schottische Schriftstellerin und Mathematikerin MARY SOMERVILLE (1780-1872) in ihrem Buch - Bestseller *On the Connection of the Physical Sciences* aus dem Jahre 1834, welches viele Auflage erlebte ([196]).

Es waren also auch hier wieder mathematische Schwierigkeiten in den gekoppelten nichtlinearen Bewegungsgleichungen, die eine rasche Lösung dieses *kosmischen Paradoxons* verhinderten. NEWTON glaubte noch, dass ein Gott in das dynamische Geschehen eingreifen müsse, doch nach 100 Jahren konnte LAPLACE ruhig aussprechen, dass er dieser Hypothese nicht mehr bedürfe. Kosmologisch gesehen ist somit das Sonne - Jupiter - Saturn System für sehr lange Zeiten stabil, was für die damalige Zeit ein sehr wichtiges Resultat der *neuen analytischen Methoden* darstellte.

Die Uranus - Krise: Zu Beginn des 19. Jahrhunderts entstand fast schleichend ein neues Problem der dynamischen Astronomie, welches sich mit den bekannten Gesetzen nicht erklären ließ: Die Bewegung des Planeten Uranus im äußeren Sonnensystem. Spätestens ab 1830 wurde immer deutlicher, dass der Planet Uranus nach Berücksichtigung aller bekannten Störungen anderer Planeten nicht dem Newton'schen Gravitationsgesetz gehorchte. Der britische Astronom G.B. AIRY stellte zudem fest, dass neben den Abweichungen in der heliozentrischen Länge auch der Radiusvektor des Uranus im Laufe der 1830er Jahre um mindestens $0.005 AU$ von seiner Sollbahn nach außen abwich. Spekuliert wurde nun über einen „Dunklen Planeten" außerhalb von Uranus – aber auch über die Möglichkeit, dass in dieser großen Entfernung zur Sonne vielleicht Abweichungen vom Gravitationsgesetz auftreten. Auch die Möglichkeit von „exotischer Materie", aus welchem der Uranus bestehen könnte, wurde diskutiert. Alle Spekulationen fanden aber im September 1846 ein

[16] „Über die Theorie der Jupiters - und Saturns - Bahnen", von dem Kanzler des französischen Senats, LAPLACE, Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd - und Himmelskunde **10**, pp. 449-463, (1804)

jähes Ende, nachdem die Astronomen J.G. GALLE und H. DE ARREST in Berlin den neuen Planeten Neptun nur ein Grad von der Position entdeckten, die ihnen zuvor der französische Astronom U. LEVERRIER als Ergebnis umfangreicher Rechnungen einer inversen Störungstheorie mitgeteilt hatte. Mathematisch besteht das Problem darin, aus der Bewegungsgleichung von Uranus

$$\frac{d^2\mathbf{r}_U}{dt^2} = -G\,(M+m_U)\frac{\mathbf{r}_U}{|\mathbf{r}_U|^3} + G\,m_N\left(\frac{\mathbf{r}_N-\mathbf{r}_U}{|\mathbf{r}_N-\mathbf{r}_U|^3} - \frac{\mathbf{r}_N}{|\mathbf{r}_N|^3}\right)$$

und den Abweichungen von der Keplerbahn auf den Positionsvektor $\mathbf{r}_N$ des unbekannten Planeten Neptun zu schließen. Ein scheinbar unmögliches Unterfangen mit vielen Unbekannten und Hypothesen. Das Gelingen dieser Aufgabe kann mit Recht als ein Triumph der Newton'schen Gravitationstheorie angesehen werden, der so in der Geschichte einmalig dasteht.

Die Merkur - Krise: Ein völlig anders gelagertes Problem der klassischen *Himmelsmechanik* entstand gegen Ende des 19. Jahrhunderts, als man feststellte, dass der Wert der Periheldrehung des Merkur fast 10% größer war als derjenige, den man durch die gravitativen Störungen der anderen Planeten erwartete. Beobachtet wurde eine Apsidendrehung der Merkurbahn von etwa 532 Bogensekunden pro Jahrhundert. Der französische Himmelsmechaniker U. LE VERRIER konnte Mitte des 19. Jahrhunderts zeigen, dass die Newton'sche Gravitation diesen Wert bis auf 35 Bogensekunden pro Jahrhundert erklären kann. U. LE VERRIER, der geistige Entdecker des Planeten Neptun, war damals überzeugt, dass ein weiterer Planet innerhalb von Merkur existieren müsse (*„Vulkan"*), um diese kleine Diskrepanz zu erklären. Doch er suchte und wartete bis zu seinem Tode vergebens...

Im Jahre 1882 hatte der amerikanische Astronom S. NEWCOMB (1835 - 1909) alle Störungen der Planeten neu berechnet und gefunden, dass die unerklärliche Diskrepanz sogar 43 Bogensekunden pro Jahrhundert betragen muss. Er schlug vor, dass kleine Staubteilchen („Zodiakallicht") in der Ekliptikebene zwischen Erde und Merkur diese Apsidendrehung erklären könnten. Doch sein recht kompliziertes „ *Dunkles Materiemodell*" erzeugte auch zusätzliche Bahnstörungen, die man bei der Venus oder Merkur nicht beobachten konnte. Schließlich zweifelte S. NEWCOMB[17]

[17] S. Newcomb ist heutzutage auch bekannt für die Entdeckung des Bendford'schen

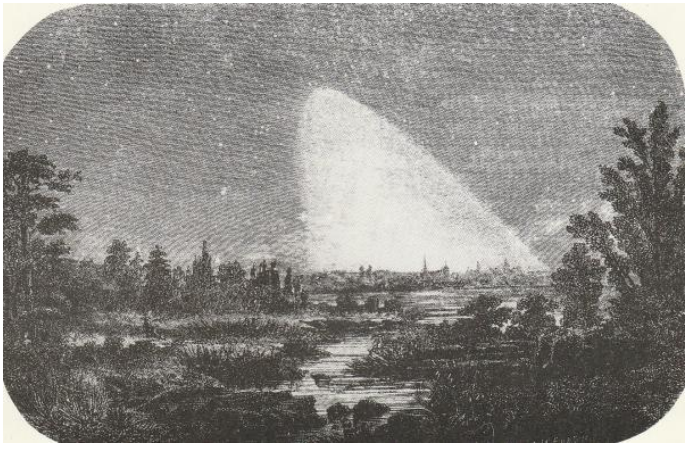


Fig. 1.6: *Das schwache Zodiakallicht bei Sonnenuntergang, visuell beobachtet von* Eduard Heis *(1806-1877) in Münster um 1860*

1895 am Newton'schen Gravitationsgesetz... In der Zwischenzeit hatte auch schon 1884 J. Bauschinger (1860-1934) unter der Leitung von Seeliger eine Dissertation mit dem Titel: *Untersuchungen über die Bewegung des Planeten Merkur* in München abgefasst. Hierin beschäftigte er sich auch mit der Hypothese eines „*Planetoidenringes*" zwischen Sonne und Merkur ([8]). Dies war wohl auch ein Anliegen von Seeliger, denn im Jahre 1896 veröffentlichte dieser ein neues *ellipsoidisches* Scheiben - Halo - Modell dunkler Staubteilchen, welches die unerwünschten Nebeneffekte in den Planetenbahnen nicht zeigte und von den meisten Astronomen akzeptiert wurde ([184]). Selbst S. Newcomb glaubte nun nicht mehr an eine modifizierte Newton'sche Gravitation, sondern zog das Seeligersche ellipsoidische Halomodell seinem eigenen Ringmodell vor.

Im Jahre 1915, als A. Einstein seine sehr kurze Rechnung zur Erklärung der anomalen säkularen Bewegung des Merkurperihels von 43 Bogensekunden pro Jahrhundert fand, galt sie bei den meisten Astronomen *überhaupt nicht mehr als eine Anomalie.* Kurz bevor A. Einstein

Gesetzes, weil er bemerkte, dass bei Logarithmentafeln die Seiten mit den Anfangsziffern 1 und 2 gegenüber den anderen Seiten wesentlich abgenutzter waren. *Note on the Frequency of the Use of different Digits in Natural Numbers.* Amer. J. Math.**4**, 39 - 40, Baltimore, 1881

seine Erklärung veröffentlichte, hatte schon E. FREUNDLICH eine ausführliche Kritik aller bisherigen Erklärungen gegeben und insbesondere auch die Erklärung von SEELIGER als unwahrscheinlich eingestuft ([58]) [18] . SEELIGER reagierte auf verschiedene Kritiken von E. FREUNDLICH sehr scharf ([186]). A. EINSTEIN hat diese Perihel - Anomalie ein Jahr später neu geschaffen, um das *„dunkle Materie - Halo - Modell“* von SEELIGER als sehr unwahrscheinlich hinzustellen. SEELIGER hat sich noch einen Tag vor seinem Tode am 2.12.1924 mit dem Problem der anomalen säkularen Bewegung des Merkurperihels auf der Grundlage seines ellipsoidischen Halomodelles beschäftigt - das elegante Resultat von A. EINSTEIN ohne die *erfundene dunkle Materie* konnte oder wollte einfach nicht glauben.[19]

Mathematisch ist die Bahntheorie sowohl von NEWTON als auch von EINSTEIN äußerst elegant. Nach NEWTON ist die ungestörte Planetenbahn in Polarkoordinaten durch das Differential

$$d\varphi = \pm \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)}} \tag{1.11}$$

gegeben, wobei r_1 die Periheldistanz, r_2 die Apheldistanz des Planeten von der Sonne bezeichnen. Die Lösung $r[\varphi]$ ist eine Kepler - Ellipse in der Form

$$\boxed{\frac{1}{r[\varphi]} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\cos[\varphi]} \tag{1.12}$$

A. EINSTEIN lies sich von dem Gedanken der Äquivalenz von schwerer und träger Masse leiten. Er suchte mit Hilfe des starken Äquivalenzprinzips

> *In einem Gravitationsfeld kann an jedem Weltpunkt ein lokales Inertialsystem gewählt werden, indem die physikalischen Gesetze der SRT gelten*

[18] E. Freundlich schreibt in seiner Arbeit: „... *gelangt H. Seeliger aufgrund einer umfangreichen Untersuchung zu dem Resultat, daß man über die Dichte der Zodiakalmasse solche Annahmen machen kann, daß die Restglieder im Planetensystem verschwinden. Seine Erklärung hat fast überall Eingang gefunden...*

[19] E. Grossmann: Nachruf auf Seeliger: AN **223**, Nr. 5347, pp. 298-304, (1925)

nach den verallgemeinerten *Lorentztransformationen* für beschleunigte Systeme, was nur möglich ist, wenn man auf Nicht - Euklidische Metriken der Raum - Zeit zurückgreift. EINSTEIN benötigte hier dringend die Riemannsche Geometrie, dessen Grundzüge BERNHARD RIEMANN (1826-1866) in seiner Habilitationsschrift aus dem Jahre 1854 entworfen hat ([162]). EINSTEIN musste nun die Lorentztransformation auf eine *Lorentzmetrik* der Form

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i\, dx_j$$

erweitern. Die Größen g_{ij} bilden den *Riemannschen Fundamentaltensor*. Ohne Gravitationsfelder würde dann

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

gelten. Vektoren mit $ds^2 > 0$ heißen *zeitartig*, Vektoren mit $ds^2 = 0$ heißen *lichtartig*. Die Bogenlänge s der *Lorentzmetrik* übernimmt hier die Rolle einer *Eigenzeit*. Die Bewegungsgleichung wird zu einer Geodätengleichung

$$\frac{d^2\, x_k}{d\, s^2} = -\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}\, \frac{d\, x_i}{d\, s}\, \frac{d\, x_j}{d\, s}$$

Die Christoffelsymbole $\Gamma^k_{i,j}$ müssen in Analogie zu NEWTON dem allgemeinen Gravitationsfeld entsprechen. Wie bei NEWTON ergeben sich diese als Ableitung von den verallgemeinerten „*Potentialen*“ $g_{i,j}$ durch die LEVI - CIVITA Gleichung

$$\Gamma^\ell_{i,j} = \sum_k \frac{1}{2}\, g^{k,\ell}\, (-g_{i,j,k} + g_{j,k,i} + g_{k,i,j})$$

Da die Massendichte nicht Lorentzinvariant ist, konstruierte EINSTEIN eine divergenzfreie quadratische Form - den *Energie - Impuls - Tensor* T_{ij}. Die linke Seite der POISSON Gleichung in Newton's Gravitationstheorie wird ersetzt durch den *Krümmungstensor* R_{ij}, der *analog* durch zweite Ableitungen nach den „Potentialen“$g_{i,j}$ gegeben ist. Durch diese komplizierten Überlegungen gelangte EINSTEIN zu seiner endgültigen Feldgleichung

$$\mathbf{R}_{ij} - \frac{1}{2}\, g_{ij}\, \mathbf{R} = \frac{8\pi\, G}{c^4}\, \mathbf{T}_{ij},$$

Auf der linken Seite dieser verallgemeinerten *Poissongleichung* steht nun der sogenannte *Einstein - Tensor*, der sich aus dem Krümmungstensor zusammensetzt und eine divergenzfreie quadratische Form darstellt (Lorentz-Invarianz).

Die einfachste Lösung dieser Feldgleichung für eine nicht-rotierende Masse ist die von K. SCHWARZSCHILD (1873-1916) im Jahre 1916 gefundene kugelsymmetrische *Metrik* ([180])

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_S}{r}} - r^2 d\omega^2,$$

wobei

$$r_S = \frac{2\,G\,M}{c^2} \tag{1.13}$$

den Schwarzschildradius und $d\omega$ das infinitesimale Winkelelement der Kugel bezeichnen. Eine Planetenbahn ist in dieser Metrik eine *zeitartige* Geodäte, welche dem Differential

$$d\varphi = \pm \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\left(1 - \frac{r_S}{r_1} - \frac{r_S}{r_2} - \frac{r_S}{r}\right)}}, \tag{1.14}$$

gehorcht. Die exakte Lösung für den inversen Bahnradius r_S/r als Funktion des planaren Bahnwinkels φ ist die Weierstraß'sche elliptische Funktion $\wp[\varphi/2; g_2, g_3]$ in der Form (siehe A.9)

$$\boxed{\frac{r_S}{r} = \frac{1}{3} + \wp\left[\frac{\varphi}{2} + \omega_1 + \omega_2;\ g_2, g_3\right],} \tag{1.15}$$

wobei g_2 und g_3 spezielle elliptische Invarianten bedeuten, die durch *Eisenstein'sche Reihen* auf dem Periodengitter in der komplexen Zahlenebene berechnet werden können. Die reelle und imaginäre *Halbperiode* ω_1 und ω_2 sind durch ($\imath^2 = -1$)

$$\omega_1 = \frac{\pi/2}{\mathbf{M}[\sqrt{e_1 - e_3}, \sqrt{e_1 - e_2}]}, \qquad \omega_2 = \frac{\imath\,\pi/2}{\mathbf{M}[\sqrt{e_1 - e_3}, \sqrt{e_2 - e_3}]}$$

gegeben, wobei ganz allgemein $\mathbf{M}[a,b]$ das *arithmetisch - geometrische* Mittel der Zahlen a und b bedeutet. $e_1 > e_2 > e_3$ sind die charakteristischen Wurzeln der elliptischen Funktion und lauten in unserem physikalischen Spezialfall

$$e_1 = +\frac{2}{3} - \frac{r_S}{r_1} - \frac{r_S}{r_2}, \qquad e_2 = -\frac{1}{3} + \frac{r_S}{r_1}, \qquad e_3 = -\frac{1}{3} + \frac{r_S}{r_2}.$$

Damit gelten für die beiden Halbperioden ($r_2 > r_1$)

$$\omega_1 = \frac{\pi/2}{\mathbf{M}\left[\sqrt{1 - \frac{r_S}{r_1} - 2\frac{r_S}{r_2}},\ \sqrt{1 - 2\frac{r_S}{r_1} - \frac{r_S}{r_2}}\right]},$$
$$\omega_2 = \frac{\imath\,\pi/2}{\mathbf{M}\left[\sqrt{1 - \frac{r_S}{r_1} - 2\frac{r_S}{r_2}},\ \sqrt{\frac{r_S}{r_1} - \frac{r_S}{r_2}}\right]}.$$

Da das Argument der Weierstraß'schen $\wp$-Funktion $\varphi/2$ ist, ist ein voller Umlauf von Perihel zu Perihel im Bogenmaß $4\,\omega_1$. Für die anomale Apsidendrehung *pro Umlauf* ergibt sich so zunächst die exakte Formel

$$\Delta\varphi + 2\,\pi = \frac{2\pi}{\mathbf{M}\left[\sqrt{1 - \frac{r_S}{r_1} - 2\frac{r_S}{r_2}},\ \sqrt{1 - 2\frac{r_S}{r_1} - \frac{r_S}{r_2}}\right]}. \tag{1.16}$$

Beim Merkur ist nun r_1 und r_2 wesentlich größer als der Schwarzschildradius r_S, so daß man den obigen Ausdruck nach r_S in eine Taylorreihe entwickeln kann. Man erhält so in erster Ordnung

$$\Delta\varphi = \frac{3\,\pi}{2}\left(\frac{r_S}{r_1} + \frac{r_S}{r_2}\right). \tag{1.17}$$

Dies ist eine Variante der berühmten Einstein - Formel vom 18. November 1915, mit der die Periheldrehung des Planeten Merkur *ohne irgendeine erfundene Materie* erklärbar wird. Wir wollen hier die numerische Rechnung von EINSTEIN wiederholen und setzen mit den heutigen Daten

$$r_S = \frac{2\,G\,M_\odot}{c^2} = \mathbf{2953.26}\,[m]$$

Für die Merkurbahn gilt

$$r_1 = \mathbf{4.60013}\ \times\ \mathbf{10^{10}}\,[m];\quad r_2 = \mathbf{6.98171}\ \times\ \mathbf{10^{10}}\,[m]$$

Mit diesen Daten folgt sofort für die Periheldrehung

$$\Delta\varphi = \mathbf{0.10352}\ \text{Bogensekunden/Umlauf}$$

oder mit $T_M = 87.969$ Tagen Umlaufzeit des Merkurs

$$\Delta\varphi = \mathbf{42.98}\ \text{Bogensekunden/Jahrhundert}$$

Und dies ist genau der überschüssige Zahlenwert, der nicht durch Gravitationsstörungen der anderen Planeten erklärt werden kann[20]. Mit Hilfe der *Helioseismologie* weiß man heute, dass eine innere Abplattung der Sonne nicht nachweisbar ist und somit die Erklärung nach A. EINSTEIN für die anomale säkulare Drehung des Merkurperihels sehr überzeugend und bis heute die Beste und Schönste geblieben ist.([58])

In der teilweise polemischen und diffamierenden Debatte, die nach der Entdeckung folgte und von dem zwielichten PAUL WEYLAND (1888-1972) angeführt wurde, machte A. EINSTEIN im Berliner Tageblatt vom 27. August 1920 die folgenden bissig - schönen Bemerkungen ([41]):

> *Herr Gehrcke[21] will glauben machen, daß die Perihelbewegung des Merkur auch ohne Relativitätstheorie zu erklären sei. Es gibt da zwei Möglichkeiten. Entweder man erfindet besondere interplanetare Massen. ... Oder aber man beruft sich auf eine Arbeit von Gerber, der die richtige Formel für die Perihelbewegung des Merkur bereits vor mir angegeben hat. Aber die Fachleute sind nicht nur darüber einig, daß Gerbers Ableitung durch und durch unrichtig ist, sondern die Formel ist als Konsequenz der von Gerber an die Spitze gestellten Annahmen überhaupt nicht zu gewinnen. Herrn Gerbers Arbeit ist daher völlig wertlos, ein missglückter und irreparabler theoretischer Versuch. Ich konstatiere, daß die allgemeine Relativitätstheorie die erste wirkliche Erklärung für die Perihelbewegung des Merkur geliefert hat. Ich habe die Gerbersche Arbeit ursprünglich schon deshalb nicht erwähnt, weil ich sie nicht kannte, als ich meine Arbeit über die Perihelbewegung des Merkur schrieb; ich hätte aber auch keinen Anlass gehabt, sie zu erwähnen, wenn ich von ihr Kenntnis gehabt hätte.*

[20] Sein Biograph ABRAHAM PAIS meinte dazu: *Diese Entdeckung war, glaube ich, bei weitem die stärkste emotionale Erfahrung in Einsteins wissenschaftlichem Leben, vielleicht in seinem ganzen Leben überhaupt. Die Natur hatte zu ihm gesprochen.*

[21] E. J. Gehrke (1878-1960), Physiker und Antirelativist

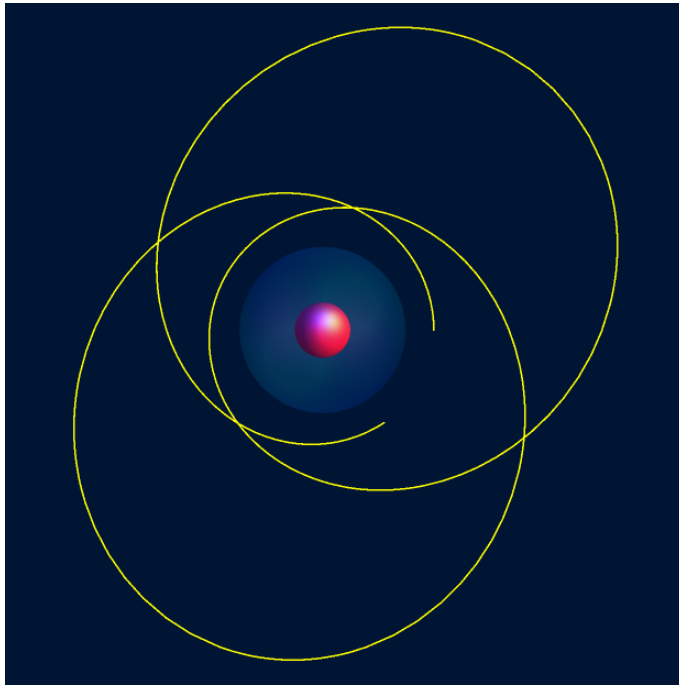


Fig. 1.7: *Starke Apsidendrehung (Periheldrehung) in der Nähe eines „Schwarzen Loches“. Der Radius der inneren Kugel ist r_S, die diffuse Hülle hat den Radius $3\,r_S$. Innerhalb dieser Region sind alle Kreisbahnen instabil. Die gelbe Linie zeigt einen zweifachen Bahnumlauf eines Teilchens um das Zentrum mit $r_1 = 4\,r_S$ und $r_2 = 12\,r_S$. Die Periheldrehung $4\,\omega_1 - 2\pi$ beträgt in diesem Fall* **151.8** *Grad pro Umlauf.*

Besonders schön ist hier die Bemerkung von A. Einstein: *... entweder man erfindet besondere interplanetare Massen ... oder aber man beruft sich auf eine Arbeit von Gerber ...*[22] Die Arbeit von Gerber stand am Ende einer Theorie - Sackgasse, die Gravitation im Rahmen einer

[22] Carl Ludwig Paul Gerber (1854-1909). Lehrer am Realgymnasium in Stargard in Pommern. Wurde bekannt durch eine kontrovers diskutierte Theorie der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation und einer 1898 veröffentlichten Formel zur Periheldrehung des Merkurs, die mit der Einstein'schen praktisch identisch war, dessen Herleitung und Erweiterungen zu Widersprüchen führen.

raum-zeitlichen Feldtheorie zu verstehen. Schon LAPLACE hatte Modelle betrachtet, in denen die Gravitation „wellenartig“ von einem Körper zum anderen Körper übertragen wird und dabei auch Berechnungen zur sogenannten **Gravitations-Aberration** angestellt. Die Rechnungen führten aber bei endlicher Übertragungsgeschwindigkeit zu säkular instabilen Planetenbahnen, so dass LAPLACE zur Annahme einer unendlich großen Übertragungsgeschwindigkeit gezwungen war ([103]). Die paradoxe Situation konnte erst durch die lorentzinvariante allgemeine Relativitätstheorie von EINSTEIN aufgelöst werden, bei der die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation die Lichtgeschwindigkeit c ist. Es tritt in dieser Theorie keine *Gravitations-Aberration* im Sinne von LAPLACE mehr auf, weil durch Anteile des Gravitationsfeldes *bewegter Körper* der Effekt fast vollständig kompensiert wird. Planetenbahnen sind nur noch marginal in der Größenordnung $(v/c)^5$ säkular instabil, was mit der Abstrahlung von Gravitationswellen einher geht ([18]).

Es gibt ironischerweise auch eine historische Analogie zur theoretischen Arbeit über die Merkurbahn von C.L.P. GERBER: die **mo**difizierte **N**ewton'sche **D**ynamik nach M. MILGROM und J.D. BEKENSTEIN. Wie GERBER eine modifizierte Newton'sche Dynamik mit einem von der Geschwindigkeit abhängigen Potential postulierte, so modifizieren „ad hoc“ MILGROM - BEKENSTEIN den Newton'schen Impulssatz bei extrem kleinen Beschleunigungen. Mathematisch ist aber beides sehr *“hässlich”*. Der Autor selber ist aber überzeugt, daß die eigentliche Lösung dieser Fragen innerhalb der Einstein'schen Gravitationstheorie gesucht werden muss. Zum Beispiel kann man bis heute die Einstein'sche Gravitationstheorie *nicht überzeugend für ein stark heterogenes Vielteilchensystem (*10^{12} *Kerr - Black Holes) konsistent lösen.* Die Einsteinsche Gravitationstheorie ist im eigentliche Sinne eine *lokale Theorie*. Sie kann zum Beispiel keine Aussagen über das endliche Volumen oder die eigentliche Topologie eines zugrunde liegenden euklidischen oder hyperbolischen Raumes machen. Hier spielt auch die Frage der Gesamtenergie des Universums eine Rolle. Auch hier können die Feldgleichungen keine unmittelbare Antwort geben. Sollten aber diese Gleichungen aber das letzte Wort in einer klassischen Theorie zur Gravitation sein, müssen wir die Anomalien in den Bewegungen auf „*Dunkle Materie*“ zurückführen.

Heutige Krise: Wie hätte Einstein reagiert, wenn er noch erlebt hätte, wie 50 Jahre nach seinem Tod ohne Bedenken exotische Materie - ob

dunkel-heiß oder dunkel-kalt - am laufenden Band „erfunden“ wird? Denn heute hat sich die Situation in der Astrophysik massiv zugespitzt: Das Universum muss aufgrund von Beobachtungen zu einem erheblichen Teil aus **„Dunkler Materie“** und **„Dunkler Energie“** bestehen; die eigentlich normale *baryonische* Materie soll nur noch etwa vier Prozent im Universum ausmachen. Die amerikanische Astronomin V.C. Rubin (1928-2016), die unter anderen Astronomen ab 1970 entdeckte, daß alle Galaxien zumindest in unserer engeren Umgebung eine konstante Rotationsgeschwindigkeiten in ihren Außenbereichen zeigen und so scheinbar der Newtonschen Gravitation widersprechen, bemerkte zu dem Problem der „Dunklen Materie“:

> *Wenn es nach mir ginge, würde ich lieber erfahren, dass Newtons Gesetzte geändert werden müssen, um die Schwerkraftwirkung bei großen Distanzen richtig zu beschreiben. Das ist ansprechender als ein Universum, erfüllt mit einer neuen Art subatomarer Teilchen.*

Diese im Ganzen unbefriedigende Situation in der Kosmologie ist eine starke Motivation, dieses kleine Buch zu schreiben und sich so eine eigene fundierte Meinung zu diesem Thema zu bilden. Ein solcher Wunsch erfordert es, den ganzen Gegenstand von Grund auf neu zu *durchdenken und durchzurechnen*. Viel Anregungen ergaben sich aus Diskussionen und Vorträgen am Institut für Astrophysik in Bonn (**AIFA**) und den jährlich stattfindenden *Bad Honnefer Winterseminaren zu Problemen der kosmischen Evolution*, organisiert von Kurt Roessler, Hans-Joachim Blome und auch Wolfgang Priester (1924-2005) in den Jahren 2000 - 2009. Eine wesentlich frühere Anregung zu kosmologischen Fragen verdanke ich auch dem Diplomaten und außenpolitischen Berater Dr. Horst Osterheld (1919-1998) aus Bonn, der mir Mitte der 1990er Jahre das ausgezeichnete Buch *Das Universum - Aufbau, Entdeckungen, Theorien* von D. Layzer (1925-2019) aus seiner persönlichen Bibliothek überließ.

Wir fragen also jetzt sehr naiv und sehr provokativ: *Warum expandiert das Universum beschleunigt? Lässt sich dieser Sachverhalt unter Vermeidung von „hypothetischen exotischen quantentheoretischen Energiemodellen“ völlig zwanglos in Begriffen einer global erweiterten Newtonschen Gravitation als energetische gravitative Rückkopplungen von Materieverdichtungen in Galaxienhaufen erklären? Gibt es vielleicht eine*

*immense Population von „**black holes**“ im Universum? Ist vielleicht ein Großteil der “Antimaterie” in diesen exotischen Objekten gebunden?* Im Laufe dieser Arbeit werden wir die erste fundamentale Frage mit der Zweiten verknüpfen, um eine plausible Antwort auf beide zu erhalten.

2 Ein expandierender Teilchenring mit Paarfusion

Das Denken in Analogien ist die Seele des Naturforschers

Um uns im „Dunkeln“ zahlreicher Spekulationen über *„Dunkle Energie“* besser zurecht zu finden, wollen wir ein idealisiertes Modell der *analytischen Mechanik* betrachten: ein vollständig berechenbares eindimensionales *toy-model*, welches die wesentlichen physikalischen Mechanismen wie Expansion und Strukturbildung und deren Wechselwirkung konsistent enthält. Im Prinzip handelt es sich hier also um ein *Gedankenexperiment* oder um einen *geistigen Modellbau*, um bestimmte kosmologischen Aussagen und Entwicklungstendenzen kausal und logisch einwandfrei aus einfachsten Prinzipien abzuleiten und weiter zu entwickeln. Das idealisierte geistige Ringmodell ist in seiner konkreten Form in der Natur nicht realisiert, lässt aber in Analogie ein Weiterdenken auf höhere Dimensionen und deren Realität zu. Der britische Astrophysiker S. Hawking hat in seinem populären Buch *Eine kurze Geschichte der Zeit (1988)* darauf hingewiesen, dass man zur Beschreibung eines expandierenden Universums keineswegs die Einsteinsche Theorie benötigt. Die Newtonsche Gravitationstheorie ist für den dynamischen Teil völlig ausreichend. Das hätte auch schon ein Newton oder Laplace zu Beginn des 18ten bzw. 19ten Jahrhunderts machen können. Doch S. Hawking selber verpasste in der Ausgabe seines Buches von 1998, mit einem Gedankenexperiment nur auf der Grundlage der Newtonschen Theorie die Notwendigkeit einer beschleunigten Expansion des Kosmos aufzuzeigen. [1]

Basis unseres deduktiven Denkens am *geistigen Modell* ist somit zu-

[1] Man kann daher nicht Einstein nachträglich vorwerfen, er hätte es 1917 versäumt, die Expansion des Universums aus seinen Gleichungen vorauszusagen.

nächst die NEWTON'sche Gravitationstheorie mit ihrer Punktmassenapproximation. Wir benutzen diese Theorie so lange, bis wir auf Verletzung gemachter Approximationen oder auf Widersprüche zu den beobachtbaren Fakten stoßen. In wahrer Meisterschaft hat dies schon O. HECKMANN im ersten Kapitel seines Buches „Theorien der Kosmologie" durchgeführt([75]). HECKMANN unterschied damals drei gedankliche Modellkategorien:

- *Dynamische Kosmologie*: Als Grundgleichungen werden die Newtonschen Bewegungsgleichungen, die Poissongleichung und die Hydrodynamik für ein in Ausdehnung begriffenes nicht notwendigerweise isotropes Medium benutzt.

- *Geometrische Kosmologie*: Als Grundgleichungen werden nun die wesentlich komplizierteren Einsteinschen Gravitationsgleichungen benutzt. Das sich hier ergebende Arbeitsmodell sind die Friedmanngleichungen mit einem „a priori" vorgegebenen Λ Term.

- *Kinematische Kosmologie*: Grundlage ist hier das Lorentzinvariante „Toy - Modell" von MILNE und MCCREA für die zeitlichen Veränderungen im Kosmos. Nach heutiger Auffassung hat dieses „monologische Modell" von MILNE eine zu enge Sichtweise auf die dynamischen Vorgänge im Kosmos.

Aus heutiger Sicht müsste man noch die *Quantenkosmologie* ergänzen, die sich insbesondere mit den Vorgängen kurz nach dem „Urblitz" („Urknall") beschäftigt. O. HECKMANN & E. SCHÜCKING([76]) haben 1955 und 1956 sehr allgemeine Kosmologien im Rahmen der Newtonschen Gravitationslehre (*Dynamische Kosmologie*) und der *Hydrodynamik* diskutiert, die alle Analoga in Weltmodellen haben, die auf der EINSTEIN'schen Gravitationstheorie (*Geometrische Kosmologie*) beruhen. Insbesondere der Skalenfaktor genügt in beiden Modellen identischen Differentialgleichungen. Das „kosmologische" Prinzip, dass allen Modellen zugrunde liegt, ist die Homogenität und Isotropie der Raumdichte ϱ. Der Vergleich einer kinematisch – dynamischen Betrachtung nach Newton und der exakten Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen für ein Kontinuum nach Friedmann – Lemaître zeigt, dass in beiden Betrachtungen die Dynamik völlig identisch ist – bis auf die Interpretation der physikalischen Variablen und die erweiterte Rolle des Impulsstromes (Drucktermes) als gravitierende Quelle kurz nach dem „Urblitz".

Kosmologische Modelle nach Newton haben in den meisten Fällen *Analoga* in der Relativitätstheorie. Das gilt besonders auch für rotierende Universen und ihr relativistisches Analogon nach K. GÖDEL. Historisch ist hier interessant, dass der britische Astrophysiker E. A. MILNE strikt eine naive *kinematische Theorie der Relativität* vertreten hat (*Gravitation without Relativity*). Chandrasekhar schreibt in seinem Buch *Truth and Beauty*([22]):

> *...However, I shall indicate, following Milne's ideas, how the cosmological principle together with Newtonian laws can be used to derive a description of the universe locally adequate and which is in agreement with the relativistic models of Friedmann.*

Gerade in England entstand zwischen 1930 bis 1945 eine rege Debatte über die korrekte wissenschaftstheoretische und philosophische Auffassung zur kosmologischen Forschung. Auf der einen extremen Seite stand EDDINGTON und EINSTEIN, für den nur der Raum expandierte – auf der anderen Seite war MILNE, für den die Expansion des Universums eine „Explosion" in einem schon vorgegebenen euklidischen Raum darstellte (also ein wirklicher „Big Bang" („Big Flash")). Für A. MILNE war die Expansion des Raumes mit Uhren und Lichtsignalen „nicht beobachtbar". Die metrische Struktur des Raumes und seine „innerer Expansion" einschließlich der allgemeinen Relativitätstheorie lehnte er ab. In seinem Modell sind Galaxien zufällig sich bewegende Punktmassen gleich Molekülen in einem verdünnten Gas. Das System entwickelt sich im Sinne von Hubble, wobei die sich am schnellsten bewegenden Galaxien eine Kugelfront bilden, die sich mit ct ausbreitet. Obwohl es unendlich viele Galaxien gibt, konnte MILNE mit der Dopplerformel der speziellen Relativitätstheorie zeigen, dass das *Olbersche Paradoxon* in seinem Modell nicht auftritt. Haben zwei Galaxien die Differenzgeschwindigkeit v, so entfernen sie sich mit $r = v\,t$. Sieht man die Hubble-Konstante als das Inverse der Zeit an, so folgt auch aus rein kinematischen Gründen das Gesetz $v = H\,r$[2]. MILNE war so ein Vertreter eines *extremen Rationalismus.* Eine prägende Aussage von Ihm lautet ([98]):

> *The philosopher may take comfort from the fact that, in spite*

[2]Hubble war 1934 von der Herleitung dieses kinematischen Expansionsgesetz von Milne begeistert

> *of the much vaunted sway and dominance of pure observation and experiment in ordinary physics, world-physics propounds questions of an objective, non-metaphysical character which cannot be answered by observation but must be answered, if at all, by pure reason;* ***natural philosophy is something bigger than the totality of conceivable observations.***

Sympathisanten von MILNE waren in den 1930er Jahren sicherlich EDDINGTON, DIRAC und JEANS. Letztendlich ging es aber auch um die Frage: *Braucht man wirklich die allgemeine Relativitätstheorie, um die Dynamik des Universums zu verstehen?*.[3]

Obwohl die kosmologischen Lösungen in den Kategorienen „*dynamische Kosmologie*“ und „*Geometrische Kosmologie*“ identisch sein können oder sind, so ist doch ihre begriffliche Grundlage sehr verschieden. Wenn die Newtonsche Theorie den Schwarzschildradius einer „*Punktmasse*“ korrekt ausrechnet, kann dies nur an einer *geraden Anzahl von Fehlern* liegen, die man in der klassischen Theorie macht. So schreibt DAVID LAYZER (1925-2019) in seiner Kritik zum Modell von MILNE im Jahre 1954 ([104]):

> *...„Newtonian“ derivations of the Einstein - Friedmann equations are therefore invalid. On the other hand, by virtue of two relativistic theorems, due essentially to H. Bondi, one can legitimately use the mathematical apparatus of Newton's theory to obtain exact solutions of cosmological problems belonging to a certain well-defined class.*

Und am Ende seines Artikels von 1954, wo er ein spezielles Beispiel mit Newtonscher Physik durchgerechnet hat, schreibt LAYZER nochmals genauer:

> *According to general relativity the result is right but for the wrong reasons; the Newtonian physicist has got the right answer by making two mistakes that cancel each other out, one in the geometry of the problem, the other in the physics.*

[3] Diese Frage ist heute hochaktuell, besonders im Hinblick auf nicht-Newton'sche Bewegung im Reich der Galaxien (Rotationskurven). Eine ausführliche Diskussion der „Hydrokinematischen“ Kosmologie von A. MILNE findet man in dem Buch von HECKMANN ([75]. Bei MILNE wurde ein formales Axiom zum Maßstab für die Gültigkeit der Formulierung eines Naturgesetzes. Er bezeichnete seine Theorie als „Arithmetisierung“ der Physik. Für EINSTEIN war dies eine viel zu enge Auffassung unserer Beziehungen zur Natur.

Diese Warnung müssen wir im Folgenden immer im Auge behalten - auch dann, wenn wir ein *euklidisch flaches Universum* betrachten. Wir werden uns aber auf die Ergebnisse von HECKMANN & SCHÜCKING aus dem Jahre 1955 stützen ([76]):

> *... Entgegen den Ansichten von D. LAYZER ist die Newtonsche Mechanik in ihrem Gültigkeitsbereich zur Diskussion kosmologischer Fragen geeignet...*

Für die theoretische Untersuchung von Wechselwirkungsprozessen zwischen Expansion und Strukturbildung benutzen wir das dynamische Modell eines „Ringkosmos“, also einen expandierenden N-Teilchenring mit zeitabhängigem Radius R. Das „Universum - Modell“ ist also *endlich* und stellt letztendlich einen *1 - Torus* dar. Auf diesem Ring (1 - Torus) sollen sich bei bestimmten Winkeln N Teilchen befinden. Die Teilchen (Galaxien; Galaxienhaufen) „schwimmen“ dann in diesem „expandierenden Ring-Kosmos“ mit, solange sich ihre Winkel zeitlich nicht ändern.

2.1 Die Dynamik eines expandierenden Teilchenringes

Wir untersuchen die Dynamik eines expandierenden selbstgravitierenden kreisförmigen N - Polygons, welches an den Ecken identische Punktmassen hat. Das geistige Modell ist ein theoretisches Arbeitsmodell, anhand dessen man den Mechanismus der Wechselwirkung von „Expansion“ und „Strukturbildung“ im Detail studieren kann, ohne auf Begriffe wie „Dichte“ oder „mittlere Dichte“ im hydrodynamischen Sinne zurückgreifen zu müssen. Dieses mathematisch voll beherrschbare Modell soll auch veranschaulichen, dass sich Teilchen im Ring nur aufgrund der Raumexpansion von einander entfernen. Ihre Eigenbewegung längs der Ringperipherie ist zunächst Null. Wir wollen damit einen Fingerzeig bekommen, in welche Richtung man mit Hilfe von Analogien und Homologien schauen muss, um das Verhalten des *aus Punktmassen bestehenden 3D-Universums* besser zu verstehen. Vielleicht werden wir uns dann am Ende auch nicht mehr wirklich wundern, weshalb das Universum eine *beschleunigte Expansion* ausführen muss.

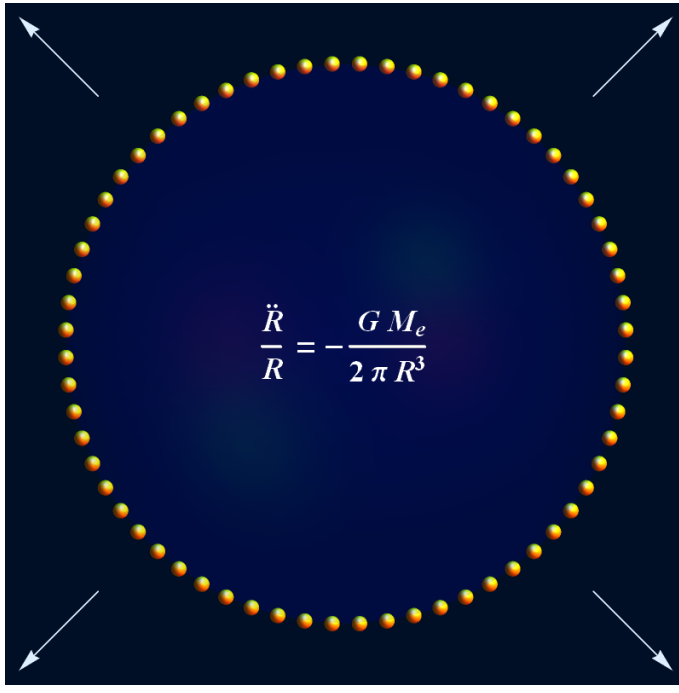


Fig. 2.1: *„Toy model" eines expandierenden eindimensionalen Ringkosmos* ***ohne Strukturbildung*** *in eine zweidimensionale Hyperebene. Der exakt kreisförmige Ringkosmos besteht hier zu Beginn aus N=64 gravitierenden Punktmassen, die explosionsartig nach außen expandieren. Die Teilchen entfernen sich voneinander, obwohl ihre Winkelkoordinaten konstant bleiben. Nur eine Änderung der Winkelpositionen wäre eine Eigenbewegung im Ringkosmos. Der Radius des Teilchenringes expandiert im Falle von verschwindender Gesamtenergie wie $t^{2/3}$ (Null-Energie Ringkosmos). Der Gesamtdrehimpuls des Systems ist Null; der Ringkosmos als Ganzes rotiert also nicht und zeigt auch zu keinem Zeitpunkt eine Strukturbildung.*

Zunächst müssen drei Arten von kollektiven Anregungsmechanismen im expandierenden N-Teilchenring unterschieden werden:

- **A**). Jedes Teilchen befindet sich exakt an den Winkelpositionen des N-Eckes. Doch in radialer Expansionsrichtung hat jedes Teilchen gegenüber seinen Nachbarn *sehr kleine abwechselnd entgegengesetzte* Expansionsgeschwindigkeiten. Dieser Fall soll hier nicht untersucht

werden, da er wegen der wellen-artigen Bewegungen der Teilchen längs der Ringperipherie nur zu periodischen Störungen der Ringexpansion führt und die Teilchen den „Ringkosmos“ verlassen.

- **B**). Jedes Teilchen befindet sich exakt an den Winkelpositionen des N-Eckes. Doch in senkrechter Richtung zur Ringebene hat jedes Teilchen gegenüber seinem Nachbarn eine *sehr kleine entgegengesetzte* transversale Geschwindigkeit. Obwohl auch diese „Biegeschwingungen“ die Ringexpansion beeinflussen, soll dieser Fall nicht betrachtet werden, da hier wieder die Teilchen den „Ringkosmos“ verlassen.

- **C**). Jedes Teilchen befindet sich zunächst exakt an den Winkelpositionen des N-Eckes. Sehr kleine Bewegungen sind nur längs der Peripherie des Ringes möglich. Nur auf diese Weise verbleiben die Teilchen im „Ringkosmos“. Anstatt den allgemeinen Fall von Wellenmoden zu betrachten, beschränken wir uns hier auf den hochsymmetrischen Fall der „Paarfusion“ innerhalb des expandierenden „Ringkosmos“. Diese Mode hat die höchste Instabilität und sollte eine *systematische Auswirkung* auf die Expansionsgeschwindigkeit des Ringes als Ganzes haben.

Im ungestörten Zustand befinden sich also alle Teilchen an den Winkelpositionen $\phi_i = 2\pi/N\, i\ \{i = 1, ...N\}$. Die einzelnen Teilchen können sich nur längs dieser „Ringkette“ bewegen, ein Ausweichen in eine der beiden „anderen“ Dimension findet nicht statt.

Die Positionen der äquidistant platzierten identischen Massen m sind gegeben durch

$$\mathbf{r}_i = R\, \mathbf{e}_i; \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{2.1}$$

mit den Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \cos\left[\frac{2\pi}{N}\, i\right] \\ \\ \sin\left[\frac{2\pi}{N}\, i\right] \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Weichen die Teilchen während der Expansion des Ringes um den kleinen Winkel φ_i aus ihrer labilen Gleichgewichtsposition aus, so sind ihre Positionen durch

$$\mathbf{r}_i = R \begin{pmatrix} \cos\left[\frac{2\pi}{N}\, i + \varphi_i\right] \\ \\ \sin\left[\frac{2\pi}{N}\, i + \varphi_i\right] \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

gegeben. Wichtig ist hier, daß der Winkel φ die *kosmologische Koordinate* eines Teilchens im Ringkosmos ist. Zwei Teilchen mit den zeitlich konstanten Winkeln φ_1 und φ_2 entfernen sich zwar voneinander, wenn der Ringradius R zunimmt, aber die Teilchen „ruhen“ trotzdem im expandierenden „Ringkosmos“. Man kann also sagen:

> *Im expandierenden Ringmodell wird sehr anschaulich verdeutlicht, dass sich in einem expandierenden Raum (hier der expandierende Kreisumfang) einzelne Teilchen voneinander entfernen, obwohl sie in diesem Raum „ruhen“ (konstante Winkel haben). Die Teilchen bewegen sich nur dann im expandierenden Ringkosmos, wenn sich ihre Winkel φ längst der Ringperipherie zeitlich ändern.*

Ganz allgemein könnte man nun die zeitliche Entwicklung der Winkel φ_i als eine endliche Reihe von Fouriermoden darstellen, deren Koeffizienten gewissen Differentialgleichungen genügen. Wir beschränken uns hier aber auf die Mode *maximaler Instabilität*; das heißt im expandierenden Ring bewegen sich die Teilchen paarweise aufeinander zu. Wir reduzieren also die zeitliche Entwicklung der Strukturen im Ringkosmos auf den mathematischen Ausdruck

$$\varphi_i = (-1)^i \, \varphi \tag{2.4}$$

ein. Der expandierende Ringkosmos zerfällt also in zwei Ringe, die bei gleicher Expansionsrate gegeneinander rotieren.Somit gilt

$$\mathbf{r}_i = R \begin{pmatrix} \cos\left[\frac{2\pi}{N}\, i + (-1)^i \, \varphi\right] \\ \\ \sin\left[\frac{2\pi}{N}\, i + (-1)^i \, \varphi\right] \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Der dynamische Bewegungszustand des expandierenden Ringes mit Paarfusion wird somit nur durch den Ringradius R und mit der Winkelamplitude φ beschrieben. Für diese beiden Größen sollen nun gekoppelte Differentialgleichung aufgestellt werden. Für das Quadrat der Geschwindigkeit eines Teilchens ergibt sich

$$\dot{\mathbf{r}}_i^2 = \dot{R}^2 + R^2 \, \dot{\varphi}^2. \tag{2.6}$$

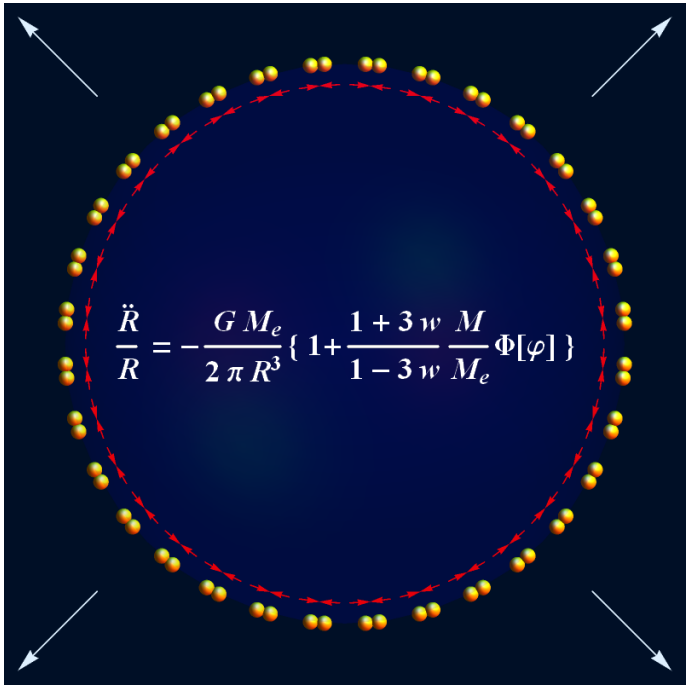


Fig. 2.2: *„Toy model“ eines expandierenden eindimensionalen Ringkosmos* ***mit Strukturbildung (Paarfusion)****. Der exakt kreisförmige Ringkosmos besteht wieder zu Beginn aus N=64 gravitierenden Punktmassen, die explosionsartig nach außen expandieren. Durch die einsetzende „Paarfusion “ haben die Teilchen eine Eigenbewegung gegenüber der expandierenden Ringperipherie, ändern also ihre Winkelpositionen. Es entsteht zur Eigengravitation ein Zentrifugalfeld, deren Summe die aktive gravitative Massendichte des Ringes darstellt, die für die Beschleunigung verantwortlich ist. Ohne „Paarfusion “ würde der Ring immer langsamer expandieren, wie in der vorhergehenden Figur. Im Bild der Newtonschen Physik bestimmen Gravitationskräfte und Impulsströme die aktive expandierende Ringdynamik. Die Bewegungsgleichung im Zentrum wird im Text ausführlich hergeleitet.*

Anstatt eine Summation über alle N Teilchen mit Masse 1 durchzuführen, betrachten wir jetzt nur das Teilchen mit der Marke $i = 0$. Für die kinetische Energie gilt dann nur für dieses Teilchen

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\,\dot{\varphi}^2\right). \tag{2.7}$$

Als nächstes muss die potentielle Energie

$$E_{pot} = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_j{}' \frac{Gm}{r_{ij}}. \tag{2.8}$$

für den Ring ausgewertet werden. Der Faktor 2 ist hier sehr wichtig, da er eine Doppelzählung der Wechselwirkungen bei einer Summation über alle Teilchen korrigiert. Auch wenn wir nun $i = 0$ setzen, muss dieser Faktor aufgrund der Kollektivwechselwirkung beibehalten werden. Für den Abstand r_{ij} von zwei beliebigen Massenpunkten im expandierenden Ring gilt jetzt (natürlich im 3D - Raum)

$$r_{ij} = 2\,R\,\left|\sin\left[\frac{\pi}{N}(j-i) + \left((-1)^j - (-1)^i\right)\frac{\varphi}{2}\right]\right| \tag{2.9}$$

Wir können uns jetzt auf ein Teilchen der Marke i setzen und nur für dieses Teilchen die Lagrangefunktion aufstellen. Für alle anderen gilt dann das Gleiche. Ohne Einschränkung setzen wir also $i = 0$ und erhalten

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\left(\dot{R}^2 + R^2\,\dot{\varphi}^2\right) + \frac{GM}{2\pi R}\,\mathbf{\Phi}_g[\varphi].$$

Die Funktion $\mathbf{\Phi}_g[\varphi]$ ist gegeben durch

$$\mathbf{\Phi}_g[\varphi] = \frac{\pi}{2\,N}\,\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{\sin\left[\frac{\pi}{N}j + \left((-1)^j - 1\right)\frac{\varphi}{2}\right]}, \tag{2.10}$$

oder nach trigonometrischer Umformung

$$\mathbf{\Phi}_g[\varphi] = \frac{\pi}{2\,N}\,\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{\sin\left[\frac{\pi}{N}j - \varphi\,\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\,j\right)\right]}. \tag{2.11}$$

Damit ist die Lagrangefunktion eines expandierenden Ringes mit Paarfusion im Prinzip bekannt. Allgemeiner gesprochen beschreibt das Modell sowohl paarweise Teilchenfission als auch paarweise Teilchenfusion in einem expandierenden Ring. Eine „hydrodynamische“ Beschreibung ist nun nicht mehr möglich, da der N - Teilchenring in **zwei Teilchenringe** zerfällt, die sich gegeneinander bewegen. Aus einer *Einfachströmung* wird nun eine *Zweifachströmung*, deren Flüsse gegeneinander gerichtet sind und nur gravitativ miteinander wechselwirken. Mit der Abkürzung

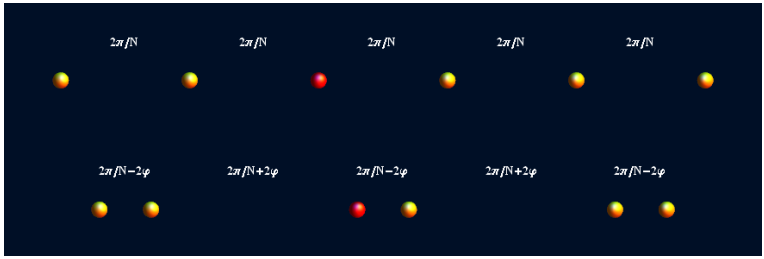


Fig. 2.3: *Zwei Ausschnitte des expandierenden Teilchenringes. Oben im Grundzustand mit identischen Abständen, unten während der Paarfusion , wo jedes Teilchen in der Reihe abwechselnd um $+\varphi$ und $-\varphi$ aus der Ruhelage verschoben wurde. Ein beliebig herausgegriffenes Teilchen (rot) dient als Referenz für die Berechnung der Wechselwirkungsenergie.*

$\varphi = \varphi$ lauten die ersten Terme des Wechselwirkungsterms, aufgetrennt in die linken und rechten Nachbarn,

$$\begin{aligned}\frac{2N}{\pi}\,\mathbf{\Phi}_g(\varphi) = &+\frac{1}{\sin\left[\frac{\pi}{N}-\varphi\right]} + \frac{1}{\sin\left[2\frac{\pi}{N}\right]} + \frac{1}{\sin\left[3\frac{\pi}{N}-\varphi\right]} + \dots \\ &+\frac{1}{\sin\left[\frac{\pi}{N}+\varphi\right]} + \frac{1}{\sin\left[2\frac{\pi}{N}\right]} + \frac{1}{\sin\left[3\frac{\pi}{N}+\varphi\right]} + \dots\end{aligned} \tag{2.12}$$

Für $\varphi = 0$ ergibt sich mit Hilfe der Abel - Plana Summationsformel der asymptotische Wert ($\gamma =$ Eulersche Konstante; siehe (A.4))

$$\mathbf{\Phi}_g[0] = \frac{\pi}{2\,N}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{\sin\left[\frac{\pi}{N}j\right]} = \ln\left[\frac{2}{\pi}\,e^{\gamma}\,N\right] + O|1/N^2| \tag{2.13}$$

Wir differenzieren jetzt die Funktion $\mathbf{\Phi}_g[\varphi]$ einmal nach φ und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{2N}{\pi}\,\mathbf{\Phi}'_g[\varphi] = &+\frac{\cos\left[\frac{\pi}{N}-\varphi\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{N}-\varphi\right]^2} + \frac{\cos\left[\frac{3\pi}{N}-\varphi\right]}{\sin\left[\frac{3\pi}{N}-\varphi\right]^2} + \frac{\cos\left[\frac{5\pi}{N}-\varphi\right]}{\sin\left[\frac{5\pi}{N}-\varphi\right]^2} + \dots \\ &-\frac{\cos\left[\frac{\pi}{N}+\varphi\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{N}+\varphi\right]^2} - \frac{\cos\left[\frac{3\pi}{N}+\varphi\right]}{\sin\left[\frac{3\pi}{N}+\varphi\right]^2} - \frac{\cos\left[\frac{5\pi}{N}+\varphi\right]}{\sin\left[\frac{5\pi}{N}+\varphi\right]^2} - \dots\end{aligned} \tag{2.14}$$

In dieser Reihe kann man nun ein Grenzübergang $N \to \infty$ durchführen, indem man den Ring lokal geometrisch in eine gerade *unendlich*

ausgedehnte Teilchenkette transformiert. Man erhält dann die folgende Reihendarstellung

$$\mathbf{\Phi}'_g[\varphi] = \frac{\pi}{2N} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\left((2j+1)\frac{\pi}{N} - \varphi\right)^2} - \frac{1}{\left((2j+1)\frac{\pi}{N} + \varphi\right)^2} \right). \quad (2.15)$$

Diese Funktion ist mit einer Beschleunigungsfunktion einer unendlich ausgedehnten linearen Kette für die „Brillouin-Zone“ identisch. Wir führen eine dimensionslose Länge ξ gemäß

$$\varphi = \frac{2\pi}{N}\,\xi; \qquad \left[-\frac{\pi}{N} < \varphi < \frac{\pi}{N}\right] \quad (2.16)$$

ein. $\xi = 0$ bedeutet keine Strukturierung (äquidistante Teilchen auf einer Ringkette), $\xi = \pm 1/2$ bedeutet paarweise Kollision der Teilchen (Singularität). Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}'_g[\varphi] &= \frac{N}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2j+1-2\,\xi)^2} - \frac{1}{(2j+1+2\,\xi)^2} \right) \\ &= \frac{N}{2\pi}\,\mathbf{\Phi}'[\xi]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Integrieren wir diese Relation wieder nach φ, so erhalten wir die endgültige Darstellung

$$\mathbf{\Phi}_g[\varphi] = \mathbf{\Phi}_g[0] + \mathbf{\Phi}[\xi]. \quad (2.18)$$

Um $\mathbf{\Phi}[\xi]$ genauer analytisch darzustellen, betrachten wir noch die bekannte Identität

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1+2z)^2} = \frac{1}{4}\,\mathbf{\Psi}'\left[\frac{1}{2} + z\right], \quad (2.19)$$

wo $\mathbf{\Psi}[z]$ die logarithmische Ableitung der Gammafunktion (Digammafunktion) bezeichnet. Daraus folgt unmittelbar

$$\mathbf{\Phi}'[\xi] = \frac{1}{4}\left(\mathbf{\Psi}'\left[\frac{1}{2} - \xi\right] - \mathbf{\Psi}'\left[\frac{1}{2} + \xi\right]\right). \quad (2.20)$$

Durch Integration folgt

$$\mathbf{\Phi}[\xi] = \frac{1}{2}\mathbf{\Psi}\left[\frac{1}{2}\right] - \frac{1}{4}\left(\mathbf{\Psi}\left[\frac{1}{2} - \xi\right] + \mathbf{\Psi}\left[\frac{1}{2} + \xi\right]\right). \quad (2.21)$$

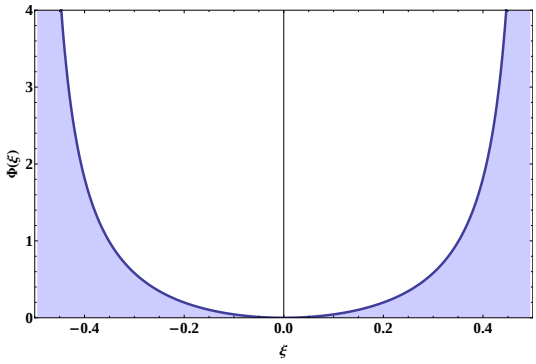


Fig. 2.4: *Die Funktion* $\mathbf{\Phi}[\xi]$ *als Funktion der Auslenkung* ξ *im Ring - Kettenmodell. An den singulären Stellen gilt* $\mathbf{\Phi}[\pm 1/2] = \infty$.

oder

$$\mathbf{\Phi}[\varphi] = \frac{1}{2}\mathbf{\Psi}\left[\frac{1}{2}\right] - \frac{1}{4}\left(\mathbf{\Psi}\left[\frac{1}{2} - \frac{N\,\varphi}{2\pi}\right] + \mathbf{\Psi}\left[\frac{1}{2} + \frac{N\,\varphi}{2\pi}\right]\right). \tag{2.22}$$

In der Lagrangeschen Koordinate ξ lautet diese Entwicklung dann (siehe (A.14))

$$\mathbf{\Phi}\left[\xi\right] = \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{2n+1}}\right)\zeta[2n+1]\,(2\,\xi)^{2n}. \tag{2.23}$$

Für die Lagrangefunktion ergibt sich somit der Ausdruck ($\xi = \varphi/(2\pi/N)$)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\,\dot{\varphi}^2\right) + \frac{GM}{2\pi R}\,\mathbf{\Phi}_g[0] + \frac{GM}{2\pi R}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]. \tag{2.24}$$

Definieren wir noch die effektive Masse M_e[4] des Ringes zu

$$M_e = M\,\mathbf{\Phi}_g[0] \equiv M\,\ln\left[\frac{2}{\pi}e^{\gamma}\,N\right], \tag{2.25}$$

wo γ wieder die EULERsche Konstante bedeutet, so gilt alternativ für

[4] Man könnte hier *fehlgeleitet spekulieren*, dass M die „baryonische“ Masse und $M_e - M$ die nur gravitativ wirksame „dunkle Masse“ des Ringes repräsentiert.

den expandierenden Ring mit Paarfusion die Wirkungsfunktion[5]

$$\mathbf{S} = \int \mathcal{L}\, dt \equiv \int \left(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2\right)\, dt \tag{2.26}$$

mit

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\,\dot{R}^2 + \frac{GM_e}{2\pi R}; \quad \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\,R^2\,\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{2\pi R}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right].$$

Der zweite Teil beschreibt den Einfluss eines *"Skalarfeldes"*, welches den Einfluß der Strukturbildung durch die gravitative Paarbildung beschreibt. Die gesamte Lagrangedichte lautet somit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\left(\dot{R}^2 + R^2\,\dot{\varphi}^2\right) + \frac{GM_e}{2\pi R} + \frac{GM}{2\pi R}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]. \tag{2.27}$$

Mit Hilfe dieser Lagrangedichte können wir endlich die Bewegungsgleichungen für R und φ ableiten. Wegen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{R}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}, \tag{2.28}$$

erhält man mit der Abkürzung $\xi = \varphi/(2\pi/N)$ die wichtige Beziehung

$$\boxed{2\,\frac{\ddot{R}}{R} = 2\,\dot{\varphi}^2 - \frac{GM_e}{\pi R^3} - \frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]} \tag{2.29}$$

und die Bilanzgleichung für die Gesamtenergie zu

$$\boxed{\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{\epsilon_0}{R^2} = \frac{GM_e}{\pi R^3} - \left\{\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right\},} \tag{2.30}$$

wobei ϵ_0 in der *Sprache der Newtonschen Gravitation* eine Art „*globale Energiekonstante*" in der Einheit einer quadrierten Geschwindigkeit des expandierenden Ringes darstellt.

[5] Die Wikungsfunktion hat eine Ähnlichkeit zur sogenannten *Horndeski-Gravitation*; siehe spätere Herleitung im erweiterten 3D Modell

Multipliziert man schließlich die Bewegungsgleichung (2.29) mit 2 und addiert sie zur Energiegleichung, so erhält man

$$\boxed{2\,\frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{\epsilon_0}{R^2} = \dot{\varphi}^2.} \tag{2.31}$$

Hier steht auf der rechten Seite ein bemerkenswerter kinetischer Term, der mit der Bewegungsenergie der Teilchenpaare korreliert ist und der auch bei einem *kohärent rotierenden und expandierenden Teilchenring ohne Strukturbildung* auftreten würde. Doch der Term $\dot{\varphi}^2$ in (2.29) hat hier nichts mit einer Rotation (*vorticity*) zu tun, da der Ringkosmos als Ganzes nicht in der Hyperebene rotiert. Die Größe $2\,\dot{\varphi}$ ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der die Teilchenpaare in der expandierenden Ringperipherie aufeinander zulaufen. Die Gleichung (2.30) ist nichts anderes als die *Hubble-Lemaître* Funktion des expandierenden Ringkosmos.

Die Gleichung (2.30) ist völlig analog derjenigen Gleichung, die DE-SITTER und EINSTEIN auf der Kreidetafel in Pasadena 1932 diskutiert haben (siehe Abbildung (1.2). Der dortige *ad hoc* kosmologische λ - Term ist aber im expandierenden Ring durch einen dynamischen Term ersetzt, der die Paarfusion (Strukturbildung) beschreibt. Wenn $\epsilon_0 = 0$ ist, liegt der „parabolische“ Fall der Ringexpansion oder Ringkontraktion vor. Die Gesamtenergie des expandierenden Ringes mit „Paarfusion “ ist dann Null. Die Funktion $\mathbf{\Phi}[\varphi]$ beschreibt gegenüber dem strukturlosen äquidistanten Teilchenzustand die Zunahme der *negativen* gravitativen Wechselwirkungsenergie in der eindimensionalen unendlich langen Kette beim Prozess der Paarfusion.

Des weiteren folgt für die Paarfusion aus der zweiten Lagrangegleichung die Beziehung

$$\frac{d}{dt}\left(R^2\,\dot{\varphi}\right) = \frac{GM}{2\pi R}\,\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \varphi}$$

oder

$$\ddot{\varphi} + 2\,\frac{\dot{R}}{R}\,\dot{\varphi} = \frac{GM}{2\pi R^3}\,\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \varphi}. \tag{2.32}$$

Man kann dieser Gleichung noch eine andere Gestalt geben. Die Koordinate φ ist im *mitbewegten System* definiert. Doch nun führen wir im

mitgeführten Koordinatensystem die wirklich zurückgelegte Distanz

$$s = R[t]\,\varphi$$

ein. Dann gilt die Transformation

$$\frac{d}{dt}\left(R^2\,\dot{\varphi}\right) \equiv \frac{d}{dt}\left(R^2\,\frac{d}{dt}\left(\frac{s}{R}\right)\right) = R\,\ddot{s} - \ddot{R}\,s$$

und (2.32) lautet im mitgeführten expandierenden Koordinatensystem

$$\boxed{\ddot{s} = \frac{GM}{2\pi R^2}\,\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \varphi} + \frac{\ddot{R}}{R}\,s.} \tag{2.33}$$

Der kosmische „Reibungsterm“, der im *mitbewegten System* auftrat, ist im *mitgeführten Koordinatensystem* in fast paradoxer Weise verschwunden. Im dreidimensionalen Fall werden wir auf diese wichtige Tatsache und insbesondere ihren letzten Term auf der rechten Seite noch zurückkommen. Man kann schon erkennen, dass die Expansion *der Ringperipherie* und seine innere Paarbildung *dynamisch* untrennbar miteinander verbunden sind. Globale Expansion kann nicht ohne die innere Strukturbildung betrachtet werden.

Addiert man zu der Gleichung (2.29) das Doppelte von (2.30), so folgt, wie wir später zeigen werden, im *Newtonschen Bild* der Gravitation die RR-Komponente der *Einsteinschen Gleichung* zu

$$\boxed{\frac{\ddot{R}}{R} + 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 2\,\frac{\epsilon_0}{R^2} = \frac{3\,GM_e}{2\pi R^3} + \frac{3\,GM}{2\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi] - \dot{\varphi}^2.} \tag{2.34}$$

Hier steht auf der rechten Seite wieder ein bestimmter Anteil der gravitativen Wechselwirkungsenergie minus eines kinetischen Anteils, der die Strukturbildung hervorbringt.

Zum Abschluss formulieren wir noch die im englischen Sprachraum häufig benutzte RAYCHAUDHURI - Gleichung, die nichts anderes als die Gleichung (2.29) mit der „Einstein-Norm“ darstellt. Sie lautet

$$3\,\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{1}{2}\left\{3\,\dot{\varphi}^2 - \frac{3\,GM_e}{\pi R^3} - \frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}[\varphi] + 3\,\dot{\varphi}^2\right\}. \tag{2.35}$$

Auf der rechten Seite diese Gleichung steht in den geschweiften Klammern der analoge Term $\varrho_E + 3\,p_E/c^2$ des Energie-Impuls-Tensors der Einsteinschen Feldgleichung der Gravitation . Dies wäre - in Analogie zur Standardkosmologie - die *Landau - Raychaudhuri* Gleichung des Ringkosmos mit Strukturbildung. In dieser allgemein gültigen Form können wir jetzt im nächsten Abschnitt die Gleichungen (2.30) und (2.29) sowie (2.31) und (2.34) mit den relativistischen FLRW - Gleichungen und anderen kosmologischen Modellen vergleichen.

2.2 Das Modell von Alexander Friedmann

Die moderne Kosmologie begann mit der Veröffentlichung der klassischen relativistischen Gleichungen eines expandierenden Universums durch A. Friedmann (1888 – 1925) in der Zeitschrift für Physik **10**, 377 (1922) und **21**, 326 (1924). Unterstützt wurde er von P. Ehrenfest (1880-1933) aus Leiden, welcher das russische Original ins Deutsche übersetzte. Zunächst wurde diese bemerkenswerte Arbeit kaum beachtet. Schlimmer noch - Einstein las die Arbeiten Friedmann's, hielt sie sofort für falsch und publizierte einen entsprechenden Kommentar:

> *...Die in der zitierten Arbeit enthaltenen Resultate bezüglich einer nichtstationären Welt schienen mir verdächtig. In der Tat zeigt sich, dass jene gegebene Lösung mit den Feldgleichungen nicht verträglich ist....([46])*

Einstein zog 1922 aus der Annahme $p = 0$ im Modell von Friedmann den *falschen Schluss*, dass dann auch $d\varrho/dt = 0$ sein müsse. Somit kann ein Universum ohne inneren Druck seine Dichte nicht ändern. In Wirklichkeit nahm Friedmann aber die Konstanz der Gesamtmasse, also $d(\varrho\, R^3)/dt = 0$, an. Erst ein Jahr später, nachdem Einstein von seiner Weltreise heimkehrte, traf Yuri A. Krutkov, ein Kollege und Freund Friedmanns, Einstein zweimal in Leiden und diskutierte mit ihm und wohl auch mit deSitter die Arbeit. Einstein gab dann in einer kurzen Note vom 31. Mai 1923 seinen Irrtum mit den Worten zu:

> *Mein Einwand beruhte aber - wie ich mich auf Anregung des Herrn Krutkoff an Hand eines Briefes von Herrn Friedmann überzeugt habe - auf einem Rechenfehler. Ich halte Herrn*

*Friedmanns Resultate für richtig und aufklärend. Es zeigt sich, dass die Feldgleichungen neben den statischen auch dynamische (d.h. mit der Zeitkoordinate veränderliche) zentrisch - symmetrische Lösungen für die Raumstruktur zulassen, [**denen eine physikalische Bedeutung kaum zuzuschreiben sein dürfte**] ([47]).*

Der letzte Halbsatz ist im handschriftlichen Entwurf dann aber durchgestrichen worden. Das zeigt, dass sich EINSTEIN auch 1923 noch nicht zu einem dynamisch veränderlichen Kosmos durchringen konnte. Und so blieb es bis zum Jahre 1931.

A. FRIEDMANN wurde 1888 in St. Petersburg als Sohn eines Komponisten und einer Pianistin geboren. Er studierte Mathematik und Meteorologie. Am ersten Weltkrieg nahm als Freiwilliger teil, leitete die Flugnavigation und fertigte Tabellen mit ballistischen Daten für die Artillerie und den Bombenabwurf an. Nach der Revolution war er zunächst Professor für Mechanik in Perm. 1920 kehrte er nach St. Petersburg zurück und arbeitete an der Akademie der Wissenschaften. Er starb 1925 an Typhus, die er sich wohl auf der Rückfahrt von einem Krim-Urlaub durch eine Lebensmittelvergiftung zugezogen hatte[6].

Mit dem kosmologischen Λ - Term und dem „Skalenparameter“ R lauten die aus den Einsteingleichungen folgenden Friedmann - Gleichungen in heutiger allgemeiner Schreibweise

$$3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 3\,\frac{\epsilon_0}{R^2} = 8\pi\,G\varrho + \Lambda \tag{2.36}$$

und

$$3\,\frac{\ddot{R}}{R} = -4\pi\,G\left(\varrho + 3\,\frac{p}{c^2}\right) + \Lambda \tag{2.37}$$

sowie

$$2\,\frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{\epsilon_0}{R^2} = -8\pi\,G\,\frac{p}{c^2} + \Lambda. \tag{2.38}$$

Hier bedeutet c die Lichtgeschwindigkeit und ϵ_0 hat die Dimension einer Geschwindigkeit ins Quadrat. Die Größe $\varrho\,c^2$ hat also die Dimension einer

[6] GEORG GAMOW (1904 – 1968), der ein Student von FRIEDMANN war, behauptete, er sei an einer Lungenentzündung gestorben, welche er sich bei einer seiner Ballonfahrten im Dienste der Meteorologie geholt habe.

Druckspannung oder Zugspannung, je nach Vorzeichen. Die kosmologische Konstante hat hier die Dimension einer Frequenz in das Quadrat. Die Friedmanngleichungen beschreiben also das Universum als eine hydrodynamische Flüssigkeit mit einem inneren Druck p, der im Rahmen der Einsteintheorie ebenfalls gravitativ wirksam ist.

EINSTEIN, der von einer *stationären ewigen Welt* überzeugt war, setzte in den obigen Gleichungen wegen $\epsilon_0 = c^2$ die Größen $\dot{R} \equiv \ddot{R} = 0$ und erhielt so

$$\Lambda = \frac{c^2}{R^2}; \qquad \varrho = \frac{c^2}{4\,\pi\,G\,R^2}, \tag{2.39}$$

während DESITTER $\varrho = 0$ setzte und damit

$$\Lambda = \frac{3\,c^2}{R^2}; \qquad p = \frac{c^4}{4\,\pi\,G\,R^2}, \tag{2.40}$$

erhielt. FRIEDMANN stellte nur die Gleichungen (2.36) und (2.38) auf und setzte hier für ein geschlossenes Universum $\epsilon_0 = c^2$, also dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit c, was einem Metrikparameter $k = 1$ entspricht. Außerdem nahm er an, was zu erheblichen Irritationen mit EINSTEIN führte, dass der Druck im Kosmos zu vernachlässigen sei ($p = 0$). Seine dynamischen Gleichungen für den Skalenfaktor lauteten somit im Frühjahr 1922

$$3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 3\,\frac{c^2}{R^2} = 8\pi\,G\varrho + \Lambda \tag{2.41}$$

und

$$2\,\frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{c^2}{R^2} = \Lambda. \tag{2.42}$$

Ein Vergleich dieser Friedmanngleichung mit der expandierenden Ringdynamik (2.31) zeigt die schöne physikalische Entsprechung $\Lambda = \dot{\varphi}^2$. FRIEDMANN stellte sich den Kosmos, ebenso wie EINSTEIN, als die endliche, aber unbegrenzte Oberfläche einer vierdimensionalen Hyperkugel mit dem Volumen

$$V = 2\,\pi^2\,R^3 \tag{2.43}$$

vor. Anstatt (2.41) integriert FRIEDMANN die Gleichung (2.42) und erhält zunächst

$$\dot{R}^2 = \frac{C_1}{R} - c^2 + \frac{1}{3}\,\Lambda\,R^2. \tag{2.44}$$

Ein Vergleich mit der Energiegleichung (2.36) und der Volumenformel (2.43) führt zu der notwendigen Bedingung

$$C_1 = \frac{8\pi}{3}\, G\varrho\, R^3 \equiv \frac{4\, G\, \mathcal{M}}{3\, \pi} \tag{2.45}$$

Hier wird deutlich, dass das Produkt $\varrho\, R^3$ zeitlich konstant sein muss. Der Druck ist Null, aber für die mittlere Dichte ϱ in diesem Modelluniversum gilt $\varrho \sim R^{-3}$. Dies hatte EINSTEIN beim Lesen dieser Arbeit zunächst übersehen. Die Größe $\mathcal{M}$ ist jetzt die Gesamtmasse des Kosmosmodelles. Die dynamische Gleichung des Weltmodells lautet damit

$$\dot{R}^2 = \frac{4\, G\mathcal{M}}{3\pi\, R} - c^2 + \frac{1}{3}\, \Lambda\, R^2. \tag{2.46}$$

Aus dieser Gleichung von FRIEDMANN folgt im Prinzip schon die *Instabilität* des stationären Weltmodells von EINSTEIN. Dies bringt FRIEDMANN aber 1922 nicht direkt zum Ausdruck. Erst EDDINGTON hat dies 1930 klar ausgesprochen. Im Gegensatz zu FRIEDMANN führen wir jetzt zwei fundamentale Längenskalen gemäß

$$R_F = \frac{2\, G\mathcal{M}}{\pi\, c^2}, \qquad R_E = \frac{c}{\sqrt{\Lambda}} \tag{2.47}$$

in (2.46) ein. R_F ist eine Art *Schwarzschildradius* des Friedmann Universums und R_E der Radius eines stationären Einsteinkosmos bei einer angenommenen kosmologischen Konstanten Λ. Mit der Substitution und Definition

$$R = R_F\, \zeta, \qquad \alpha = \frac{R_F}{R_E} \tag{2.48}$$

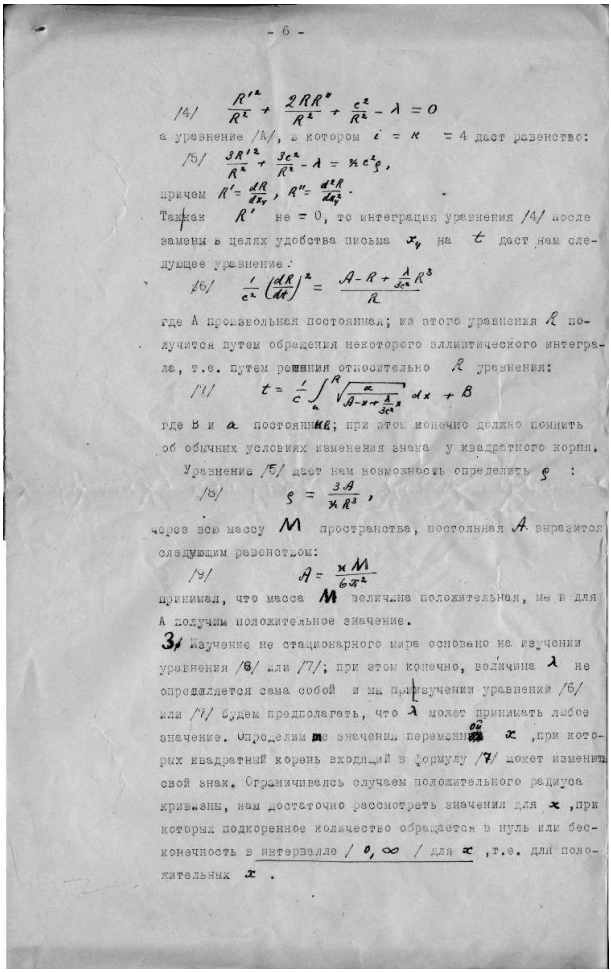
geht die Differentialgleichung von FRIEDMANN über in die Form

$$\dot{\zeta}^2 = \frac{c^2}{R_F^2} \left(\frac{2}{3\,\zeta} - 1 + \frac{1}{3}\, \alpha^2\, \zeta^2 \right). \tag{2.49}$$

Differenzieren nach der Zeit führt im Einklang mit (2.37) auf

$$\ddot{\zeta} = \frac{c^2}{3\, R_F^2} \left(\alpha^2\, \zeta - \frac{1}{\zeta^2} \right). \tag{2.50}$$

Mit der letzten Gleichung hätte FRIEDMANN schon 1922 die *Instabilität der stationären Welt* von EINSTEIN beweisen können. Denn mit $\alpha = 1$



- 6 -

/4/ $\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0$

a уравнение /4/, в котором $i = \kappa = 4$ дает равенство:

/5/ $\frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \varkappa c^2 \varrho$,

причем $R' = \frac{dR}{dx_4}$, $R'' = \frac{d^2R}{dx_4^2}$.

Так как $R' \neq 0$, то интеграция уравнения /4/ после замены в целях удобства письма x_4 на t дает нам следующее уравнение:

/6/ $\frac{1}{c^2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{A - R + \frac{\lambda}{3c^2}R^3}{R}$

где A произвольная постоянная; из этого уравнения R получится путем обращения некоторого эллиптического интеграла, т.е. путем решения относительно R уравнения:

/7/ $t = \frac{1}{c}\int_a^R \sqrt{\frac{\alpha}{A - x + \frac{\lambda}{3c^2}x^3}}\,dx + B$

где B и α постоянные; при этом конечно должно помнить об обычных условиях изменения знака у квадратного корня.

Уравнение /5/ дает нам возможность определить ϱ:

/8/ $\varrho = \frac{3A}{\varkappa R^3}$,

через всю массу M пространства, постоянная A выразится следующим равенством:

/9/ $A = \frac{\varkappa M}{6\pi^2}$

принимая, что масса M величина положительная, мы и для A получим положительное значение.

3/ Изучение не стационарного мира основано на изучении уравнения /6/ или /7/; при этом конечно, величина λ не определяется сама собой и мы при изучении уравнений /6/ или /7/ будем предполагать, что λ может принимать любое значение. Определим те значения переменной x, при которых квадратный корень входящий в формулу /7/ может изменить свой знак. Ограничиваясь случаем положительного радиуса кривизны, нам достаточно рассмотреть значения для x, при которых подкоренное количество обращается в нуль или бесконечность в интервале $/\ 0, \infty\ /$ для x, т.е. для положительных x.

Fig. 2.5: *Das Blatt 6 des russischen Originals von A. Friedmann zum Problem des gekrümmten Raumes vom 29. Mai 1922. Diese Arbeit war der Beginn der modernen dynamischen Kosmologie. (Quelle: Lorentz-Institut, Leiden University, Niederlande).*

gilt in einer kleinen Umgebung von $\zeta = 1$, dass jede kleine Störung sofort exponentiell anwächst. Der zeitliche Verlauf des Radius der Hyperkugel erfolgt dann durch das Differential

$$\pm \sqrt{\frac{3\,\zeta}{2 - 3\,\zeta + \alpha^2\,\zeta^3}}\, d\zeta = \frac{c\, dt}{R_F} \tag{2.51}$$

Solange $0 < \alpha < 1$ ist, kann der so konzipierte Friedmann-Kosmos aus der Singularität $\zeta = 0$ bis zu einem Maximum von höchstens $\zeta = 1$ anwachsen und dann wieder in die Singularität $\zeta = 0$ zurückfallen. Im Falle $\alpha \to 0$, also $\Lambda \to 0$, ergibt sich für den Zyklus einer Expansion und einer darauffolgenden Kontraktion die Zeitspanne

$$T = 2\,\frac{R_F}{c} \int_0^{2/3} \sqrt{\frac{3\,\zeta}{2 - 3\,\zeta}}\, d\zeta \equiv \frac{2\,\pi\, R_F}{3\,c} \equiv \frac{4\,G\,\mathcal{M}}{3\,c^3}. \tag{2.52}$$

Friedmann nannte diese Zeitepoche eine *Weltperiode*. In seinem zunächst nur in russischer Sprache erschienen Buch *Die Welt als Raum und Zeit* aus dem Jahre 1923 diskutierte er nicht nur expandierende, sondern auch kontrahierende oder oszillierende Universen ([61]). Das Universum sollte nach einer gewissen Zeit wieder in einen Punkt (in das Nichts) kollabieren, um dann wieder neu zu erstehen. Er vergleicht dies mit der *Hindu Mythologie* von Zyklen der Existenz . Friedmann sah somit auch Beziehungen zu Mythologien und war somit nicht nur an rein mathematischen Modellen des Universums interessiert.

2.3 Der Ringkosmos im Bild der Friedmanngleichungen

Anstatt die Konstante Λ als ad-hoc Parameter anzusehen, kann man die Wirkung dieser Größe auf die Dynamik auch als die Anwesenheit einer *hypothetischen Flüssigkeit* oder eines kosmisches „Fluidum“ – eine ponderable Materie – vorstellen, welche zu der normalen Materie noch die Dichte ϱ_Λ und den Druck p_Λ hinzufügt. Für diese Größen gelten dann nach den Friedmanngleichungen die Analogien in physikalischen Einheiten

$$8\pi\, G\, \varrho_\Lambda = \Lambda$$

$$-4\pi\, G\, \left(\varrho_\Lambda + 3\,\frac{p_\Lambda}{c^2}\right) = \Lambda. \tag{2.53}$$

Daraus erhält man

$$\varrho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}; \qquad p_\Lambda = -\frac{\Lambda\, c^2}{8\pi G}. \tag{2.54}$$

Diese Gleichungen bedürfen schon einer näheren Erklärung. Der Druckterm in den relativistischen Friedmann Gleichungen spielt eigentlich nur dann eine Rolle, *wenn er extrem hohe Werte annimmt - zum Beispiel kurz nach dem Urknall.* Die Wirkung der sogenannten Λ Konstanten ist aber extrem klein - von einer extrem hoch-verdichten relativistischen Flüssigkeit kann hier überhaupt keine Rede sein. Aus diesem Grunde ist die Deutung der kosmologischen Konstanten als Wirkung eines *negativen Druckes einer wie auch immer gearteten „Flüssigkeit"* höchst problematisch und irreführend. Eine beliebte Deutung, die schon auf Lemaître zurückgeht, nimmt eine Art „Vakuumenergie" an, dessen quantentheoretische Deutung aber völlig fehlschlägt.

Gleichung (2.37) können wir so umschreiben in

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left[\left(\varrho + \frac{\Lambda}{8\pi\, G}\right) + 3\,\left(\frac{p}{c^2} - \frac{\Lambda}{8\pi\, G}\right)\right]. \tag{2.55}$$

Definiert man schließlich für diese *hypothetische kosmische Flüssigkeit* eine allgemeine Zustandsgleichung

$$p = w\,\varrho\, c^2, \tag{2.56}$$

in der w einen wichtigen dimensionslosen Parameter bezeichnet[7], so erhält man entsprechend für w_Λ

$$w_\Lambda = \frac{p_\Lambda}{\varrho_\Lambda\, c^2} \equiv -1. \tag{2.57}$$

Das Modell mit kosmologischer Konstante verhält sich scheinbar wie eine relativistische Flüssigkeit mit dem w – Parameter $w_\Lambda = -1$.

Eine analoge Betrachtung führen wir jetzt für die Ringdynamik und ihre interne gravitative Dynamik der „Paarfusion " durch. Ein formeller

[7] In der Literatur als w – Parameter oder „EoS" Parameter bezeichnet, da er für die „Equation of State" fundamental ist

Vergleich von (2.30) mit (2.36) und von (2.29) mit (2.37) liefert für den „dunklen“ Energie – und Druckanteil in der Ringdynamik die beiden Analogien

$$\frac{8\pi}{3}\,G\varrho_\Lambda = -\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\,,$$

$$-\frac{8\pi}{3}\,G\,\left(\varrho_\Lambda + 3\,\frac{p_\Lambda}{c^2}\right) = +2\,\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\,.$$

Daraus folgen leicht die beiden Entsprechungen

$$\boxed{8\pi G\,\varrho_\Lambda = -\left(3\,\dot{\varphi}^2 - \frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\right), \quad 8\pi\,G\,\frac{p_\Lambda}{c^2} = -\dot{\varphi}^2.} \tag{2.58}$$

Die formale Gleichsetzung eines *hydrodynamischen Kontinuumsmodelles* (Friedmann Gleichung mit Druckterm) mit einem diskreten kinetisch - gravitativen Punktmassenmodell zeigt durch das vorhergehende Minuszeichen sofort eine Schwierigkeit auf, die dynamischen Zusatzterme im Ringkosmos als Wirkung einer „klassischen Flüssigkeit“ zu verstehen.

Der Druck im Ringmodell rührt offensichtlich nur von dem kinetischen Term $\dot{\varphi}^2$ her, während in der Friedmanngleichung der Druckterm p_Λ/c^2 Teil des Energie-Impulstensors steht, der mit der Gravitationskonstanten G multipliziert eine Quelle des Gravitationsfeldes darstellt. Die Energiedichte im Ringmodell setzt sich zudem aus einem kinetischen Term $3\,\dot{\varphi}^2$, vermindert um einen Term der *gravitativen Wechselwirkungsenergie*, zusammen. Die Interpretation der „kosmologischen Konstanten“ als Wirkung einer „Flüssigkeit“ mit $p_\Lambda < 0$ und $\varrho_\Lambda > 0$ ist somit vom Standpunkt des expandierenden Ringmodelles **ein irreführendes Aperçu und letztendlich falsch.**[8]. Denn die Zusatzterme in unserem Ringkosmos haben nichts mit einer „relativistischen Flüssigkeit mit internem Druck“ zu tun, sondern sind klassische Zusatzterme der energetischen gravitativen Punktmassen-Dynamik im Bild der Newtonschen Gravitation. Obwohl formal ein reduzierter Druckterm der Form $\dot{\varphi}^2$ im Ringmodell auftaucht, ist ein Vergleich zum formal ähnlichen gravitativ wirksamen Term proportional $3\,p/c^2$ in der Einsteinschen Theorie nicht sinnvoll.

[8] siehe insbesondere auch die Diskussion bei Peebles & Ratra in ([147]), die diese Schwierigkeit als Motivation zur Einführung eines alternativen „hypothetischen Quantenfeldes“ ϕ ansahen.

Auch Begriffe wie „Dichte“ oder „mittlere Dichte“, die in einem Kontinuumsmodell mehr oder weniger sinnvoll sind, treten im Teilchenmodell gar nicht auf.

Die Interpretationsschwierigkeiten werden insbesondere durch das Minuszeichen in beiden Analogien (2.58) offenbar: Damit ϱ_Λ in (2.58) positiv ist, muss der Ausdruck in der Klammer - der ja nach Division durch G eine wirkliche *gravitative Energiedichte* ϱ_φ darstellt - *negativ* sein. Der skalare *Druck* p_Λ/c^2 in (2.58) ist dagegen im Ringkosmos mit Paarfusion durch die Relation $p_\Lambda/c^2 = -p_\varphi$ identisch dem *positiven* Druck $p_\varphi \propto \dot{\varphi}^2$, also proportional dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit der Ringteilchen. Im Ringkosmos ist somit der kinetische Druck nicht Teil des Energie-Impulstensors, der als Faktor die Gravitationskonstante G hat. Um diese Ergebnisse im Bild der Einsteinschen Theorie zu verstehen, müssen wir eine klare Definition von *gravitativer Wechselwirkungsenergie* oder einem *globalen Energiesatz* haben.

Aus (2.58) folgt für den Parameter $w_\Lambda \equiv w_\varphi$ die Zustandsgleichung der scheinbaren „*Dunklen Energie*“ im expandierenden Ring zu

$$w_\varphi = \frac{p_\Lambda}{\varrho_\Lambda\, c^2} \equiv \frac{p_\varphi}{\varrho_\varphi}$$

oder

$$\boxed{w = \frac{\dot{\varphi}^2}{3\,\dot{\varphi}^2 - \dfrac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]} \equiv \frac{v^2}{3\,v^2 - \dfrac{3\,GM}{\pi R}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]}} \tag{2.59}$$

mit der Eigengeschwindigkeit $v = R\,\dot{\varphi}$ innerhalb der expandierenden Ringperipherie. Während im Zähler ein positiver kinetischer Term $\dot{\varphi}^2$ (kinetischer Druck $\propto v^2$) auftritt, steht im Nenner die reine *klassische Energiedichte* der Paarfusion im mitbewegten Koordinatensystem (*comoving frame*), bestehend aus dem positiven kinetischen Term $3\,v^2$ abzüglich der negativen Gravitationsenergie, welche durch die Strukturbildung entsteht und mit der Zeit immer stärker wird. Im Nenner steht also nicht eine *negative Massendichte*, wie es Einstein 1918 in einer Auseinandersetzung mit Schrödinger irrig oder spekulativ als physikalische Deutung der Λ Konstanten behauptete.

Man kann in der obigen Formel Zähler wie Nenner mit $R[t]^2$ multiplizieren und erhält dann die relativen Energieanteile im Inertialsystem

(*proper frame*). Der Parameter w_φ kann nur dann *negativ* werden, wenn diese durch Strukturbildung sich bildende Energiedichte *negativ* wird. *Die Interpretation als positive Energiedichte mit negativem Druck ist hier also völlig abwegig.* Das Negativwerden der Energiedichte ist während der Paarfusion eine notwendige Voraussetzung für eine beschleunigte Expansion des Ringkosmos. Ist die Dynamik von φ und R bekannt, so kann dieser Zustandsparameter als Funktion der Zeit berechnet werden. Es wird sich zeigen, dass der Wert und die Zeitabhängigkeit dieses Parameters von der *gravitativen Potentialfunktion* $\mathbf{\Phi}[\varphi]$ bestimmt wird. Wir fassen zusammen:

Aus der obigen Definition von w geht nun klar hervor, dass dieser Parameter nur dann negativ werden kann, wenn der Nenner negativ wird. Der Nenner besteht aus einem positiven kinetischen Term und einem negativen gravitativen Term. Nur wenn diese durch Strukturbildung sich ausbildende gravitative Energiedichte größer als die kinetische Energiedichte wird, ist eine notwendige Bedingung für eine beschleunigte Expansion im Ringkosmos gegeben. Der eigentliche positive Druck entsteht durch die Eigenbewegung der Ringteilchen entlang der expandierenden Ringperipherie. Nicht nur die Massen der Ringteilchen an sich, sondern auch ihr „Impulsstrom", ihr reiner Bewegungszustand längs der Ringperipherie, bestimmt die gravitative Dynamik des Gesamtsystems. Gravitationsfelder und Zentrifugalfelder sind hier ununterscheidbar geworden.

Beide Bilder stehen also in einem gewissen Gegensatz. Der klassische Ringkosmos hat deshalb einen negativen w - Parameter, weil seine *lokale Energiedichte negativ wird*, während nach den Ideen der EINSTEIN'schen Gravitationstheorie mit einem relativistischem Fluid (FLRW - Gleichungen) ein negativer „relativistischer Druck" einer „kosmologischen Konstanten" von Nöten ist. Dies hängt letztendlich auch mit der Frage zusammen, ob der Λ Term mehr auf der linken oder auf der rechten Seite der Einsteinschen Feldgleichung zu stehen hat und welche Vorzeichenkonvention der Materietensor hat ([44, 175]).

Mit den erhaltenen Resultaten können wir zwei unabhängige analytische Formeln für eine zeitabhängige **„Kosmologische Konstante"** $\Lambda[t]$ ableiten. Ein Vergleich der Relationen (2.58) und (2.54) führt zu den notwendigen Bedingungen

$$\Lambda_1[t] = \dot{\varphi}^2, \quad \Lambda_2[t] = \frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi] - 3\,\dot{\varphi}^2 \tag{2.60}$$

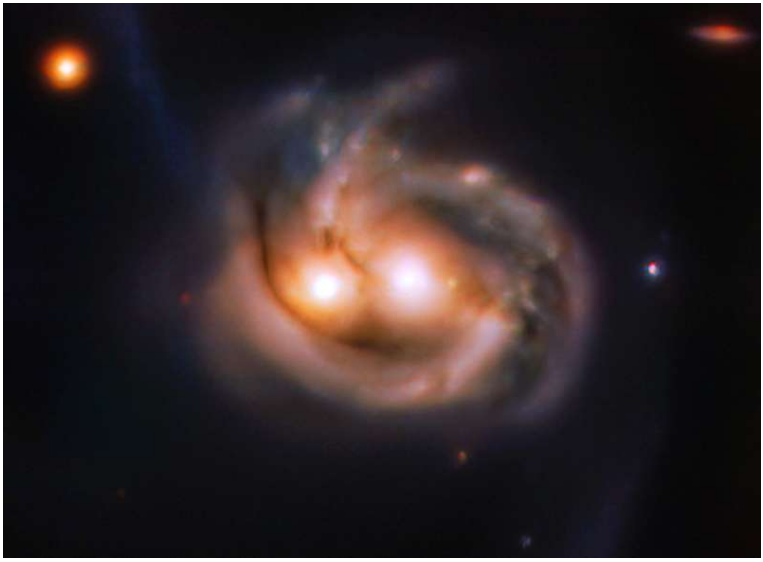


Fig. 2.6: *Die Vereinigung von zwei supermassiven Galaxienkernen im Galaxienkomplex Markarian-739, ähnlich wie Markarian-231 vom Typ -1 Seyfert Galaxie. Solche Fusionsprozesse von Galaxienkernen sind der eigentliche energetische Motor für die beschleunigte Expansion des Universums. Letztendlich definieren diese Prozesse auch einen „Zeitpfeil" in der Entwicklung des Universums. Quelle: (ESO, Tubin et al.)*

Nur wenn diese beiden Zeitfunktionen identisch wären (ihr Verhältnis also 1), käme die dynamische Kopplung zwischen Expansion und Strukturbildung im Ring als Modell für die kosmologische Konstante im Universum in Frage. Außerdem ist deutlich, dass nur ein *anziehendes* Potential ($\mathbf{\Phi}[\varphi] > 0$) diese Bedingung überhaupt erfüllen kann. Ein *abstoßendes* Potential ($\mathbf{\Phi}[\varphi] < 0$) führt in (2.60) zu dem Widerspruch $\Lambda_1 > 0$ und $\Lambda_2 < 0$. Wir werden später sehen, dass selbst im anziehenden Fall $\mathbf{\Phi}[\varphi] > 0$ im expandierenden Ringmodell die Bedingung $\Lambda_1 = \Lambda_2$ *nicht erfüllt werden kann.* Erst in einem erweiterten 3D - Gittermodell mit Expansion ist diese Bedingung unter speziellen Bedingungen erfüllbar.

2.4 Die Entropiegleichung (Energiegleichung) der Paarfusion

Wir können unsere Interpretation der beschleunigten Expansion mit einem **positivem Druck** und einer **negativen Energiedichte** noch deutlicher anhand eines lokalen Erhaltungssatzes untermauern. Neben globalen *makroskopischen* Erhaltungssätzen gibt es bei Vielteilchenphänomenen auch *mikroskopische* Erhaltungssätze oder Bilanzgleichungen. Die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik gehört in diese letztere Klasse. Man kann sich fragen, ob auch in unserem *toy model* „Ringkosmos“ ein mikroskopischer Erhaltungssatz formuliert werden kann. Die *globale Energiegleichung* und die modifizierte Bewegungsgleichung für den Radius R lauteten ja im vorhergehenden Kapitel

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{\epsilon_0}{R^2} = \frac{GM_e}{\pi R^3} + \frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right] - \dot{\varphi}^2 \tag{2.61}$$

und

$$2\,\frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{\epsilon_0}{R^2} = \dot{\varphi}^2. \tag{2.62}$$

Multiplizieren wir einerseits die erste Gleichung (2.61) mit R^3 und differenzieren diese nach der Zeit, so erhalten wir

$$2\,R\,\dot{R}\,\ddot{R} + \dot{R}^3 + \epsilon_0\,\dot{R} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{GM}{\pi}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right] - R^3\,\dot{\varphi}^2\right\}.$$

Multiplizieren wir andererseits (2.62) mit $R^2\,\dot{R}$, so folgt

$$2\,R\,\dot{R}\,\ddot{R} + \dot{R}^3 + \epsilon_0\,\dot{R} = \dot{\varphi}^2\,R^2\,\dot{R}.$$

Die Verbindung beider Gleichungen ergibt zunächst die bemerkenswerte Beziehung

$$\frac{d}{dt}\left\{R^3\,\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{\pi}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right\} + \dot{\varphi}^2\,R^2\,\dot{R} = 0. \tag{2.63}$$

Diese Gleichung kann sofort in die klassische *thermodynamische* Form ($-\pi/N < \varphi < +\pi/N,\ \xi = \varphi/(2\pi/N)$)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left\{\left(3\,\dot{\varphi}^2 - \frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right)R^3\right\} + \dot{\varphi}^2\,\frac{d}{dt}\left\{R^3\right\} = 0.} \tag{2.64}$$

umgeschrieben werden. Der Faktor 3 ist hier eine Konvention, um die *spezifische Energieeichung* physikalisch mit den relativistischen Friedmanngleichungen in Einklang zu bringen. WEINBERG notiert in seinem Buch von 1972 im Kapitel 15 über *Cosmology* ([211]) eine analoge Gleichung für eine relativistische Flüssigkeit , die er irreführend als eine *„Energieerhaltungsgleichung“* bezeichnet. Die Gleichung (2.64) drückt in unserem *reversiblen adiabatischen Ringkosmos* aber nicht die globale Energieerhaltung, sondern die lokale Erhaltung der *Entropie (Energie)* in der klassischen Form

$$T\,d\mathbf{S} = d\{\varrho\,c^2\,V\} + p\,dV = d\,U + p\,dV \equiv 0 \tag{2.65}$$

aus, wobei hier $U = \varrho_\epsilon\,V$ die innere Energie und V das Volumen des Systems bedeuten. In Analogie gilt hier jetzt

$$p_\varphi = \dot{\varphi}^2, \qquad \varrho_\varphi = 3\,\dot{\varphi}^2 - \frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\,. \tag{2.66}$$

Daraus ergibt sich wieder der schon früher abgeleitete EOS-Parameter w des Ringkosmos zu

$$w = \frac{p_\varphi}{\varrho_\varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2}{3\,\dot{\varphi}^2 - \dfrac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]}. \tag{2.67}$$

Das Modellsystem verhält sich somit **isentropisch - adiabatisch**. Der „Druck“ p_φ ist in (2.64) identisch gleich $\dot{\varphi}^2$ und somit im selbstgravitierenden Ringkosmos manifest *positiv*. Und dies ist somit die Differentialgleichung, welche EINSTEIN 1918 bei seiner Antwort auf die Arbeit von SCHRÖDINGER für den Druckterm im Energie - Impulstensor auf der rechten Seite der Feldgleichung gefordert hatte (siehe ([175], [44]). Und diese Gleichung ist nicht durch ein „Gestrüpp“ von Hypothesen entstanden, sondern folgt zwingend aus ersten Prinzipien.

In der allgemeinen Relativitätstheorie gilt *rein formal* eine identische lokale Bilanzgleichung für eine *ideale relativistische Flüssigkeit*, abgeleitet aus einer zweifach kontrahierten *Bianchi - Identität* und den gravitativen Feldgleichungen. Mit den relativistischen *Friedmann-Lemaître* Gleichungen mit einem Druckterm p ergibt sich so im Falle isotroper Dichte und mit der Skalenlänge R

$$\frac{d}{dt}\left\{\varrho\,c^2\,R^3\right\} + p\,\frac{d}{dt}\left\{R^3\right\} = 0. \tag{2.68}$$

Durch teilweises Ausdifferenzieren nimmt die *Entropiegleichung* (2.64) die alternative Form einer *Enthalpiegleichung* ($H = U + pV$, $\varphi = N\varphi/(2\pi)$)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left\{3\,\dot{\varphi}^2 - \frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\right\} = -3\,\frac{\dot{R}}{R}\,\left\{4\,\dot{\varphi}^2 - \frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\right\}} \tag{2.69}$$

an. Die relativistische Analogie im *Druck - Dichte Bild* einer *relativistischen Flüssigkeit* lautet entsprechend ([147],[178])

$$\frac{d}{dt}\left\{\varrho\,c^2\right\} = -3\frac{\dot{R}}{R}\,\left\{p + \varrho\,c^2\right\}. \tag{2.70}$$

Man sieht hier, dass der Term $\varrho\,c^2$ keine *Massendichte*, sondern eine *Energiedichte* beschreibt. In der Literatur wird nun häufig argumentiert, dass man bei dem kosmischen Gas von Galaxien im Universum ihren Druck p, also das Quadrat ihrer Dispersionsgeschwindigkeiten relativ zur Raumexpansion, gegenüber der Energiedichte $\varrho\,c^2$ vollständig vernachlässigen kann ($p \ll \varrho\,c^2$). Doch in den obigen Bilanzgleichungen kommt es nicht auf die *absoluten Größen* der physikalischen Variablen, sondern nur auf ihre zeitliche Veränderungen an. Denn bekanntlich gilt ja

$$m\,c^2 \equiv \frac{m_0\,c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = m_0\,c^2 + \frac{1}{2}\,m_0\,v^2 + \ldots$$

Bei einer zeitlichen Änderung spielt so nur noch die klassische kinetische Energie, nicht aber die alles übersteigende Ruheenergie $m_0\,c^2$ für die Energiedichte eine entscheidende Rolle. Allerdings taucht der Term $\varrho\,c^2$ auch auf der rechten Seite der Gleichung auf. Zudem entsteht beim Vergleich von (2.70) und (2.69) ein neues Problem:

> *Wie kann man im Bild der Einsteinschen Gravitation die gravitative Wechselwirkungsenergie von „black holes " bei Verdichtungen mathematisch streng definieren und im Rahmen dieser metrischen Theorie konsistent berücksichtigen?*

Offensichtlich kann die Dynamik des Ringkosmos mit Paarbildung nicht zwanglos durch ein naives Flüssigkeitsmodell beschrieben werden. Auf dieses Problem kommen wir noch häufiger zurück.

Man kann den Bilanzgleichungen (2.64) oder 2.69) noch eine dritte Form geben. Durch Umschreiben von (2.64) folgt zunächst

$$\frac{d}{dR}\left\{R^3\left(\dot{\varphi}^2-\frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right)\right\}=-R^2\dot{\varphi}^2. \tag{2.71}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(3\,\dot{\varphi}^2-\frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right)R^3\right\}=-\frac{d}{dt}\left\{R^3\right\}\,\dot{\varphi}^2. \tag{2.72}$$

Wegen

$$\frac{d}{dt}\left\{R^3\,\dot{\varphi}^2\right\}=\frac{d}{dt}\left\{R^3\right\}\,\dot{\varphi}^2+R^3\,\frac{d}{dt}\left\{\dot{\varphi}^2\right\}$$

erhalten wir die dritte Form

$$\boxed{R^3\,\frac{d}{dt}\left\{\dot{\varphi}^2\right\}=\frac{d}{dt}\left\{\left(4\,\dot{\varphi}^2-\frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right)R^3\right\}.} \tag{2.73}$$

Die analoge Form für eine relativistische Flüssigkeit lautet

$$R^3\,\frac{dp}{dt}=\frac{d}{dt}\left\{\left(p+\varrho\,c^2\right)R^3\right\}. \tag{2.74}$$

Mit dieser Energiebilanz wird es später möglich sein, die *steady state theory* von F. Hoyle aus dem Jahre 1948 aufgrund ihrer „Energieverletzung“ als physikalisch falsch zu beurteilen.

Die mathematische Form der Entropiegleichung (2.64) im Ringkosmos entspricht somit mathematisch formal der obigen allgemeinen Bilanz (2.68). Sie drückt die lokale Energiebilanz einer Flüssigkeit aus, die adiabatischer Expansion oder Kontraktion unterworfen ist. Anschaulich kann dies interpretiert werden mit „Gasmolekülen“ („Galaxien“), die in einem Zylinder mit beweglichen Kolben eingeschlossen sind. Wenn sich der Kolben verschiebt und keine Wärmemenge nach außen abgegeben oder von dort aufgenommen wird, ändert sich das Volumen V um $\Delta\,V$ und die innere Energie $U=\varrho\,V$ um den Betrag $p\,\Delta\,V$ der mechanischen Arbeit des Kolbens. Da diese Arbeit gegen den Gasdruck zu leisten ist, gilt $\Delta(\varrho\,V)=-p\,\Delta V$ oder eben die Gleichung (2.68). D. Layzer schrieb zur Bedeutung dieser *„getarnten Entropiegleichung“* 1966 ([106]):

Equation (2.68) is formally identical with the energy balance equation for a fluid undergoing adiabatic expansion or contraction; in an expanding universe the energy content of a co-moving element of volume decreases just as if the element were doing work on the surrounding gas. Yet symmetry considerations insure that there is no net flow of energy (or any other quantity) through any co-moving surface. This paradox[9] *makes it difficult to accept the conventional interpretation of equation (2.68) at face value. If the first law of thermodynamics is applicable, we should expect that* $\varrho_\epsilon\, a^3 = const.$*; if energy is not conserved – and equation (2.68) indicates that it is not – then the first law of thermodynamics is inapplicable, and we have no basis for equation (2.68).*

Existieren in einem abgeschlossenen System irreversible Prozesse wie „*Reibung*“, wird „Wärme“ erzeugt und die Entropie des Systems nimmt zu. Es gilt dann

$$T\, d\mathbf{S} = d\left\{\varrho_\epsilon\, V\right\} + p_\epsilon\, dV \geq 0$$

Die Gleichung (2.64) zeigt nun, dass in unserem speziellen Ringmodell die *Entropieänderung* aufgrund fehlender „Reibung“ null ist - also konstant bleibt. Die obigen Überlegungen führten aber Layzer (1925-2019) in den 1970er Jahren dazu, das Konzept einer stetig wachsenden Entropie in einem offenen und expandierenden Universum einzuführen (*Zeitpfeil*[10]). Dabei wächst die maximal mögliche Entropie schneller an als die wirklich realisierte Entropie, so dass sich *Strukturen* im expandierenden Universum bilden können. Die Entstehung von *Information* entspricht dann dem Wachstum einer *„negativen Entropie“*. Entgegen dem *Laplaceschen Dämon* bleibt somit die Information im expandierenden Universum nicht konstant, sondern wächst stetig an. Ob es hier ein „Maximum der Entropie“ gibt, bleibt allerdings unklar.

Es ist wichtig, hier einen direkten Übergang zu den *Einstein'schen Feldgleichungen* zu schaffen. Es lohnt sich, aus einem anderen Blickwinkel die enge Analogie zwischen dem Newtonschen Bild und dem Einsteinschen

[9] Die Auflösung dieses scheinbaren Paradoxon wurde von E. Schrödinger im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie gezeigt, weil man nach dem Äquivalenzprinzip der Einstein'schen Theorie nicht streng von einer lokalen Energieerhaltung sprechen kann ([176]).

[10] Der Begriff stammt ursprünglich von A. Eddington

Bild der Gravitation bei der Dynamik des Ringkosmos zu beleuchten. Wir definieren jetzt für den spezifischen *„Druck“* und *„Energie“* die Ausdrücke

$$\varrho_E = 3\,\dot{\varphi}^2 - \frac{3\,GM_e}{\pi R^3} - \frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\,, \tag{2.75}$$

$$p_E = \dot{\varphi}^2. \tag{2.76}$$

Diese Energieterme genügen der gegenüber (2.64) erweiterten Energie-Entropiegleichung

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(3\,\dot{\varphi}^2 - \frac{3\,GM_e}{\pi R^3} - \frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\right)R^3\right\} + \dot{\varphi}^2\,\frac{d}{dt}\left\{R^3\right\} = 0, \tag{2.77}$$

da der *homogene Term der Dichte des Hintergrundes* proportional M_e/R^3, multipliziert mit R^3, zeitlich konstant bleibt.

Die im *Newtonschen Bild* erhaltenen vier Gleichungen (2.29), (2.31), (2.34) und (2.30) wollen wir jetzt noch „plakativer“ als Grenzfall der *Einsteinschen Theorie* niederschreiben. Wir wollen gewissermaßen von der Newtonschen Theorie zu den Einsteinschen Gleichungen „ in enger Analogie zu den Friedmann- Gleichungen aufsteigen“. Dann muss für die *Zeit-Zeit Komponente* aus den Einsteingleichungen in der Newtonschen Näherung die Relation

$$\boxed{-R\,\ddot{R} + R^2\,\dot{\varphi}^2 = \frac{G}{2\pi}\left\{\frac{M_e}{R} + \frac{M}{R}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\right\}} \tag{2.78}$$

folgen. Man sieht hier sehr prägnant, dass der Term $R^2\,\dot{\varphi}^2$ nicht Teil des *Energie-Impulstensors* sein kann, da ja alle Quellterme auf der rechten Seite der Einsteinschen Gleichungen proportional zur Gravitationskonstanten G sein müssen. Der Term muss somit Teil der Metrik im Einstein-Tensor sein[11].

Die *Raum-Raum Komponente* des Ringkosmos nach den Einsteinschen Gleichungen müsste in der Newtonschen Näherung entsprechend

$$\boxed{R\,\ddot{R} + 2\,\dot{R}^2 + R^2\,\dot{\varphi}^2 + 2\,\epsilon_0 = \frac{3\,G}{2\pi}\left\{\frac{M_e}{R} + \frac{M}{R}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\right\}.} \tag{2.79}$$

[11] Eine direkte Herleitung der exakten Gleichungen aus der Einsteinschen Theorie wäre hier wünschenswert.

lauten. Die gemischten *Raum-Zeit* Komponenten der Einsteingleichungen müssen sich im Newtonschen Grenzfall auf $0 = 0$ reduzieren. Die Einsteinsche Feldtheorie liefert somit auch hier nur diese zwei Gleichungen (2.78,2.79) für die Dynamik des „Ringkosmos“ in der angenommenen Strukturs symmetrie. Die Energiegleichung (2.61) und die Energie-Entropiegleichung (2.64) sind automatisch Bestandteil dieser zwei Grundbeziehungen.

Das Fazit dieser Analogie ist nun, dass die positive Größe $\dot{\varphi}^2$ aufgrund der Entropiegleichung einen *positiven metrischen Druck* und die Größe $3\,\dot{\varphi}^2$ eine positive kinetisch-metrische Energiedichte darstellt. Dies ist damit eine Erweiterung zum klassischen *Energie-Impulstensor*, der für eine Flüssigkeit in der Form $\varrho + 3\,p/c^2$ ausgedrückt werden kann. Doch die Größe p/c^2 kann aber in unserem Teilchen-Modell vollständig vernachlässigen ([133],[224]). Gegenüber den homogenen Friedmanngleichungen werden die Einsteingleichungen für den heterogenen Ringkosmos sowohl auf der linken wie auf der rechten Seite erweitert.

Damit man also die Ergebnisse im Bild einer hydrodynamischen Flüssigkeit deuten kann, muss für die Energiedichte $\varrho_\Lambda \equiv -\varrho_\epsilon > 0$ gelten (siehe auch (2.60)), der Druck aber $p_\Lambda \equiv -p_\epsilon$ negativ sein! Genauso hat dies schon SCHRÖDINGER in seiner Arbeit von 1917 gefordert ([175]). EINSTEIN dagegen deutet den Zusammenhang aber mehr im Bild einer gravitativen *Rückkopplung*, was unseren Ergebnissen wesentlich besser entspricht. Später werden wir zeigen, dass der expandierende Teilchenring mit Paarfusion die **negative Energiebedingung** $\varrho_\epsilon < 0$ tatsächlich erfüllt. Sehr einfach lässt sich dann auch die Zustandsgleichung $w \equiv p_\epsilon/\varrho_\epsilon$ aus den obigen Definitionen ableiten. Die sogenannte „*Dunkle Energie*“ hat also nichts mit „*Vakuumenergie einer relativistischen Flüssigkeit*“, sondern allein mit „*dynamischer Strukturbildung*“ und lokaler *negativer gravitativer Energiedichte* zu tun.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch die Bewegungsgleichung des Ringmodelles in einer Form schreiben, in der die Bedeutung des w - Parameters und der Grad der Verdichtung für die beschleunigte Expansion sehr schön zum Ausdruck kommt. Lösen wir die Definition (2.59) für w nach $\dot{\varphi}^2$ auf und setzen diesen Ausdruck in die Bewegungsgleichung für R (z.B. (2.29)) ein, so folgt nach etwas Umformung die bemerkenswerte

Beziehung

$$\boxed{\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{GM_e}{2\,\pi R^3}\left\{1 + \frac{1+3\,w}{1-3\,w}\,\frac{M}{M_e}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\right\}.} \tag{2.80}$$

Obwohl wir noch keine konkreten Aussagen zum numerischen Wert von w gemacht haben, können wir aus dieser wichtigen Beziehung schon sehr wichtige Schlüsse zum dynamischen Verhalten des „Ringkosmos“ machen. Eine beschleunigte Expansion ist offensichtlich nur dann möglich, wenn die geschweifte Klammer negative Werte annimmt. Da M_e, M und $\mathbf{\Phi}\,[\varphi]$ positive Größen sind, ergeben sich nur die beiden Möglichkeiten

$$w < -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \qquad w > +\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}.$$

Die Fälle $w \geq +1/3$ sind im 1D-Ringkosmos irrelevant und werden hier auch nicht betrachtet. Es bleibt also nur $w < -1/3$, die klassische Bedingung für beschleunigte Expansion. Doch man sieht in (2.80), dass dieser Bereich nur eine **notwendige**, keineswegs eine **hinreichende** Bedingung für beschleunigte Expansion darstellt. Erst wenn die Potentialfunktion $\mathbf{\Phi}[\varphi]$ einen kritischen Schwellenwert überschreitet, setzt wirklich eine beschleunigte Expansion ein. Die Paarkollision muss also schon kurz bevorstehen ($\varphi \to \pi/N$), wenn diese kritische Schwelle erreicht werden soll. Man muss nur noch die Lösungen für $R[t]$ und $\varphi[t]$ kennen, um damit $w \to w[t]$ zu berechnen.

Die Gleichung (2.80) ist in mehrfacher Hinsicht bemerkenswert. Man sieht sehr schön, dass das notwendige Kriterium $w < -1/3$ für beschleunigte Expansion in einfacher Weise aus einem N-Teilchen Modell der *Newtonschen Theorie der Gravitation* folgt - die *Einsteinsche Theorie* schließt dieses Ergebnis zwar ein, ist aber für ein Verständnis hier nicht zwingend notwendig. In der Einsteinschen Theorie ist im Falle einer Flüssigkeit der Term $\varrho + 3\,p/c^2$ für eine beschleunigte Expansion verantwortlich. Doch in unserem „Teilchenmodell“ ist der Druckterm p/c^2 im Newtonschen Grenzfall völlig irrelevant.

Auch die Energiegleichung (2.30) kann im Falle $\epsilon_0 = 0$ in der Form

$$\boxed{\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{GM_e}{\pi R^3}\left\{1 + \frac{M}{M_e}\,\frac{\mathbf{\Phi}[\varphi]}{1-3\,w}\right\}} \tag{2.81}$$

geschrieben werden. Auch hier zeigt sich, dass nur für $w > +1/3$ ein zeitweiser Stillstand der Ringexpansion möglich wäre. Alles dies sind konsistent schöne Resultate.

2.5 Die Layzer - Irvine Gleichung

Der Entropiegleichung (2.64) kann man eine andere differentielle Form geben, die in unmittelbaren Zusammenhang mit dem erweiterten *Virialsatz* des Vielteilchensystems steht. Zunächst haben wir wieder die Energie - Impuls Bilanz

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right) R^3\right\} + R^2\,\dot{R}\,\dot{\varphi}^2 = 0. \tag{2.82}$$

Diese Gleichung kann zunächst umgeschrieben werden in

$$\frac{d}{dt}\left\{R^2\,\dot{\varphi}^2\right\} - \frac{GM}{\pi R}\,\frac{d}{dt}\left\{\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right\} + \frac{\dot{R}}{R}\left\{2\,R^2\,\dot{\varphi}^2\right\} = 0. \tag{2.83}$$

Nun gilt aber auch

$$\frac{d}{dt}\left\{\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right\} = R\,\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{R}\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right\} + \frac{\dot{R}}{R}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]. \tag{2.84}$$

Einsetzen in die obige Gleichung führt nach einiger Reduktion auf die endgültige Energie - Virialgleichung

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\,R^2\,\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{2\pi R}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right\} + \frac{\dot{R}}{R}\left\{R^2\,\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{2\pi R}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right\} = 0.} \tag{2.85}$$

Diese Gleichung ist die spezielle **Layzer-Irvine Virialgleichung** für den expandierenden Ring mit interner „Paarfusion ". Es gilt somit im *„Inertialsystem" (proper frame)*[12] weder der für ein abgeschlossenes System gültige reine Energiesatz[13] noch der klassische Virialsatz, sondern beide werden in bestimmter Weise kombiniert. In anderem Zusammenhang

[12] Größen wie $R\,\dot{\varphi}$ gehören dem Eigensystem (*proper frame*) an, während $\dot{\varphi}$ allein das *comoving frame* repräsentiert.

[13] Der „Energiesatz" bezieht sich hier nur auf den heterogenen Teil des Ringkosmos

wurde eine ähnliche Gleichung schon von W. Irvine 1961 (Dissertation Harvard University) und D. Layzer 1963 formuliert ([84],[105]).[14] Definiert man jetzt im inertialen Koordinatensystem (*proper frame*) die Energiedichten pro Masse[15]

$$E_{kin} = \frac{1}{2} R^2 \, \dot{\varphi}^2 \equiv \frac{1}{2} \, v^2, \quad E_{pot} = -\frac{GM}{2\pi R} \, \mathbf{\Phi} \, [\varphi] \, , \tag{2.86}$$

so lautet die *Layzer-Irvine* Gleichung in allgemeinerer Form

$$\boxed{\frac{d}{dt} \{E_{kin} + E_{pot}\} + \frac{\dot{R}}{R} \, \{2 \, E_{kin} + E_{pot}\} = 0.} \tag{2.87}$$

Die Änderung der lokalen Energiedichte wird hier mit der globalen Expansion und dem lokalen Virialtheorem in Beziehung gesetzt. Wichtig ist hier, dass die Größe $\dot{R}/R \equiv H$ (*Hubble-Lemaître Parameter des expandierenden Ringes*) keine vorgegebene Funktion der Zeit ist. Interne Strukturbildung und globale Expansion sind dynamisch gekoppelte Vorgänge.

Man kann der Layzer-Irvine Virialgleichung verschiedene Formen geben. Eine dieser Formen ergibt sich aus (2.87), wenn man diese mit R multipliziert. Durch Umschreiben nimmt sie dann die Form

$$\boxed{\frac{d}{dt} \{R \, (E_{kin} + E_{pot})\} + \dot{R} \, E_{kin} = 0} \tag{2.88}$$

an. Da der zweite Term der Gleichung in einem expandierenden Universum immer *positiv* ist, folgt daraus immer die zeitliche Abnahme der Gesamtenergiedichte $E_{kin} + E_{pot}$. Doch wohin wird diese Energie transferiert? Im Ringkosmos ist die Antwort eindeutig: In die Expansion des Ringradius R (Skalenfaktors). Auf diesen Sachverhalt kommen wir noch mehrfach zurück.

---

[14] David Layzer (1925-2019) war „Donald H. Menzel Research Professor of Astrophysics“ an der Harvard Universität und seit 1997 Emeritus. Er hat einige ausgezeichnete Bücher wie *Constructing the Universe* (Freeman, 1984) und *Cosmogenesis* (Oxford University Press, 1989) geschrieben.

[15] Für die Geschwindigkeit im mitbewegten Koordinatensystem (*comoving frame*) wäre auf der expandierenden Ringperipherie statt $R\,\dot{\varphi}$ nur $\dot{\varphi}$ relevant

Es ist natürlich auch möglich, die LAYZER - IRVINE Virialgleichung wieder in die Entropiegleichung (2.64) rückzutransformieren. Hierzu teilen wir (2.85) durch R^2. Wegen

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{R}\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{R^3}\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right\} + 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)\frac{1}{R^3}\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]. \quad (2.89)$$

und

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}R^2\dot{\varphi}^2\right\} = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\right\} \quad (2.90)$$

ergibt sich nach Multiplikation mit 6 in der Einstein-Eichung des Energietensors wieder die *Enthalpiegleichung* (2.69)

$$\frac{d}{dt}\left\{3\,\dot{\varphi}^2 - \frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right\} + 3\frac{\dot{R}}{R}\left\{4\,\dot{\varphi}^2 - \frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right\} = 0. \quad (2.91)$$

Definiert man nun die Energiedichten pro Masse

$$\epsilon_{kin} = 3\,\dot{\varphi}^2, \qquad \epsilon_{pot} = -\frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right], \quad (2.92)$$

so gilt anstatt (2.91)

$$\frac{d}{dt}\left\{\epsilon_{kin} + \epsilon_{pot}\right\} + 3\,\frac{\dot{R}}{R}\left\{\frac{4}{3}\,\epsilon_{kin} + \epsilon_{pot}\right\} = 0. \quad (2.93)$$

Diese Gleichung kann wiederum umgeschrieben werden in die klassische Energiebilanz

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\epsilon_{kin} + \epsilon_{pot}\right)R^3\right\} + \frac{1}{3}\,\epsilon_{kin}\,\frac{d}{dt}\left\{R^3\right\} = 0 \quad (2.94)$$

Zum Abschluss dieses Kapitels soll der **Layzer-Irvine** Virialgleichung des expandierenden Teilchenringes mit Paarfusion noch eine alternative Form gegeben werde, wodurch sie auf eine von BUCHERT angegebene Integrabilitätsbedingung reduziert werden kann ([15]). Werden in die Entropiegleichung oder in die LAYZER - IRVINE Gleichung die von BUCHERT definierten Größen (2.111), übertragen auf die Ringdynamik mit Paarfusion , eingesetzt, so gilt jetzt entweder

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\mathcal{Q} + \mathcal{R}\right)\,R^3\right\} + \frac{1}{3}\,\left(3\mathcal{Q} - \mathcal{R}\right)\,\frac{d}{dt}\left\{R^3\right\} = 0 \quad (2.95)$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left\{R^2\,(\mathcal{Q}+\mathcal{R})\right\}+\frac{\dot{R}}{R}\left(4\,R^2\,\mathcal{Q}\right)=0. \tag{2.96}$$

Ein Vergleich von (2.92) und (2.111) führt ganz nebenbei zu den interessanten Identitäten

$$\begin{aligned} 2\,\epsilon_{kin}+\epsilon_{pot} &= 6\,\dot{\varphi}^2-\frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi] \\ &= 2\,\mathcal{Q}, \end{aligned} \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{kin}+\epsilon_{pot} &= 3\,\dot{\varphi}^2-\frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi] \\ &= \frac{1}{2}\,(\mathcal{Q}+\mathcal{R}), \end{aligned} \tag{2.98}$$

Somit hängt zum Beispiel das nach Layzer - Irvine definierte Virial pro Masseneinheit *im mitbewegten Koordinatensystem* direkt mit der nach Buchert definierten *kinematischen Rückkopplung* $\mathcal{Q}$ (**backreaction**) zusammen.

Differenziert man nun die beiden Gleichungen aus und multipliziert die erste mit R^3, die zweite mit R^3, so erhält man übereinstimmend in beiden Fällen

$$\boxed{R^{-6}\,\frac{d}{dt}\left\{R^6\,\mathcal{Q}\right\}+R^{-2}\,\frac{d}{dt}\left\{R^2\,\mathcal{R}\right\}=0.} \tag{2.99}$$

Genau diese Beziehung ist aber die *Integrabilitätsbedingung* der Größen $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$ nach Buchert ([15]). Die Gleichung ist somit nichts anderes als eine andere Form der Entropiegleichung oder der **Layzer-Irvine** Gleichung in speziell modifizierten *thermodynamischen* Variablen. Sie bringt hier eine Kopplung der *Dichteschwankungen* mit den *Krümmungsschwankungen* im expandierenden Medium zum Ausdruck. Allerdings ist der *Buchert-Formalismus* nicht geschlossen, man benötigt eine Beziehung zwischen $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$, die aber nicht *a priori* bekannt ist und auch nicht aus dem Formalismus folgt.

2.6 Erwin Schrödinger und die Λ-Konstante

Schon vier Jahre, bevor FRIEDMANN seine dynamischen Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen vorlegte, sandte im November 1917 E. SCHRÖDINGER (1887-1961) an die *Physikalische Zeitschrift* eine bemerkenswerte Notiz ein, welche durch eine Modifikation des Energietensors in den Feldgleichungen der von EINSTEIN eingeführten kosmologischen Konstanten eine andere physikalische Bedeutung zuwies ([175]). Diese Arbeit und die direkte Antwort von EINSTEIN könnte man als die ersten bemerkenswerten Spekulationen in Richtung der oben erwähnten heutigen „Quintessenz" - Modelle ansehen. Zunächst soll hier die Idee von SCHRÖDINGER in Auszügen zitiert werden ([175]):

> *Vor einiger Zeit hat Herr Einstein ein System von Energiekomponenten der Materie $T^{\mu\nu}$ und von Schwerepotentialen $g_{\mu\nu}$ angegeben, welches die allgemein kovarianten Feldgleichungen exakt integriert und von welchem er vermutet, daß es eine Annäherung an die tatsächliche Struktur der Materie und des Raumes im großen darstellt. Es handelt sich, kurz gesagt, um ruhende inkohärente Materie, welche ein dreidimensionales, in sich geschlossenes Raumkontinuum von endlichem Gesamtinhalt und den metrischen Eigenschaften einer Hypersphäre in gleichmäßiger Dichte erfüllt (bildet). Für die Feldgleichungen wird aber dabei eine gegen die ursprüngliche etwas abgeänderte Gestalt vorausgesetzt.*
>
> *Die Konzeption des in sich geschlossenen Gesamtraums scheint mir für die allgemeine Relativitätstheorie von ganz außerordentlicher Bedeutung, und zwar nicht nur – und nicht hauptsächlich – wegen des* ***Verödungseinwandes****, von welchem Herr Einstein ausgegangen war; den Hauptwert lege ich vielmehr darauf, daß die allgemeine Relativitätstheorie durch Weiterführung dieses Gedankens das zu werden verspricht, was ihr Name besagt und was sie – nach meiner Ansicht – bisher nur formal, nur sozusagen auf dem Papier gewesen ist.*
>
> *Unter diesen Verhältnissen ist es wohl nicht ohne Interesse, zu bemerken, daß das völlig analoge System von Lösungen auch schon für die Feldgleichungen in ihrer ursprünglichen Gestalt – ohne die von Herrn Einstein L.c. hinzugefügten Glieder*

> – *existiert. Der Unterschied ist äußerlich ganz geringfügig: Die Potentiale bleiben ungeändert, nur der Energietensor der Materie erhält eine andere Gestalt.*

Einstein war bei seiner Diskussion 1916 zunächst von einem lokalisierten Universum in einem unendlichen euklidischen Raum ausgegangen. Gegen diese Annahme spricht aber der so genannte *Verödungseinwand*, nach dem im Laufe der Zeit immer wieder Sterne (von Galaxien war damals noch nicht die Rede) durch enge Begegnungen ins räumlich Unendliche *abdampfen* können[16].

Schrödinger sieht aber die Wirkung des kosmologischen *Lambda Terms* nicht auf der linken Seite der Einsteinschen Feldgleichungen, sondern auf der rechten Seite der Gleichung. Auf der linken Seite steht der Einsteintensor, auf der rechten Seite der Feldgleichung aber der *Energie - Impuls Tensor*, welcher die Eigenarten des konkreten physikalischen Systems beschreibt. Diese mathematische Modifikation oder Neu-Interpretation ist mit Blick auf das expandierende N-Teilchen Ringmodell nur natürlich. Denn auch in unserem Ringmodell wird ja auch nicht die Newtonsche Gravitation modifiziert, sondern die neu hinzugekommene innere Dynamik der Ringteilchen (Paarfusion) modifiziert die Energie - Impulsbilanz des Gesamtsystems und damit auch seine Expansionsdynamik.

Etwas später schreibt Schrödinger zur Einführung eines *negativen Druckes* (Zugspannung):

> *Jene Ansätze kommen also darauf hinaus, die Materie im großen unter dem Bild einer kompressiblen, ruhenden Flüssigkeit von konstanter Dichte und konstantem, räumlich isotropem inneren Zug vorzustellen, welch letzterer* ***einem Drittel der Ruhedichte der Energie*** *gleich sein muss. Vom Standpunkte der alten Theorie, welche ja bei Einstein bekanntlich die Rolle der ersten Näherung spielt, befremdet es keineswegs, daß ein Spannungszustand dieses Vorzeichens in einer Materie vorhanden gedacht werden muss, welche über ungeheure Räume gleichmäßig aus gebreitet ist und auf sich selbst nach dem Newtonschen Kraftgesetz einwirkt.*

[16] Schwarzschild und nach Ihm S. Chandrasekhar haben diese Modellvorstellung auf die Lebenszeit von Kugelhaufen angewendet

In einer Fußnote bemerkt dann SCHRÖDINGER bezüglich des obigen Faktors 1/3: *Beiläufig sei daran erinnert, daß dies auch der Absolutbetrag des Lichtdruckes ist; das Vorzeichen ist aber entgegengesetzt!*. Hier antizipiert SCHRÖDINGER indirekt schon den EoS-Parameter w nach der allgemeinen Formel (2.59), nach der für ein Photonengas tatsächlich $w = +1/3$ sein muss. Ich werde später anhand eines expandierenden 3D-Gittermodelles zeigen, dass der von SCHRÖDINGER diskutierte Fall $w = -1/3$ genau den kritischen Schwellwert zur beschleunigten Expansion darstellt. Am Ende seiner Veröffentlichung macht SCHRÖDINGER einige interessante Bemerkungen im Geiste von E. MACH (1838-1916) zu der Tatsache, dass die Gesamtmasse im Kosmos verschwindet:

> *...Erstens einmal muss man von einer Theorie, in welcher auch der Begriff der Masse relativ, d. h. nur durch die Wechselbeziehungen der Körper bestimmt sein soll, geradezu erwarten, wenn, nicht fordern, daß sie jedenfalls die Gesamtmasse der Welt zum Verschwinden bringt. Daß der Massenausdruck in unserem Falle nicht nur in Summa, sondern in jedem einzelnen Punkt verschwindet, ist offenbar nur eine Folge der Fiktion, daß die Materie exakt ruhend und völlig gleichmäßig über den Raum verteilt sei. Es scheint mir ganz im Geiste der Massenrelativitätsforderung gelegen, sich zu denken, daß die Wechselwirkungsfunktion, die wir als träge oder schwere Masse bezeichnen, erst durch Abweichungen von jener gleichförmigen, zeitlich konstanten Verteilung zustande kommt bzw. in Erscheinung tritt; und es schadet gar nichts, daß für die gleichförmige ruhende Verteilung, in welcher die Masse sich ohnedies weder als träge noch als schwere „betätigen" könnte oder würde, der Massenausdruck verschwindet.*
>
> *Natürlich erwächst nunmehr die Aufgabe, die wirklichen, empirischen Vorgänge für einzelne konkrete Fälle sozusagen durch Variation dieses höchst einförmigen, „inerten" Integralsystems zu gewinnen. Dann – und erst dann – würde, nach meinem Gefühl, die allgemeine Relativitätstheorie jene Forderungen wirklich erfüllen, welche zu ihrer Entstehung die logische Veranlassung waren...*

Die von SCHRÖDINGER so erwähnte Aufgabe ist allerdings auch nach einhundert Jahren noch immer nicht konsequent durchgeführt worden.

Fig. 2.7: *Die berühmte fünfte Solvay Konferenz im Jahre 1927 in Brüssel über Photonen und Elektronen, an der bedeutende Physiker und Chemiker des frühen 20. Jahrhunderts teilnahmen.* SCHRÖDINGER *steht hier in der dritten Reihe direkt hinter Einstein. Auch Lemaître hielt hier seinen Vortrag über das expandierende Universum aus einem „Uratom". (Foto von Sanna Dullaway coloriert).*

Bezüglich der Λ - Konstante vertritt er mit leichten Modifikationen die Formeln (2.54) und ihre Interpretationen. Die Forderung von SCHRÖDINGER, dass der Massenausdruck im gleichförmigen Universum verschwindet, werden wir später in die Forderung umschreiben, dass die Gesamtenergie des Universums auch im strukturierten Zustand immer exakt Null ist.

Sehr interessant ist nun die Reaktion von EINSTEIN vom März 1918 auf diese *Neuinterpretation der Lambda - Konstante*[17] in derselben Ausgabe der *Physikalischen Zeitschrift*([44]). Ich möchte sie hier ebenfalls im Wortlaut fast vollständig wiedergeben:

> *Die von Herrn Schrödinger angegebene Variante zu meiner Darstellung für das kosmische Gravitationsfeld hatte auch ich als die am nächsten liegende Möglichkeit bei Abfassung meiner Arbeit natürlich in Betracht gezogen. Aber ich muss gestehen, daß mir diese mögliche Auffassung einer Erwähnung nicht wert schien.*
>
> *In der Sprache der Newtonschen Theorie kann das zu lösende Problem etwa so formuliert werden. Eine räumlich geschlossene Welt ist nur dann denkbar, wenn die Kraftlinien der*

[17] Nach Schrödinger ist somit „Lambda" auch keine „Integrationskonstante", die bei der Herleitung der Einsteinschen Gleichungen aus dem Hilbertschen Funktional abfällt.

Gravitation, welche in den ponderabeln[18] Körpern (Sternen) endigen, im leeren Raume anfangen. Es bedarf also einer Modifikation der Theorie, in welche der „leere Raum“ die Rolle einer über die interstellaren Räume verteilten negativen gravitierenden Masse übernimmt. Herr Schrödinger nimmt nun die Existenz von Materie mit ***negativer Massendichte*** *an und repräsentiert sie durch das Skalar p. Dieses Skalar p hat mit dem im Inneren der ponderabeln Massen vorhandenen Druck der „wirklichen“, d.h. der wahrnehmbaren, in den Sternen kondensierten Materie von der Dichte ϱ nichts zu tun; ϱ verschwindet in den interstellaren Räumen, nicht aber p.*

Hier fällt auf, dass EINSTEIN an *negative Massendichten*, aber folglich an einen *positiven* Druck p denkt. Dies entspricht den Analogien (2.58). SCHRÖDINGER dagegen spricht von einem *negativen Druck (Zugspannung)*, aber einer konstanten *positiven* Massendichte ($w = -1/3$).

Die spekulative **negative Massendichte** von EINSTEIN hat in neuerer Zeit zu erheblichen Verwirrungen gesorgt. Im Jahre 2018 behauptete J. FARNES von der Oxford University, mit Einführung von „dunklen negativen Massen“ die Probleme der beschleunigten Expansion des Universums wie auch die flachen Rotationskurven von Galaxien erklären zu können ([54]). Er berief sich dabei unter anderem genau auf diese Bemerkungen von EINSTEIN aus dem Jahre 1918. Doch meinte hier EINSTEIN wirklich die Einführung von *negativen Massen*? Die wichtige Bilanzgleichung ist die thermodynamische Entropie-Energiegleichung (2.77), die wir hier

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(3\,\dot{\varphi}^2 - \frac{3\,GM_e}{\pi R^3} - \frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right)R^3\right\} + \dot{\varphi}^2\,\frac{d}{dt}\left\{R^3\right\} = 0 \quad (2.100)$$

noch einmal ins Gedächtnis rufen. Mit MISNER ET AL. ([133], MTV, Seite 705) schreiben wir diese ganz allgemein in Worten als

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\begin{array}{c} Dichte\ der \\ Massenenergie \end{array}\right) \times Volumen\right\} + Druck\,\frac{d}{dt}\left\{Volumen\right\} = 0.$$

In dem Lehrbuch MTW ([133]) steht der Begriff *Dichte der Massenenergie*, in (2.100) oder (2.77) steht jedoch wesentlich genauer die *Summe aus der positiven kinetischen Energiedichte und der negativen potentiellen gravitativen Energiedichte, bestehend aus einem homogenen und*

[18] wägbaren - pondus = Gewicht

inhomogenen Teil. Die gravitative potentielle Energiedichte geht hier also **negativ** in die Bilanzgleichung ein. Das heißt aber nicht, dass die Massendichte oder die gravitierenden Massen *negativ sind*! Doch EINSTEIN scheint im Jahre 1918 wirklich über die Existenz negativer schwerer Massen für den Fall einer Λ - Konstanten auf der rechten Seite seiner Feldgleichungen spekuliert zu haben. Denn weiter heißt es:

> *Über das Gesetz, nach welchem p als Funktion der Koordinaten bestimmt sein soll, schweigt der Autor; wir wollen nur zwei Möglichkeiten ins Auge fassen:*
>
> *1. p ist eine universelle Konstante. In diesem Falle stimmt Herrn Schrödingers Ansatz genau mit dem meinigen überein. Um dies zu sehen, braucht man nur statt p den Buchstaben λ zu setzen und das betreffende Glied auf die linke Seite der Feldgleichung zu bringen. Diesen Fall kann der Autor also nicht im Auge gehabt haben.*
>
> *2. p ist veränderlich. Dann bedarf es einer Differentialgleichung, welche p als Funktion von $x_1 \ldots x_4$ bestimmt. Man hat also nicht nur die Hypothese von der Existenz einer nicht beobachteten negativen materiellen Dichte*[19] *in den interstellaren Räumen zugrunde gelegt, sondern auch noch ein hypothetisches Gesetz für die räumlich - zeitliche Verteilung dieser Massendichte zu postulieren. Der von Herrn Schrödinger eingeschlagene Weg scheint mir nicht gangbar, weil er zu tief ins Gestrüpp der Hypothesen hineinführt.*

Man gewinnt beim Lesen der Antwort den Eindruck, dass EINSTEIN hier relativ hastig auf die Arbeit von Schrödinger geantwortet hat, da sie wohl seinen damaligen Vorstellungen (Vorurteilen) über das Universum (statisches Universum) zuwiderliefen. Hundert Jahre nach diesen beiden Artikeln, die ja noch vor den dynamischen Lösungen von FRIEDMANN erschienen, ist man überrascht, dass hier schon physikalische Prozesse diskutiert wurden, die man heute – völlig überzogen – als „*Dunkle Energie*“ in Gestalt von sogenannten „*Quintessenz - Modellen*“ bezeichnet. Im Grunde genommen war es kein Geringerer als SCHRÖDINGER, der völlig unspektakulär diesen gewagten Schritt schon in den Jahren 1917

[19] EINSTEIN betont hier wieder eine „negative Massendichte“, wohingegen SCHRÖDINGER nur von einem negativen Druck, also einer Zugspannung, spricht.

- 1918 gemacht hat. EINSTEIN irrte sich bei der Bemerkung, dass der Druck p eine Funktion der Koordinaten ist. Ein Blick auf die Gleichung (2.100) des Ringkosmos zeigt, dass dieser Druck (im „Flüssigkeitsbild“ *Zugspannung*, siehe (2.58)) im „gravitierenden Teilchenbild“ ganz einfach proportional dem positiven Geschwindigkeitsquadrat der „kosmischen Teilchen“ ist. Nur die *negative Energiedichte* hängt nach (2.100) sowohl von der Geschwindigkeit als auch von der Position der „*ponderablen Teilchen*“ ab. Wir haben gesehen, dass die Interpretation von EINSTEIN bezüglich des Vorgehens von SCHRÖDINGER, dass nämlich dann der Druck positiv, die Energiedichte (nicht Massendichte!) aber negativ wird, von der Entropiegleichung des expandierenden Ringkosmos unterstützt wird (siehe Gl. (2.64).

EINSTEIN hat bis Ende der 1920er Jahre immer an eine Lambda - Konstante auf der *linken Seite der Feldgleichungen* geglaubt - um sie dann doch ab 1930 aufgrund von Beobachtungen der Rotverschiebungen von Galaxien und später aus logisch - ökonomischen Gründen zu verwerfen. So weit bekannt, hat damals SCHRÖDINGER auf die Bedenken und Vorurteile von EINSTEIN – zumindest öffentlich – nicht reagiert. Sein Biograph W. MOORE (1918-2001) berichtet aber, dass SCHRÖDINGER im Jahre 1936 beim Lesen der Arbeiten von EDDINGTON in einer Fußnote die Größe der Zugspannung für ein spezielles Modelluniversum berechnete ([134]).

EINSTEIN und SCHRÖDINGER hatten im Laufe der 1930er Jahre eine ähnliche Auffassung zur Interpretation der neuen Quantenmechanik. Sie blieben so im freundschaftlichen Briefwechsel bis 1947, als SCHRÖDINGER in voller Begeisterung und völlig voreilig seine neue *projektiv -affine Feldtheorie* öffentlich machte. Zuvor hatte er einen Brief an EINSTEIN mit den Worten geschickt ([134])

> *...Heute kann ich Dir von einem wirklichen Fortschritt berichten. Möglicherweise wirst Du zuerst fürchterlich herummeckern, da Du erst kürzlich erklärt hast, dass Du und warum Du mit meiner Methode nicht einverstanden bist. Aber schon bald wirst Du mir zustimmen ... In Kürze, die Situation ist folgende: Wenn man in der affinen Theorie, die ich in den letzten Jahren in ihrer allgemeinen Form entwickelt habe, eine bestimmte, die einzig vernünftige, Lagrange-Funktion verwendet, nämlich die* ***Quadratwurzel der Determinante des***

***Einstein-Tensors**, dann erhält man etwas Großartiges* [20].

SCHRÖDINGER war von der Richtigkeit seiner Theorie absolut überzeugt. Von einem irischen Reporter nach seinen Zweifeln gefragt, antwortete er:

> *... Von nun an ist die Theorie Einsteins lediglich ein Spezialfall... Ich glaube, ich liege richtig. Ich sollte wie ein fürchterlicher Depp aussehen, wenn ich falsch läge.*

EINSTEIN, der von dem Wissenschaftsredakteur der *New York Times* um eine Stellungsnahme gebeten wurde, sagte vorsichtig unter anderem:

> *...Schrödingers jüngste Versuche ... können nur auf der Basis ihrer mathematisch - formalen Qualitäten beurteilt werden, aber nicht vom Standpunkt der „Wahrheit" aus (i.e. der Übereinstimmung mit den Erfahrungstatsachen). Selbst von diesem Standpunkt aus kann ich keine besonderen Vorteile gegenüber den theoretischen Möglichkeiten, die zuvor verfügbar waren, erkennen, eher das Gegenteil. Beiläufig möchte ich folgendes zur Kenntnis geben. Es erscheint mir nicht wünschenswert, in der Öffentlichkeit in irgendeiner Form solch vorläufige Versuche vorzustellen. Es ist genauso schlimm, wenn der Eindruck erweckt wird, dass man sich mit endgültigen Entdeckungen, die die physikalische Wirklichkeit betreffen, beschäftigt. Kommuniqués, in einer derart sensationellen Aufmachung, rufen beim Laienpublikum eine falsche Vorstellung von dem Charakter der Forschung hervor. Der Leser bekommt den Eindruck, dass es alle fünf Minuten zu einer Revolution in der Wissenschaft kommt, wie ein Staatsstreich in einigen kleineren, instabilen Republiken. In Wirklichkeit handelt es sich bei den theoretischen Wissenschaften um einen Entwicklungsprozess, zu dem besten Köpfe aufeinanderfolgender Generationen durch ihre unermüdliche Arbeit beitragen, und der somit langsam zu einem tieferen Verständnis der Naturgesetze führt. Aufrichtige Berichterstattung sollte dem Charakter wissenschaftlicher Arbeit gerecht werden.*

[20] Eine analoge heutige Arbeit wäre die des Stringtheoretikers J. MALDACENA: „The Large N Limit of Superconformal field theories and supergravity" (1998).

Als SCHRÖDINGER von dem Kommentar Einsteins gehört hatte, war er wohl ziemlich verärgert. Zuvor hatte er noch bei EINSTEIN um Nachsicht gebeten, da er sich von dieser öffentlichen Sensation einen höheren Institutsbudget erhoffe. Doch EINSTEIN sah dies als eine Unehrlichkeit an und schrieb ihm, dass jetzt die Zeit rigoroser Lösungen gekommen sei. Wenn er etwas Neues fände, würde SCHRÖDINGER von Ihm hören. Die Verärgerung von SCHRÖDINGER war so groß, dass er alle Unterlagen und Briefe zu dieser Theorie in einer Mappe mit der Aufschrift: „*Die Einstein Schweinerei*“ weglegte ([134]).

2.7 Arthur Eddington und die Λ-Konstante

> *Einstein's universe contains matter but no motion; deSitter's universe contains motion but no matter.* A. Eddington (1882-1944)

Der britische Astronom und Astrophysiker EDDINGTON wurde seit etwa 1927 durch die Arbeiten von LEMAÎTRE zu Fragen der Kosmologie angeregt. Durch die Einführung der Λ - Konstante konnte man jetzt eine ganze Klasse unterschiedlicher Modelle diskutieren. EDDINGTON selber interessierte sich ab den 1930er Jahren aber nur noch für ein ganz bestimmtes Modell. Zu Beginn sollte es ein *statisches Universum* sein, wie es zuvor schon EINSTEIN vorgeschlagen hatte. Dieses Universum hatte eine feste Masse M und einen festen Radius R_E gemäß

$$\sqrt{\Lambda} = \frac{c}{R_E}; \qquad \frac{2\,G\,M}{c^2} = \pi\,R_E.$$

Nachdem LEMAÎTRE und andere gezeigt hatten, dass dieses statische Einstein'sche Universum instabil ist, ging EDDINGTON davon aus, dass das Einstein'sche Modell nur noch der Ausgangspunkt für eine expansive Phase des Universums war, wie wir sie heute beobachten. Die alternative Möglichkeit einer Kontraktion konnte durch physikalische Argumente als weniger wahrscheinlich eingestuft werden. Als Erklärung für dieses Szenarium konstatierte er:[21]

[21] Aus *Truth and Beauty* - Aesthetics and Motivations in Science. S. CHANDRASEKHAR, The University of Chicago Press, 1987

I am a detective in search of a criminal - the cosmical constant. I know he exists, but I do not know his appearence; for instance I do not know if he is a little man or a tall man

EDDINGTON ging bei seinen Spekulationen davon aus, dass die Anzahl N der Protonen im Universum entscheidend für die gemittelte elektrische Wechselenergie sei. Er postulierte die beiden Relationen

$$\frac{\sqrt{N}}{R_E} = \frac{m_e\, c^2}{e^2}; \quad \frac{2\, G\, N\, m_p}{c^2} = \pi\, R_E.$$

Dabei bedeutet m_p die Masse des Protons und m_e und e die Masse und Ladung des Elektrons. Aus diesen Beziehungen leitete EDDINGTON die Formeln

$$N = \frac{\pi^2}{4}\, \left(\frac{e^2}{G\, m_p\, m_e}\right)^2 \tag{2.101}$$

und

$$\frac{c}{\sqrt{\Lambda}} = R_E \equiv \frac{\pi}{2}\, \frac{e^4}{G\, m_p\, m_e^2\, c^2}. \tag{2.102}$$

ab. Aus der letzten Formel erhielt EDDINGTON für den Einstein - Radius R_E die Abschätzung $R_E \sim \mathbf{10^9}$ Lichtjahre. Bis zu seinem Tode 1944 war er von der Richtigkeit dieser Theorie überzeugt. So sagte er noch 1943 bei einem Vortrag in Dublin:

At no time during the past sixteen years have I felt any doubt about the correctness of my theory

Obwohl EDDINGTON das statische Universum eines Einsteins aufgegeben hatte, führt er ab 1927 eine *statische* Λ - Konstante ein, die durch atomphysikalische Konstanten festgelegt war. Aus heutiger Sicht muss solch eine Theorie (Spekulation) als widerlegt gelten, da $\Lambda\, (\rightarrow \Lambda\, c)$ wohl eher eine dynamische zeitabhängige Eigenschaft der inneren Strukturbildung des Universums ist. Aber auch heute noch - ganz im Geiste von EDDINGTON - gibt es Versuche, die kosmologische Konstante mit quantentheoretischen Energieniveaus des Vakuums zu erklären. Doch eine Lösung in dieser Richtung ist extrem unwahrscheinlich oder besser unmöglich.

2.8 Rückkopplungen (backreaction)

Schon 1963 bemerkten die russischen Physiker MICHAIL F. SHIROKOV (1901-1983) und IOSIF Z. FISHER (1919-1995), dass beim Problem der Dynamik eines heterogenen Universums *der gemittelte Einstein – Tensor nicht identisch dem Einstein – Tensor der gemittelten Metrik ist*([191, 192]). Das könnte zur Folge haben, dass die Einstein'schen Feldgleichungen der Gravitation gar kein Λ – Term enthalten, aber die für die Dynamik des *heterogenen* Kosmos zuständigen FLRW – Gleichungen sehr wohl einen solchen Term enthalten müssen – aufgrund einer durch den Mittelungsprozess entstehenden gravitativen **„Abstoßung“**. Für ein flaches inhomogenes isotropes Universum leiten die Autoren in *linearer Näherung* zunächst die Energiegleichung und die Bewegungsgleichung in der Pseudozeit $c\,dt = a(\tau)\,d\tau$ ab. Benutzen wir anstatt des Skalenfaktors a die Größe R, so lauten die *Shirokov-Fisher* Gleichungen von 1963 in der Näherung verschwindenden Druckes in moderner Form([191, 192]) (c bedeutet Lichtgeschwindigkeit).

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi\,G}{3}\,\varrho - \frac{c^2\,\ell_S^2}{R^4} \tag{2.103}$$

und

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi\,G}{3}\varrho + \frac{c^2\,\ell_S^2}{R^4}, \tag{2.104}$$

Durch den Mittelungsprozess entstehen zwei unterschiedliche metrische Skalen ℓ_A und ℓ_B, von denen aber nur Eine relevant ist. Für diese Skala $\ell_A \sim \ell_B \equiv \ell_S$ schätzen die Autoren die Größenordnung

$$\ell_S \sim \frac{2\,G\,(m\,M^2)^{1/3}}{c^2} \tag{2.105}$$

ab, wobei m eine typische Galaxienmasse und M einen charakteristischen „Massenwürfel“ (Galaxienhaufen?) darstellt. Die Absicht der Autoren war damals die Vermeidung eines singulären *„Big Bang“* in der frühen Evolutionsgeschichte des Universums. Das *Shirokov - Fisher* Modell beschreibt auf diese Weise wohl zum erstenmal in der Wissenschaftsgeschichte ein klassisches *„Big Bounce“* Modell ohne eine Anfangssingularität.

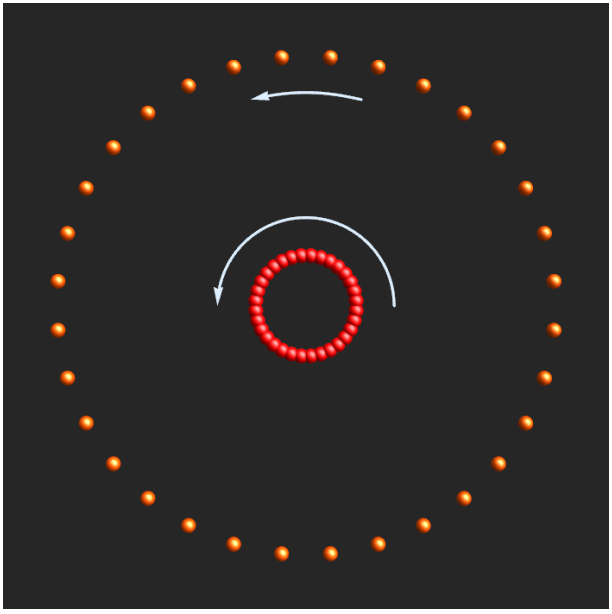


Fig. 2.8: *Die Analogie zum* Shirokov-Fisher *Modell eines vermeintlich inhomogenen isotropen Universums aus dem Jahre 1963 ist ein rotierender exakt kreisförmiger N-Teilchen Ring (Ringkosmos) ohne Paarfusion und ohne beschleunigte Expansionsphase. Der Radius des Teilchenringes kann entweder zwischen zwei Grenzradien pulsieren oder nur einmal einen „Big-Bounce" (Großer Abprall) durchführen. Wirkliche Strukturbildung - wie von den Autoren eigentlich beabsichtigt - findet aber nicht statt. Das Modell sollte damals zeigen, dass ein „Big Bang" nicht zwingend aus den Einsteinschen Gleichungen folgt.*

Paradoxerweise beschreibt aber das Modell von Shirokov - Fisher von 1963 im eigentlichen Sinne gar keine inhomogene Strukturbildung. Formulieren wir nämlich in Analogie zu (2.31) und (2.34) mit den obigen Bewegungsgleichungen für R die Größen

$$2\,\frac{\ddot{R}}{R}+\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2=\frac{c^2\,\ell_S^2}{R^4},$$

$$\frac{\ddot{R}}{R}+\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2=\frac{4\pi\,G}{3}\,\varrho,$$

so fällt sofort in der zweiten Bilanzgleichung auf, dass auf der rechten Seite nur die normal gemittelte Materiedichte ϱ eingeht, nicht aber ein zusätzlicher Energieterm, welcher die eigentliche inhomogene Strukturbildung beschreibt. Andererseits ergibt aber ein Vergleich zwischen der ersten Bilanz und zwischen der entsprechenden des Ringkosmos (2.31)

$$\dot{\varphi} = \frac{c\,\ell_S}{R^2}. \tag{2.106}$$

Dies ist aber nichts anderes als die Drehimpulserhaltung in einer zentralen Keplerbewegung (Flächensatz). Die Größe $c\,\ell_S$ ist dann der *konstante spezifische Drehimpuls* eines rotierenden Ringkosmos ohne Strukturbildung, in der sich alle Teilchen mit zwar zeitabhängiger, aber ansonsten identischer Winkelgeschwindigkeit um ein fiktives Zentrum bewegen. Wir haben so das überraschende Ergebnis, dass die Dynamik des SHIROKOV - FISHER Modelluniversums von 1963 einem *rotierenden und radial pulsierenden Ringkosmos ohne Strukturbildung* gleichkommt. Der Zustandsparameter des *Shirokov-Fisher* Universums ergibt sich wegen $\mathbf{\Phi} = 0$ rein formal zu $w_{SF} = +1/3$. Doch die Formel (2.59) gilt streng nur für strukturbildende Systeme, in denen eine ortsabhängige Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ zur Ausbildung eines Dichtekontrastes im Medium führt.

Leider ist damals das Modell von SHIROKOV - FISHER auf streng kovarianter Basis nicht weiter verbessert worden. Nachdem dann 1964 die 3K - Hintergrundstrahlung entdeckt wurde, fiel die sehr interessante Idee der beiden russischen Autoren der Vergessenheit anheim. Erst zwanzig Jahre nach den russischen Physikern hat 1984 der Astrophysiker GEORGE F.R. ELLIS wieder auf diese *fundamentalen dynamischen Probleme* inhomogener Universen aufmerksam gemacht. Auf verschiedenen Ideen aufbauend, hat dann BUCHERT einen *kovarianten* Formalismus entwickelt, um quantitativ die Korrekturen an den FLRW – Gleichungen für einen *inhomogenen* isotropen Kosmos zu berechnen. BUCHERT formuliert in seiner Theorie *effektive Friedmann Gleichungen* der Form ($\mathcal{K} = 0$)

$$3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = 8\pi\,G\,\varrho - \frac{1}{2}\,(\mathcal{Q} + \mathcal{R}) \tag{2.107}$$

und

$$3\,\frac{\ddot{R}}{R} = -4\pi\,G\,\varrho + \mathcal{Q}, \tag{2.108}$$

die den allgemeinen Gleichungen von M. F. Shirokov und I. Z. Fisher aus dem Jahre 1962 rein äußerlich sehr ähnlich sind. Die Variable $\mathcal{Q}$ bedeutet jetzt die gemittelte *kinematische Rückkopplung (backreaction)* und $\mathcal{R}$ die gemittelte *räumliche Krümmung* (Ricci Krümmung oder Gaußsche Krümmung) des heterogenen Universums ([15]). Im Gegensatz zum Shirokov - Fisher Modell ergeben sich jetzt die Bilanzen

$$2\,\frac{\ddot{R}}{R}+\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2=\frac{1}{6}\,(3\mathcal{Q}-\mathcal{R})\,,$$
$$3\,\frac{\ddot{R}}{R}+3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2=4\pi\,G\,\varrho+\frac{1}{2}\,(\mathcal{Q}-\mathcal{R})\,.$$

Im Falle $\mathcal{R}=\mathcal{Q}$ ergibt sich wieder das Modell von *Shirokov - Fisher*. Ein Vergleich von (2.107) und (2.108) mit (2.30) und (2.161) ergibt für diese abstrakten Größen im expandierenden Ring mit Paarfusion die zwei Entsprechungen (*Analogien*)

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}&=3\left(\dot{\varphi}^2-\frac{GM}{2\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\right)\\ \mathcal{R}&=3\left(\dot{\varphi}^2-\frac{3\,GM}{2\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\right)\end{aligned}\tag{2.109}$$

Aus diesen beiden Entsprechungen folgt die alternative Darstellung

$$\dot{\varphi}^2=\frac{1}{6}\,(3\mathcal{Q}-\mathcal{R})\tag{2.110}$$

$$3\,\dot{\varphi}^2-\frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]=\frac{1}{2}\,(\mathcal{Q}+\mathcal{R})\,.\tag{2.111}$$

Für die Zustandsgleichung dieser *Rückkopplung (backreaction)* folgt dann

$$w_\Lambda=\frac{1}{3}\left(\frac{3\mathcal{Q}-\mathcal{R}}{\mathcal{Q}+\mathcal{R}}\right)\equiv\frac{1}{3}\left(\frac{4\mathcal{Q}}{\mathcal{Q}+\mathcal{R}}-1\right).\tag{2.112}$$

Wenn sowohl $\mathcal{Q}>0$ und $\mathcal{Q}+\mathcal{R}<0$ ist, wird der gemittelte Skalenfaktor und damit das ganze Universum in eine beschleunigte Phase übergehen. Doch der Nachteil der Theorie von Buchert ist offensichtlich: *Sie ist nicht*

geschlossen, man benötigt noch eine Gleichung zwischen $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$, die aber *a priori* nicht bekannt ist. Zudem ist eine Interpretation dieser Größen mit Observablen im Universum nicht zwanglos möglich. Interessanterweise hat BUCHERT im Jahre 2005 versucht, den von Ihm favorisierten spekulativen Wert $w = -1/3$, also eine quasi-lineare Expansion, für das Universum aus den obigen Formeln abzuleiten ([14]).

Andere Autoren wie S. RÄSÄNEN oder D.L. WILTSHIRE nehmen die gemittelten Gleichungen als Ausgangspunkt, um die beschleunigte Expansion des Universums als „Scheineffekt" von „Mittelungsprozessen" und von „nichtsynchronisierten Uhren" in den stark inhomogenen Gravitationsfeldern des Universums zu interpretieren (*„timescape cosmology"*). Es bleibt letztendlich aber unklar, ob eine kosmologische Konstante mit $w \approx -1$ ($\mathcal{R} = -3\mathcal{Q}$) oder $w \approx -2/3$ ($\mathcal{R} = -5\mathcal{Q}$) mit diesen Modellvorstellungen manifest abgeleitet werden kann. In jedem Fall zeigen sich enge Analogien zu den kinematischen und dynamischen „Rückkopplungen" im expandierenden Ring und den erweiterten FLRW – Gleichungen nach BUCHERT. Im Gegensatz zu den Modellgleichungen von BUCHERT bilden aber die dynamischen Gleichungen des selbstgravitierenden expandierenden Punktmassen - Ringkosmos ein geschlossenes System.

Die Vorstellung, dass Strukturbildung der entscheidende Motor für die beschleunigte Expansion des Universums darstellt, wurde unter anderen von PEEBLES in einem Konferenzbeitrag im Jahre 2009 kritisiert ([148]). Um seinen kritischen Argumenten zu begegnen, betrachten wir den Ausdruck für die Energiedichte ϱ_E (2.59) im expandierenden *Newtonschen* Ringkosmos. Wir multiplizieren Zähler und Nenner mit $R[t]^2$ und dividieren anschließend Zähler und Nenner mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit c^2. Dann erhalten wir mit $v = R\,\dot{\varphi}$

$$w_\varphi = \frac{v^2}{3\,v^2 - \dfrac{3\,GM}{\pi\,R}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]}. \tag{2.113}$$

Die wirkliche Geschwindigkeit v bezieht sich nur relativ zur expandierenden Ringperipherie („Hubble - Lemaître flow"). Mit $\dot{\varphi} = 0$ ruhen die Punktmassen im expandierenden Ring. Doch man sieht jetzt deutlich, dass die Lichtgeschwindigkeit in den dynamischen Gleichungen des Ringkosmos überhaupt nicht auftritt und somit der Effekt der Rückkopplung der Paarfusion auf die Ringexpansion kein relativistischer Effekt der Ordnung in $(v/c)^2$ ist - wie PEEBLES in seinem Artikel behauptet.

2.9 Bemerkungen zur Energiegleichung

Die Dynamik unseres expandierenden *eindimensionalen* Ringmodelles mit Paarfusion wird durch die drei Gleichungen (2.30, 2.29) und (2.32) bestimmt. Im Falle $\epsilon_0 = 0$ können wir die Energiegleichung in der Form

$$\dot{R}^2 + R^2\,\dot{\varphi}^2 = \frac{GM_e}{\pi R} + \frac{GM}{\pi R}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]$$

schreiben. Auf der linken Seite stehen zwei kinetische Terme, auf der rechten Seite zwei gravitative Energieterme (Potentiale), einer für den homogenen und der andere für den inhomogenen Beitrag. Bei der Herleitung dieser Gleichung müssen wir uns klarmachen, dass wir eine *zweidimensionale Außenperspektive* eingenommen haben, welche die Bewohner des *eindimensionalen Ringkosmos* nicht haben. Insbesondere der Term $R^2\,\dot{\varphi}^2$ ist für einen *„Bewohner des eindimensionalen Ringkosmos“* unverständlich, da dieser Term im Prinzip aus einer um Eins erhöhten 2D-Raumdimension herstammt, die nur ein Beobachter mit einer *„Außenperspektive“* versteht[22]. Wird dann die Gleichung durch R^2 geteilt, entsteht die *Hubble-Lemaître* Funktion des Ringkosmos in der Form

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \dot{\varphi}^2 = \frac{GM_e}{\pi R^3} + \frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]$$

Diese normierte Energiegleichung kann schließlich in die Gestalt

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{GM_e}{\pi R^3} - \left\{\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\right\}$$

umgeschrieben werden. Hier wird nochmals ersichtlich, dass unser Ringkosmos nur dann kurzfristig beschleunigt expandieren kann, wenn der Term in der geschweiften Klammer *negativ werden kann.* Paradox erscheint hier in der geschweiften Klammer der Term $\dot{\varphi}^2$, der sich in der Bewegungsgleichung für R als eine „Zentrifugalbeschleunigung“ manifestiert, aber für das Phänomen einer beschleunigten Expansion dem

[22] Hier kann man nicht umhin, in Analogie an die Kaluza-Klein Theorie von 1921 zu denken, bei der in eleganter Weise versucht wurde, die Einheit von Gravitation und Elektromagnetismus durch Einführung einer vierten Raumdimension zu verstehen ([141],[91]).

Augenschein nach destruktiv wirkt. *Für eine Kosmographie ist somit die Existenz einer globalen Energiegleichung essenziell, um das physikalische Phänomen einer beschleunigten Expansion des Skalenfaktors zu verstehen!*

2.10 Die Dynamik der Paarfusion im Ring

Um aus der gekoppelten Dynamik von Expansion und Strukturbildung die eigentliche Mechanik der Paarfusion abzuleiten, muss aus der Lagrangedichte die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \tag{2.114}$$

bestimmt werden, die jetzt mit (2.27) einfach

$$\frac{d}{dt}\left(R^2\,\dot{\varphi}\right) = \frac{GM}{2\pi R}\,\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \varphi}. \tag{2.115}$$

lautet. Ausgeschrieben ergibt sich so

$$\ddot{\varphi} + 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)\dot{\varphi} = \frac{GM}{2\pi R^3}\,\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \varphi}. \tag{2.116}$$

Diese Gleichung beschreibt **im mitbewegten Koordinatensystem** φ eine *nichtlineare* Jeans – Instabilität mit einem „kosmologischen Reibungsterm“ $2(\dot{R}/R)\,\dot{\varphi}$. Wichtig ist zu betonen, dass die Bewegungsgleichung (2.116) die *ausdifferenzierte Form der Entropiegleichung* (2.64) ist. Die Beziehung (2.64) ist die integrale Form der Gleichung (2.116). Dies ist ein sehr wichtiges Ergebnis, denn mit der Kenntnis der Bewegungsgleichung von φ kann man dann die Zustandsgleichung w_{DE} berechnen.

Es ist jetzt sehr lehrreich, den im mitbewegten Koordinatensystem gegebenen Winkel φ durch die Lagrangesche Verschiebung $s = R[t]\,\varphi[t]$ im **mitgeführten Koordinatensystem** auf der Ringperipherie zu ersetzen. Die Verschiebung $s[t]$ beschreibt ja die wirkliche Abstandsänderung im expandierenden Ringkosmos längs der Peripherie. Es gilt nach elementarer Umformung

$$\frac{d}{dt}\left(R^2\,\dot{\varphi}\right) \equiv \frac{d}{dt}\left(R^2\,\frac{d}{dt}\left(\frac{s}{R}\right)\right) = R\,\ddot{s} - \ddot{R}\,s$$

Mit 2.16 erhält man jetzt im mitgeführten Koordinatensystem die Bewegungsgleichung

$$\ddot{s} = \frac{GM}{2\pi R^3}\left(\frac{N}{2\pi}\right)\mathbf{\Phi}'[\xi] + \frac{\ddot{R}}{R}\,s. \tag{2.117}$$

Jetzt bedeutet der Strich eine Ableitung nach ξ. Wie durch ein Wunder ist der „kosmologische Reibungsterm“ im *mitgeführten Koordinatensystem* verschwunden. Dafür taucht eine der Verschiebung s proportionale „kosmologische Federkraft“ auf, die je nach Vorzeichen von $\ddot{R}$ (*regressive oder progressive Expansion*) anziehend oder abstoßend wirken kann. Führt man in der obigen Gleichung anstatt des Ringradius R den identischen Abstand a der Teilchen in ihrer ungestörten Ringposition ein, so folgt wegen

$$R = \frac{a}{2\pi}\,N, \qquad \xi = \frac{N\,\varphi}{2\pi} \equiv \frac{s}{a}$$

und $M = m\,N$

$$\boxed{\ddot{s} = \frac{Gm}{a^3}\,\mathbf{\Phi}'[\xi] + \frac{\ddot{a}}{a}\,s} \tag{2.118}$$

Diese Gleichung ergibt sich auch, wenn man (2.76) in die Energiebilanz (2.70) einsetzt und von der mitbewegten Koordinate φ zur mitgeführten Koordinate s übergeht. Für $\ddot{a} = 0$ beschreibt diese Gleichung für eine unendlich ausgedehnte selbstgravitierende Kette die zeitliche Entwicklung der **maximal instabilen** „Jeans – Mode“. Da der Bereich der Koordinate ξ von -1/2 nach +1/2 bzw. s von -a/2 nach +a/2 reicht, wird durch diese Gleichung ganz allgemeinen eine paarweise „Teilchenfission“ mit anschließender „Teilchenfusion“ beschrieben. Der zweite Term in der obigen Bewegungsgleichung proportional $\ddot{a}/a$ ist wesentlich kleiner als der erste gravitative Term proportional m. Er entscheidet darüber, inwieweit gravitativ gebundene Systeme der globalen Expansion folgen.

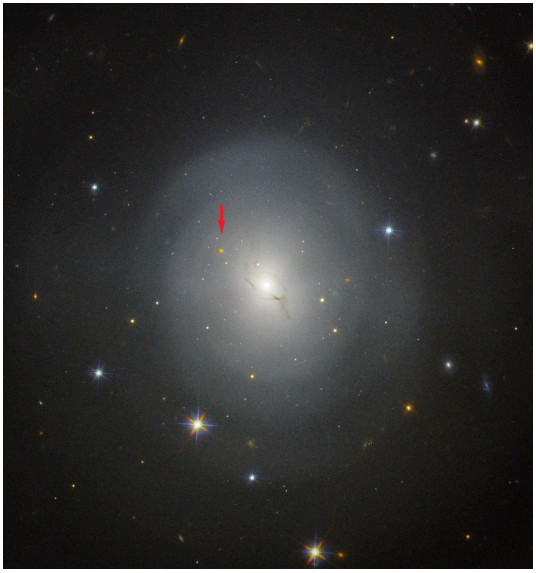


Fig. 2.9: *Am 17. August 2017 konnte angeblich zum erstenmal die Fusion eines Neutronensternpaares (Kilonova oder Macronova) in einem breiten Frequenzspektrum einschließlich der ausgestrahlten Gravitationswellen in der Galaxie NGC 4993 beobachtet werden. Zunächst tauchte der sogenannte „Chirp“ als das charakteristische Gravitationswellensignal auf, dann 1.7 Sekunden später der kräftige Gammablitz, dann das mit der Zeit immer schwächer werdende optische Nachglühen (roter Pfeil). Fusionsprozesse dieser Art sind wichtige Entwicklungsprozesse im Universum. (Quelle: LIGO/Virgo, „Multi-Messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger“; NASA, ESA, ESO)*

2.11 Der Abbé Lemaître und das „atome primitif“

> *Die Entwicklung des Universums lässt sich mit einem Feuerwerk vergleichen, das gerade vorüber ist. Es bleiben einige rote Schleier, Asche und Rauch. Wir stehen auf einem erkalteten Aschestück, sehen das langsame Verblassen von Sonnen und versuchen, uns das Strahlen des Anfangs in Erinnerung zu rufen.*
>
> Georges Lemaître (1894-1966)

Im Jahre 1927 veröffentlichte G. Lemaître in einem relativ unbekannten belgischen Wissenschaftsjournal eine fundamentale theoretische Arbeit über die Expansion des Universums mit einem Λ - Term sowie deren Interpretation anhand der mit der Entfernung immer größer werden Rotverschiebung von Spektrallinien in fernen Galaxien ([111])[23] . Er kam hier der Arbeit von E. Hubble zwei Jahre zuvor ([82]). Im Jahre 1927 ergriff er die einmalige Gelegenheit, Einstein im nahe gelegenen Brüssel zu treffen, wo gerade die berühmte fünfte *Solvay-Konferenz* über Grundsatzfragen der Physik und Chemie stattfand. In einer Radioansprache im Jahre 1957 anlässlich des 2. Jahrestages von Einsteins Tod erinnert Lemaîtreer sich:

> *...Ich habe Albert Einstein zum erstenmal vor 29 Jahren getroffen. Er war nach Brüssel gekommen, um am Solvay-Kongress von 1927 teilzunehmen. Auf einem Sparziergang in den Alleen des Parks Leopold sprach er mich auf einen bisher nur wenig bekannt gewordenen Artikel an, den ich im vergangenen Jahr über die Ausdehnung des Weltalls geschrieben und den ein Freund ihm zu lesen gegeben hatte. Nach einigen wohlmeinenden Bemerkungen technischer Art schloss er mit der Bemerkung, dass ihm vom Physikalischen alles fraglich erscheine: „Ihre Rechnungen sind korrekt, aber vom physikalischen Standpunkt ganz widerwärtig... Alles deute zu stark ... auf eine „Schöpfung“*

[23] Seine „Hubblekonstante“ betrug damals H = 650/km/s/Mpc

Autor	$H(km/s/Mpc)$
Lemaître (1927)	625
Lemaître (1927)	575
Hubble (1929)	530
de Sitter (1930)	460
Humason (1931)	558

Tab. 2.1: *Erste Bestimmungen der Expansionsrate des Universums. Die damals angenommen Entfernungen waren fast um einen Faktor zehn zu klein. Heutiger Wert etwa 70 km/s/Mpc.([207])*

Doch LEMAÎTRE betonte immer wieder den nicht-mythologischen Charakter seines Modells:

> *The hypothesis of the primeval atom („atome primitif") is the antithesis of a supernatural creation.*

Während der Diskussion berichtete LEMAÎTRE wohl auch über eine erste Bestimmung der heute so wichtigen sogenannten Hubble-Konstanten H. Aufgrund der fast um einen Faktor zehn zu kleinen Entfernungen betrug sein damaliger Wert $H \sim \mathbf{625}km/s/Mpc$. Interessant ist noch zu bemerken, dass EINSTEIN, der die französische Sprache beherrschte, die Arbeit von LEMAÎTRE und die von FRIEDMANN schon zuvor gelesen hatte, dagegen LEMAÎTRE die Arbeiten von FRIEDMANN aus den Jahren 1922-1924, die auf Deutsch veröffentlicht wurden, noch gar nicht kannte. LEMAÎTRE hatte also selbständig und unabhängig sein Expansionsmodell von 1927 entwickelt. Auch wurde bei der Diskussion klar, dass EINSTEIN über die neueren astronomischen Daten bezüglich Rotverschiebungen von „galaktischen Nebeln" nicht genau informiert war.

Im Jahre 1931 übersetzte LEMAÎTRE die leicht gekürzte Version seiner Arbeit vom Französischen ins Englische und publizierte sie in den *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* ([112]), allerdings jetzt ohne seine empirischen Belege, die er wohl als nicht mehr so wichtig ansah, da diese ja inzwischen auch von HUBBLE veröffentlicht worden waren. Ich möchte hier kurz die theoretischen Grundlagen seiner damaligen Gleichungen betrachten und mit denen des hier diskutierten expandierenden Ringmodelles vergleichen. Aus den stark vereinfachten EINSTEIN'schen Feldgleichungen leitet er wohl unabhängig von A. FRIEDMANN die zwei

Fig. 2.10: *Im Mai 1957 an der Amalfi Küste in Italien (Aufnahme von Fred Hoyle (1915-2001)) : Vatikan-Tagung zur Klassifikation und Evolution von Sternen. Von links nach rechts sind auf dem Bild: Barbara Hoyle, Walter Baade (1893-1960), Muschi Baade, Adriane Fowler, Georges Lemaître (1894-1966) und Jan Oort (1900-1992). Seit 1952 hatte sich das Alter und die Größe des Universums aufgrund der Forschungen von Walter Baade verdoppelt. Hoyle war ein Gegenspieler von Lemaître, denn seit 1948 vertrat er eine andere Interpretation der Expansion des Universums (Steady State Theory), bei der kontinuierlich Materie erzeugt werden muss (Verletzung des Energieerhaltungssatzes). Hoyle prägte für das Modell von Lemaître im Jahre 1952 den Begriff big bang. Noch kurz vor der Entdeckung der Hintergrundstrahlung kritisierte Lemaître in einem TV- Interview 1964 die Auffassung von Hoyle's Modell ([116]). (Photo: Fred Hoyle (1915-2001). Quelle: ([136]))*

etwas modifizierten dynamischen Bedingungen (siehe (2.36, 2.37))

$$3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2+\frac{3\,\mathcal{K}\,c^2}{R^2}=\Lambda+8\pi\,G\,\varrho \tag{2.119}$$

und

$$2\,\frac{\ddot{R}}{R}+\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2+\frac{\mathcal{K}\,c^2}{R^2}=\Lambda-8\pi\,G\,\frac{p}{c^2} \tag{2.120}$$

ab. G. LEMAÎTRE setzte hier zur Abkürzung $8\pi\,G\equiv\kappa$ und für die positive Raumkrümmung eines Universum $\mathcal{K}=1$. Die beiden Gleichungen

kann man direkt mit den Bewegungsgleichungen (2.61) und (2.62) des Ringes mit Paarfusion vergleichen. Er argumentiert nun, warum in (2.120) $p = 0$ gesetzt werden kann:

> *As in Einstein's solution, we liken the universe to a rarefied gas whose molecules are the extra - galactic nebulae. We suppose them so numerous that a volume small in comparison with the universe as a whole contains enough nebulae to allow us to speak of the density of matter. We ignore the possible influence of local condensations. Furthermore we suppose that the nebulae are uniformly distributed so that the density does not depend on position. When the radius of the universe varies in an arbitrary way, the density, uniform in space, varies with time. Furthermore, there are generally interior stresses, which, in order to preserve the homogeneity, must reduce to a simple pressure, uniform in space and variable with time. The pressure, being two - thirds of the kinetic energy of the „molecules", is negligible with respect to the energy associated with matter; the same can be said of interior stresses in nebulae or in stars belonging to them. We are thus led to put* $p = 0$. ([112])

Vergleicht man speziell (2.120) mit (2.62), so muss in Analogie

$$\Lambda - 8\pi\, G\, \frac{p}{c^2} \equiv \dot{\varphi}^2 \tag{2.121}$$

gelten. Wie man hier sieht, ist im Falle $\Lambda = 0$ der Druckterm, welcher durch die Pekuliarbewegung der Ringteilchen entsteht, proportional der **negativen** kinetischen Energie der Ringteilchen und darf **nicht** vernachlässigt werden. Setzt man dagegen den Druckterm p Null, so wäre die kosmologische Konstante Λ im Ringmodell identisch mit der Winkelgeschwindigkeit der Teilchen ins Quadrat. Man sieht hier, dass das Ringmodell kein keine hydrodynamische „Materie" mit internem Druck ist, die nach Einstein als Teil des Energie-Impulstensors gravitativ wirksam ist. Im Ringmodell gehört der „Druck" $\dot{\varphi}^2$ zum metrischen Teil und steht so auf der linken Seite der Einsteinschen Feldgleichungen.

Für Lemaître war Λ" immer eine „ *a priori*" vorgegebene Naturkonstante des *Quanten-Vakuums*. Seine physikalische Vorstellung konstatierte er schon 1933 bei einem Aufenthalt in Kalifornien ([113]):

The theory of relativity suggests that, when we identify gravitational mass with energy , we have to introduce a constant. Everything happens as though the energy in vacuo would be different from zero. In order that absolute motion relativ to vacuum may not be detected, we must associate a pressure $p = -\varrho\, c^2$ *to the density of energy* $\varrho\, c^2$ *of vacuum. This is essentially the meaning of the cosmological constant* λ *which corresponds to a negative density of vacuum according to* $\varrho_0 = \lambda\, c^2/(4\pi G)$.

Anstatt 8π steht bei LEMAÎTRE 4π. Zudem interpretiert er die kosmologische Konstante mit entgegengesetztem Vorzeichen! Diese Aussagen von LEMAÎTRE zeigen, dass seine Interpretation einer *negativen* Dichte, aber *positivem* Druck in enger Analogie zu den Ausdrücken (2.76) des expandierenden Ringkosmos mit Paarfusion in der Form

$$\varrho_\epsilon = 3\,\dot{\varphi}^2 - \frac{3\,GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\,, \qquad p_\epsilon = \dot{\varphi}^2.$$

stehen. Die Größe ϱ_ϵ repräsentiert hier die *kinetisch - gravitative Energiedichte* des *„Pseudo-Vakuums“*, bestehend aus der Differenz von kinetischer Energie und gravitativer Wechselwirkungsenergie der Masseteilchen, während p_ϵ den dazugehörigen *„positiven kinetischen Druck“* repräsentiert . Ist ϱ_ϵ negativ, dann ist eine notwendige - aber noch nicht hinreichende - Voraussetzung für eine beschleunigte Expansion des Skalenfaktors $R[t]$ erfüllt. Genau dieses Bild vermittelt LEMAÎTRE in seinem kurzen Nature - Artikel von 1934, wenn er versucht, die Λ Konstante physikalisch plausibel zu machen ([114], [100],[98]). Er schreibt unter anderem:

...The correction of Newton's law given by Einstein may be regarded as equivalent to a density, of negative sign, associated with space, and if accompanied with a positive pressure the system would be invariant in the Lorentz transformation...

Unser *geistiger Modellbau oder Gedankenexperiment* mit dem Ringkosmos hat allerdings im Gegensatz zu der obiger Äußerung von LEMAÎTRE gezeigt, dass die negative Energiedichte (*negative Wärmekapazität*) und der positive Druck ganz im Bilde der Newtonschen Gravitation verstanden werden kann und eine notwendige Konsequenz der allgemeinen Lagrangefunktion für einen selbstgravitierenden Teilchenring mit Paarfusion

(Strukturbildung) darstellt. Schon hier werden wir zu der Auffassung gedrängt, dass im realen 3D-Kosmos die beschleunigte Expansion *keine Folge einer „Vakuumenergie“ oder einer Korrektur der allgemeinen Relativitätstheorie an der Newtonschen Gravitation ist.* Im weiteren Teil seiner Arbeit führte LEMAÎTRE in die Bewegungsgleichungen des Skalenfaktors auch noch den Strahlungsdruck ein, der wirklich als *positive Energiedichte* erscheint. Das *Photonengas* trägt also in diesem Bild nichts zur beschleunigten Expansion des Universums bei.

Abschließend muss hier gesagt werden, dass G. LEMAÎTRE seit 1927 sehr konsequent die Idee eines *expandierenden Raumes* vertreten hat, in dem die „Rotverschiebung“ von fernen Galaxien *primär kosmologisch* und nicht durch einen Dopplereffekt zu erklären sei. Diesem Paradigmenwechsel konnten andere wie F. ZWICKY (1898-1974), E. HUBBLE und später auch sehr extrem H. ARP (1927-2013) nicht folgen.

2.12 M. P. Bronstein und die Λ - Variable

Historisch ist es äußerst bemerkenswert, dass nach den sehr flüchtigen Bemerkungen von EINSTEIN ([44]) zu der bemerkenswerten Arbeit von SCHRÖDINGER aus dem Jahre 1918 und derjenigen von LEMAÎTRE von 1927 auch der russische Physiker Matwei Petrowitsch BRONSTEIN erste physikalische Überlegungen zu einer allgemeinen zeitabhängigen kosmologischen „Konstanten“ Λ im Kosmos durchgeführt hat. M.P. BRONSTEIN (1906-1938) war der Sohn eines Arztes, studierte 1926 bis 1932 an der Universität Leningrad und war danach am Leningrader Physikalisch – Technischen Institut. Er galt als einer der führenden theoretischen Nachwuchswissenschaftler, mit Institutskollegen wie L. LANDAU[24].

M. BRONSTEIN benutzte 1933 die beiden Friedmann – Gleichungen (2.36) und (2.37), die man auch in der Form

$$8\pi\, G\, \varrho = 3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 3\,\mathcal{K}\,\frac{c^2}{R^2} - \Lambda \tag{2.122}$$

[24] Bronstein habilitierte 1935 über das Thema:“Quantisierung der Gravitationswellen“. Er war vielseitig interessiert und schrieb auch populärwissenschaftliche Bücher wie: „Solare Materie“, ein Buch für Kinder, sowie „Struktur der Materie“ (1935), oder „Erfinder des Radios“. Er plante auch ein Buch über Galilei. 1938 wurde er vom stalinistischen Geheimdienst ermordet.

sowie

$$8\pi\, G\, p = -2\,\frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \mathcal{K}\,\frac{c^2}{R^2} + \Lambda \tag{2.123}$$

schreiben kann. Durch Addition folgt sofort

$$8\pi\, G\,\left(\frac{p}{c^2} + \varrho\right) = -2\,\frac{\ddot{R}}{R} + 2\,\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 2\,\mathcal{K}\,\frac{c^2}{R^2}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt dann leicht die Bilanzgleichung

$$\frac{d\varrho}{dt} + 3\,\frac{\dot{R}}{R}\,\left\{\frac{p}{c^2} + \varrho\right\} = -\frac{1}{8\pi\, G}\,\frac{d\Lambda}{dt}. \tag{2.124}$$

Diese von M. Bronstein abgeleitete Gleichung entsteht als vierte Komponente eines *Vierervektors*, der durch die Divergenz des *Energie – Impulstensors* erzeugt wird. Dabei sind die anderen drei Komponenten Null. Diese zeitabhängige kosmologische Konstante erfüllt aber nicht mehr die Energiegleichung - verletzt also das Energieprinzip ([98]). Zur physikalischen Interpretation der Variablen schreibt M. Bronstein 1933:

> *„In the last equation ϱ is interpreted as the full density of material and radiative mass and p is the pressure of radiation."*

Dann folgt ein für mich entscheidender Satz:

> *"The pressure arising from the transfer of momentum by moving galaxies is neglected".*

Eine ganz ähnliche Aussage oder Vernachlässigung machte auch G. Lemaître in seiner klassischen Arbeit von 1927 und 1931 ([112]). Im expandierenden 1D - Ringkosmos ist aber - wie weiter oben gezeigt worden - gerade diese Impulskomponente der sich bewegenden Teilchen („Galaxien") entlang der Ringperipherie entscheidend für eine „Rückkopplung" zwischen *Expansion* und *Strukturbildung*. **Hier liegt also ein scheinbares Paradoxon zwischen Newtonscher und Einsteinscher Gravitation vor**.

M. Bronstein betrachtete 1933 einen streng homogenen Kosmos, in dem keine „Punktmassen" existieren, sondern nur ein *abstraktes Kontinuum*. Er teilt das Universum in zwei Systeme auf: Teil **A** beinhaltet

das expandierende System, welches der allgemeinen Relativitätstheorie unterliegt, und ein Teil **B**, welches das Innere der Sterne darstellt und deren Energieerzeugung nicht der Gravitationstheorie allein unterliegt. Er spricht nun von den „Energieflüssen“ zwischen beiden Systemen **A** und **B** und über ihre „Haushalterische“ Bedeutung in der Evolution des Universums. Die Analogie zum expandierenden Ring mit seinem Energieaustausch zwischen (System **A**) und der mikrophysikalischen Paarfusion (System **B**) ist evident. Genau deshalb kann man M. Bronstein als Vordenker eines physikalisch begründeten „ *Quintessenzmodelles*“ ansehen.

Für Λ schlägt M. Bronstein eine Entwicklungsgleichung vor, bei der mit zunehmender Materiedichte das Λ abnehmen soll. Zwischen dem System **A**, der eigentlichen Expansion des Materieraumes, existiert ein Energieaustausch mit dem System **B**, welches die Sterne mit ihrer Strahlungsenergie darstellt. Explizit schreibt er:

> *In our theory the equations of general relativity are applied to part A of the universe, not to the universe as a whole. The part A is no close system; it does receive energy from without, or, to speak more exactly, from within, i.e. from the nuclei of B scattered uniformly through A.*

Die obigen Ausführungen zeigen deutlich, dass M. Bronstein das kosmologische Feld Λ mikrophysikalisch verstehen wollte, als eine Art *Rückkopplung* zwischen makrophysikalischen und mikrophysikalischen Prozessen im Universum, die einen *Zeitpfeil* definieren. Die Schwäche des Modelles war die Verletzung der Energiebilanz.[25]

2.13 Modenwachstum im Ringkosmos

Die Paarfusion im expandierenden Ring ist nur ein Spezialfall einer Strukturbildung, bei der eine beliebig vorgegebene Dichteverteilung gravitativ anwächst. Um diese Situation zu beschreiben, benötigen wir eine allgemeine Bewegungsgleichung für einen Ring von N gravitativ gekoppelten Massenpunkten, die sich nur längs der Ringperipherie bewegen können.

[25] In der Danksagung erwähnt er neben L. Landau (1908 - 1968) auch P. Ehrenfest (1880 - 1933), der aufgrund seines Aufenthalts in Sankt Petersburg von 1907-1912 Kontakte zu russischen Kollegen pflegte, für anregende Diskussionen.

Ausgangspunkt ist die Gleichung (2.118), die wir für eine *unendlich lange gerade Kette* von Massenpunkten mit dem Abstand a und den Verschiebungen ξ_j in der Form

$$\ddot{\xi} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\xi} = -2\,\frac{Gm}{a^3}\sum_{j\neq 0}\frac{\xi_j - \xi}{|j|^3}. \tag{2.125}$$

schreiben. Für einen Ring muss der Term $1/|j|^3$ in dieser Gleichung aufgrund der Polarsymmetrie durch den Ausdruck

$$\frac{1}{|j|^3} \to \left(\frac{\pi}{N}\right)^3 \left(\frac{1}{2\,\sin\left(\frac{\pi}{N}\,j\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{N}\,j\right)^2}{\sin\left(\frac{\pi}{N}\,j\right)^3}\right)$$

ersetzt werden, wobei jetzt aber nicht mehr über alle negativen und positive ganzen Zahlen, sondern nur noch von $j = 1$ bis $j = N-1$ summiert wird. Eine Taylor - Entwicklung der gravitativen Wechselenergie in Polarkoordinaten macht dies offensichtlich. Setzt man dies in die obige Gleichung ein, so folgt für kleine Winkelverschiebungen

$$\ddot{\varphi} + 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)\dot{\varphi} = -\frac{Gm}{4\,R^3}\sum_{j=1}^{N-1}\left(\frac{1}{2\,\sin\left(\frac{\pi}{N}\,j\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{N}\,j\right)^2}{\sin\left(\frac{\pi}{N}\,j\right)^3}\right)(\varphi_j - \varphi)\,. \tag{2.126}$$

Mit der Wellenzahl ℓ betrachten wir nun die Dichtevariation

$$\varphi_j = \delta\,\cos\left(\frac{2\pi}{N}\,\ell\,j\right) \tag{2.127}$$

wo ℓ die ganzzahlige Wellenzahl der Verdichtungen im Ringkosmos und δ ihre anwachsende Amplitude angibt. Einsetzen ergibt

$$\ddot{\delta} + 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)\dot{\delta} = \frac{Gm}{2\,R^3}\,\delta\sum_{j=1}^{N-1}\left(\frac{1}{2\,\sin\left(\frac{\pi}{N}\,j\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{N}\,j\right)^2}{\sin\left(\frac{\pi}{N}\,j\right)^3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{N}\,\ell\,j\right)^2. \tag{2.128}$$

Die Summation können wir umschreiben in die Definition für die Funktion

$$\mathbf{S}[\ell] = \frac{\pi}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{N}\,\ell\,j\right)^2}{\sin\left(\frac{\pi}{N}\,j\right)^3} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{N}\,\ell\,j\right)^2}{2\,\sin\left(\frac{\pi}{N}\,j\right)}\right),$$

$$\simeq \left(3 + 2\left(\ln\left[\frac{N}{2\,\pi}\right] - \phi\left[\frac{1}{2} + \ell\right]\right)\right)\,\ell^2. \tag{2.129}$$

In der asymptotischen Formel bedeutet $\phi(z)$ die logarithmische Ableitung der Gammafunktion. Die Formel gilt für niedrige Wellenzahlen ℓ und hohe Besetzungszahlen N. Mit diesen Ergebnissen lautet die Differentialgleichung für das Amplitudenwachstum

$$\boxed{\ddot{\delta} + 2\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)\,\dot{\delta} = \frac{GM}{2\pi R^3}\,\mathbf{S}[\ell]\,\delta.} \tag{2.130}$$

Jede Dichtemode mit Wellenzahl ℓ hat im expandierenden Ringkosmos ihre eigene Wachstumsrate. Je größer die Wellenzahl, desto schneller wächst die Mode an. Da es keine Schallwellen im Medium gibt, liegt die höchste Wachstumsrate bei $\ell = N/2$, der *Brillouin - Grenze* des N - Teilchenringes. Dies ist die Mode der Paarfusion .

Um die Anwachsraten der Dichtemoden vom Grad ℓ zu berechnen, nehmen wir für den expandierenden Radius im Falle der Gesamtenergie Null

$$R = \left(\frac{9\,GM_e\,t^2}{4\pi}\right)^{1/3} + \ldots \tag{2.131}$$

an. Wir vernachlässigen hierbei *in linearer Ordnung* eine Rückwirkung der Strukturbildung auf die Expansionsrate. Mit dem Ansatz

$$\delta \propto t^{\alpha}, \tag{2.132}$$

ergibt sich durch Einsetzen in (2.130) die quadratische Gleichung

$$\boxed{\alpha^2 + \frac{1}{3}\,\alpha = \frac{2M}{9M_e}\,\mathbf{S}[\ell]} \tag{2.133}$$

für α. Wir können hier von einer Dispersionsrelation für die Anwachsraten der Moden sprechen. Die beiden Lösungen lauten

$$\alpha_+ = \frac{1}{6}\left(-1 + \sqrt{1 + 8\,\frac{M}{M_e}\,\mathbf{S}[\ell]}\right),$$

$$\alpha_- = \frac{1}{6}\left(-1 - \sqrt{1 + 8\,\frac{M}{M_e}\,\mathbf{S}[\ell]}\right).$$

Wir betrachten hier nur den positiven Dispersionszweig. Die mit der Expansion des Ringes anwachsenden Dichtestrukturen haben den Zeitexponenten

$$\alpha_+ = \frac{1}{6}\left(-1 + \sqrt{1 + 8\,\frac{M}{M_e}\,\mathbf{S}[\ell]}\right). \tag{2.134}$$

Nur bei der Mode mit $\ell = 1$ gilt $\alpha < 2/3$, alle anderen sind größer als Eins. Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, dass der negative Wert dieses Exponenten α_+ der effektive w Parameter der betrachteten Dichtemode ist. Der Ringkosmos hat also eine diskrete Folge von w Parametern - je nach der angeregten Dichtemode. Die höchste Anwachsrate hat natürlich die Paarfusion mit $\ell = N/2$. Auf diese werden wir uns im Folgenden beschränken.

2.14 Der statische w - Parameter im Ringkosmos

Die wichtigste Frage bezüglich der Dynamik des *idealisierten* expandierenden Ringmodelles lautet: In welchem Maße nimmt die Mode der Paarfusion Einfluss auf die Expansionsrate des Ringes und welchen Wert hat dabei der w - Parameter? Nicht minder wichtig ist die Frage: *Wie verändert sich der w-Parameter während der Paarfusion?*

Die analytische Berechnung des w Parameters im linearen Bereich kann mit Hilfe der *Layzer – Irvine* Gleichung vollständig erledigt werden; man benötigt nicht unbedingt die vollständige Lagrangedichte des Systems *Expansion + Strukturbildung (Paarfusion)*. Um dies genauer abzuschätzen, lösen wir die Gleichung (2.162) in erster Näherung nach R auf. Es gilt

$$R = \left(\frac{9\,GM_e\,t^2}{4\pi}\right)^{1/3} + \ldots$$

Diesen Ausdruck setzen wir nun in die ausdifferenzierte *Layzer - Irvine* Gleichung (2.116) ein, berücksichtigen für das Potential die Oszillatornä-

herung (Taylorentwicklung)

$$\mathbf{\Phi}[\varphi] = \frac{1}{2}\,\mathbf{\Phi}''[0]\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2\varphi^2 + \ldots \tag{2.135}$$

und erhalten in linearer Näherung in φ

$$t^2\,\ddot{\varphi} + \frac{4}{3}\,t\,\dot{\varphi} = \frac{2M}{9M_e}\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2\mathbf{\Phi}''[0]\,\varphi. \tag{2.136}$$

Mit dem Ansatz

$$\varphi \propto\ t^{\alpha}, \tag{2.137}$$

wo ϵ eine sehr kleine Skalengröße und α eine zunächst noch unbekannte reelle oder komplexe Zahl ungleich Null darstellen, ergibt sich durch Einsetzen in (2.136) die quadratische Gleichung

$$\alpha^2 + \frac{1}{3}\,\alpha = \frac{2M}{9M_e}\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2\mathbf{\Phi}''[0]. \tag{2.138}$$

Die beiden Lösungen lauten

$$\alpha_+ = \frac{1}{6}\left(-1 + \sqrt{1 + 8\,\frac{M}{M_e}\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2\mathbf{\Phi}''[0]}\right),$$

$$\alpha_- = \frac{1}{6}\left(-1 - \sqrt{1 + 8\,\frac{M}{M_e}\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2\mathbf{\Phi}''[0]}\right).$$

Hier soll wieder nur die Wurzel α_+ physikalisch relevant sein, da nur sie **bei einem nach außen expandierenden Ring die anwachsende Paarfusion** in der Zukunft beschreibt. Die andere Mode werden wir zumindest im Ringkosmos *nicht in Betracht ziehen.*

Da $N \gg 1$ ist, wird α_+ proportional N eine sehr große Zahl sein. Aus den obigen Formeln ergibt sich asymptotisch

$$\alpha_\pm^2 \simeq \frac{2}{9}\,\frac{M}{M_e}\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2\mathbf{\Phi}''[0]. \tag{2.139}$$

Für den wichtigen **w** Parameter erhalten wir so in der quadratischen Näherung des Potentials

$$w = \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{2\pi R^3}\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \mathbf{\Phi}''[0]\,\varphi^2}\right) \tag{2.140}$$

Einsetzen der obigen Lösungen für φ und R liefert zunächst

$$w = \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \frac{2\,M}{9\,M_e}\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \mathbf{\Phi}''[0]}\right) \tag{2.141}$$

Aufgrund der Gleichung (2.138) ist der Nenner aber gleich $-1/3\,\alpha$. Also ergibt sich überraschend die wichtige Relation

$$\boxed{\varphi \;\propto\; t^{\alpha}; \qquad w = -\alpha.} \tag{2.142}$$

Der w - Parameter der Zustandsgleichung eines expandierenden Ringes mit Paarfusion entspricht am Anfang der Entwicklung somit dem negativen Exponenten α der linear anwachsenden Dichtestrukturen (Paarfusionen). Später werden wir sehen, dass dieses wichtige Ergebnis auch in einem *dreidimensionalen Raum* gilt. Für einen Ringkosmos mit „Paarfusion " ergibt sich so zu Beginn der Entwicklung der w-Parameter zu

$$w_+ = \frac{1}{6}\left(1 - \sqrt{1 + 8\,\frac{M}{M_e}\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \mathbf{\Phi}''[0]}\right). \tag{2.143}$$

Diese Formel ist ein überrraschend einfaches Ergebnis unseres „Ringkosmos". Aufgrund von Analogiebetrachtungen zwischen den Einstein'schen FLRW - Gleichungen und der *Entropie - Gleichung* gelingt es, diesen wichtigen Parameter **w** als Funktion des gravitativen Skalarfeldes (Potentials) **Φ** darzustellen. Wir erhalten für den **w** Parameter im Ringmodell wegen $N \gg 1$ die Abschätzung

$$w \sim -\frac{N}{6\,\pi}\,\sqrt{2\,\frac{M}{M_e}\,\mathbf{\Phi}''[0]} = -\frac{N}{6\,\pi}\,\sqrt{14\,\zeta[3]\,\frac{M}{M_e}}, \tag{2.144}$$

weil $\mathbf{\Phi}''[0]$ nach der Newtonschen Theorie der Zahlenwert $7\,\zeta[3]$ ist.

2.15 Der dynamische w - Parameter

Die obige *linearisierte Theorie* reicht allerdings nicht aus, genauere Aussagen über die Veränderungen von $w[\xi]$ bei zunehmenden Verdichtungen bis zur Paarfusion zu machen. Um diesen wichtigen nichtlinearen Funktionsverlauf eines dynamischen Parameters $w[\xi]$ genauer zu berechnen, definieren wir zunächst die Funktion $\chi[t]$ gemäß

$$w = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\mathbf{\Phi}}{\chi}\right). \tag{2.145}$$

Mit (2.59) und (2.16) ergibt sich so für die Funktion $\chi[t]$

$$\chi = \frac{\pi R^3}{GM}\left\{\dot{\varphi}^2 - \frac{G\,M}{\pi R^3}\mathbf{\Phi}\,[\xi]\right\}$$

oder

$$\chi = \frac{\pi R^3}{GM}\left(\frac{2\pi}{N}\,\dot{\xi}\right)^2 - \mathbf{\Phi}[\xi] \tag{2.146}$$

Die physikalische Bedeutung dieser Funktion wird durch die Entropiegleichung (2.64) deutlich, indem diese nämlich die auf das Volumen $V \propto R^3$ normierte Energie $\varrho_\epsilon V$ darstellt. Wir berechnen nun

$$\frac{d\,\chi}{d\,\xi} = \frac{\dot{\chi}}{\dot{\xi}}; \qquad \frac{d^2\,\chi}{d\,\xi^2} = \frac{\dot{\xi}\,\ddot{\chi} - \dot{\chi}\,\ddot{\xi}}{\dot{\xi}^3}. \tag{2.147}$$

und eliminieren die Größen $\ddot{\xi}$ und $\ddot{R}$ durch die Bewegungsgleichungen (2.116) und (2.29). Mit Hilfe der beiden so berechneten Größen $\chi[\xi]$ und $d\chi[\xi]/d\xi$ lassen sich die Unbekannten R und $\dot{R}$ eliminieren. Durch Einsetzen in $d^2\chi[\xi]/d\xi^2$ entsteht so eine einzige Differentialgleichung für $\chi[\xi]$, wobei die verbleibende dynamische Variable $\dot{\xi}$, die ungleich Null sein muss, herausfällt. Es folgt für $\chi[\xi]$ die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} &2\,(\chi[\xi] + \mathbf{\Phi}[\xi])\;\chi''[\xi] - \chi'[\xi]\,\mathbf{\Phi'}[\xi] \\ &+ \left(\frac{2\pi}{N}\right)^2 (\chi[\xi] + \mathbf{\Phi}[\xi])\left(2\,\chi[\xi] + \mathbf{\Phi}[\xi] - \frac{M_e}{M}\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.148}$$

In dieser Gleichung werden durch die Funktion $\chi[\xi]$ die dynamischen Vorgänge der Expansion und der Strukturbildung im Ringkosmos konsistent miteinander vereinigt. Da die Größe w bei großen Teilchenzahlen von der Größenordnung $-N$ ist, muss die Funktion $\chi[\xi]$ von der Größenordnung $-1/N$ sein. Zunächst suchen wir das asymptotische Verhalten der Funktion $\chi[\xi]$ für $\xi \to 0$. Für $\mathbf{\Phi}[\xi]$ gilt ganz allgemein die Reihenentwicklung

$$\mathbf{\Phi}[\xi] = \frac{1}{2}\mathbf{\Phi}''[0]\,\xi^2 + \frac{1}{24}\mathbf{\Phi}^{(4)}[0]\,\xi^4 + \ldots$$

Mit dem Ansatz

$$\chi[\xi] = \frac{1}{2}\chi''[0]\,\xi^2 + \frac{1}{24}\chi^{(4)}[0]\,\xi^4 + \ldots$$

gehen wir in die Differentialgleichung (2.148) ein und bestimmen durch Koeffizientenvergleich die Größe $\chi''[0]$. Man erhält die beiden Lösungen

$$\chi''[0] = \frac{\pi\left(\pi M_e - \sqrt{M_e(\pi^2 M_e + 2\,\mathbf{\Phi}''[0]\,M\,N^2)}\right)}{M\,N^2}, \tag{2.149}$$

$$\chi''[0] = \frac{\pi\left(\pi M_e + \sqrt{M_e(\pi^2 M_e + 2\,\mathbf{\Phi}''[0]\,M\,N^2)}\right)}{M\,N^2}. \tag{2.150}$$

Für einen expandierenden Ring kommt nur die Lösung mit dem negativen Wurzelzeichen in Frage. Asymptotisch für $N \to \infty$ gilt somit

$$\chi''[0] = -\frac{\pi}{N}\sqrt{2\,\mathbf{\Phi}''[0]\,\frac{M_e}{M}} + \left(\frac{\pi}{N}\right)^2\frac{M_e}{M} + \ldots \tag{2.151}$$

Wird dies in (2.145) eingesetzt, so ergibt sich für den Zustandsparameter w wieder das asymptotische Resultat (2.144).

Ein im Bereich $0 < \xi < 1/2$ genaueres Resultat erzielen wir durch den nach $1/N$ fortschreitenden Störungsansatz

$$\chi[\xi] = \frac{1}{N}\,\chi_1[\xi] + \frac{1}{N^2}\,\chi_2[\xi] + \ldots, \tag{2.152}$$

in dem nun die unbekannten Funktionen $\chi_n[\xi]$ zu bestimmen sind. Wird diese Reihe in (2.148) eingesetzt, so folgt eine Hierarchie von gekoppelten Differentialgleichungen der Form

$$2\,\mathbf{\Phi}[\xi]\,\chi_1''[\xi] - \mathbf{\Phi}'[\xi]\chi_1'[\xi] = 0$$

$$2\,\mathbf{\Phi}[\xi]\,\chi_2''[\xi] - \mathbf{\Phi}'[\xi]\chi_2'[\xi] = 4\pi^2\,\frac{M_e}{M}\,\mathbf{\Phi}[\xi] - 4\pi^2\,\mathbf{\Phi}[\xi]^2 - 2\chi_1[\xi]\chi_1''[\xi]$$
$$\ldots = \ldots$$

Die allgemeine Lösung der ersten Gleichung, auf die wir uns hier beschränken, lautet

$$\chi_1[\xi] = C_0 + C_1 \int_0^\xi \sqrt{\mathbf{\Phi}[u]}\,du. \tag{2.153}$$

Ein Vergleich mit (2.144) und (2.145) führt zu $C_0 = 0$. Die Konstante C_1 ergibt sich mit (2.144) und (2.145) durch den Grenzübergang $\xi \to 0$. Man erhält

$$\chi_1[\xi] = -2\pi\sqrt{\frac{M_e}{M}}\int_0^\xi \sqrt{\mathbf{\Phi}[u]}\,du. \tag{2.154}$$

Die asymptotische Lösung für $w[\xi]$ während der Paarfusion bis zur Paarkollision lautet somit bis zur Ordnung $1/N$ genau

$$\boxed{w[\xi] = -\frac{N\,\mathbf{\Phi}[\xi]}{6\,\pi\,\sqrt{M_e/M}\,\int_0^\xi \sqrt{\mathbf{\Phi}[u]}\,du}.} \tag{2.155}$$

Da für die Potentialfunktion $\mathbf{\Phi}[\xi]$ die Entwicklung

$$\mathbf{\Phi}[\xi] = \frac{7}{2}\,\zeta[3]\,\xi^2 + \frac{31}{2}\,\zeta[5]\,\xi^4 + O[\xi]^6$$

gilt, folgt für $w[\xi]$ die Entwicklung ($N \gg 1$)

$$w[\xi] = -\frac{N}{3\pi}\sqrt{\frac{7\,\zeta[3]\,M}{2\,M_e}}\left\{1 + \frac{93\,\zeta[5]}{28\,\zeta[3]}\,\xi^2 + \ldots\right\}$$

In der Figur (2.11) ist für die Teilchenzahlen $N = 1000$ und $N = 2000$ der Verlauf der Funktion (2.155) dargestellt. Während bei kleinen Werten von ξ der w - Parameter nahezu konstant bleibt, fällt er bei größeren ξ - Werten immer stärker ab und wird bei der Paarkollision sogar singulär *negativ unendlich*. Interessant ist es noch zu bemerken, dass nur im Falle eines reines harmonischen Oszillatorpotentials $\mathbf{\Phi} \propto \xi^2$ der w-Parameter während der Paarfusion im Ringkosmos konstant bliebe.

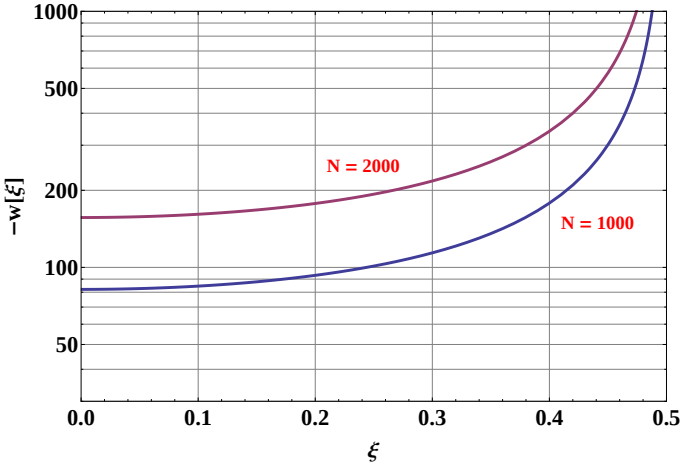


Fig. 2.11: *Das Verhalten des dynamischen EOS - Parameters $w[\xi]$ für $N = 1000$ und $N = 2000$ Teilchen im Ringkosmos, berechnet mit der asymptotischen Formel (2.155). Der w-Parameter ist während der Strukturbildung nicht konstant, sondern fällt ständig zu negativeren Werten ab und wird bei der Paarkollision $\xi = 1/2$ der „Punktmassen" sogar negativ singulär. Die „dunkle Energie" im Ringkosmos wird also immer stärker. Ein analoges Verhalten erwarten wir auch im realen 3D-Universum.*

Mit der Definition der Funktion $\chi[\xi]$ durch (2.146) ergibt sich im *comoving frame* für die „Energiedichte" ($\xi = N\varphi/(2\pi)$)

$$\dot{\varphi}^2 - \frac{G\,M}{\pi R^3}\mathbf{\Phi}\,[\xi] = -\frac{2\,G\sqrt{M_e M}}{N\,R^3}\int_0^{\xi}\sqrt{\mathbf{\Phi}[u]}\,du - \ldots \qquad (2.156)$$

Diese Energiedichte ist negativ, was eine notwendige Voraussetzung für eine kurze beschleunigte Expansion des Ringkosmos ist. Dies untermauert die Sichtweise von Einstein in der Einstein - Schrödinger Debatte von 1918, wenn wir Einstein's *negative Massendichte* mit unserer *negativen Energiedichte* gleichsetzen ([175],[44]). Der effektive w - Parameter im 1D - Ringmodell weicht natürlich stark von dem gegenwärtig beobachteten Wert $w \sim -1$[26] im realen 3D - Kosmos ab. Die gravitativen Kopplungen sind hier allerdings sehr unterschiedlich. Wichtig ist aber die Tatsache,

[26] bezogen auf das Jahr 2010

dass mit *zunehmender Strukturbildung der w- Parameter von seinem asymptotischen negativen Wert für $\xi \to 0$ immer negativer wird - also nicht konstant bleibt.* Dies Verhalten sollte auch der w - Parameter im realen 3D-Kosmos zeigen. In der Vergangenheit ein konstanter negativer Wert, der aber mit zunehmender Strukturbildung immer weiter abfällt. Dies wäre natürlich im Widerspruch zur Theorie einer sogenannten kosmologischen Konstanten. Auf diese wichtige Tatsache muss später noch genauer eingegangen werden.

2.16 Die beschleunigte Expansion des Ringkosmos

Die wohl wichtigste Eigenschaft des expandierenden Ringkosmos betrifft das Verhalten des Ringradius R beim Einsetzen der „Paarfusion ". Um dieses genauer zu quantifizieren, entwickeln wir R um einen beliebigen Zeitpunkt $t = t_0$ in eine Taylorreihe

$$R = R(t_0)\left(1 + H_0\,(t-t_0) + \frac{1}{2!}\,q_2\,H_0^2\,(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}\,q_3\,H_0^3\,(t-t_0)^3 + \ldots\right). \tag{2.157}$$

Die Größe H_0 ist der „Hubble-Lemaître Parameter", gegeben durch

$$H_0 = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)}. \tag{2.158}$$

Das eigentliche Expansionsverhalten wird nun durch die Parameter $q_2, q_3, \ldots$ beschrieben. Sie sind definiert durch

$$q_n = \frac{[R(t_0)]^{n-1}\,R^{(n)}(t_0)}{[\dot{R}(t_0)]^n}. \;\; \{n = 2, 3, \ldots\} \tag{2.159}$$

Seit dem Buch *Gravitation and Cosmology* von S. Weinberg 1972 wird in der Kosmologie der Parameter q nur als der naive „Bremsparameter"

$$q = -q_2 \tag{2.160}$$

definiert. Ich folge hier dieser alten Tradition, da die Schreibweise dann einfacher ist.

Für die vollständige Lagrangedichte des „expandierenden paarbildenden“ Ringes ergab sich der Ausdruck

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\,\dot{\varphi}^2\right) + \frac{GM_e}{2\pi R} + \frac{GM}{2\pi R}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right].$$

Daraus folgt für die Bewegungsgleichung von R

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{GM_e}{2\pi R^3} - \frac{GM}{2\pi\, R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right] + \dot{\varphi}^2. \tag{2.161}$$

Der Energiesatz liefert für das „*Null-Energie Universum*“ $\epsilon_0 = 0$ die Beziehung (*Hubblefunktion*)

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{GM_e}{\pi R^3} + \frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right] - \dot{\varphi}^2. \tag{2.162}$$

Fast *paradox* ist hier , dass zwar in der Beschleunigung (2.161) der Term $\dot{\varphi}^2$ *positiv*, in der Energiebilanz (*Hubble-Lemaître Funktion*) (2.162) aber *negativ* eingeht. Definiert man nun mit S. Weinberg den „Bremsparameter“ $q = -q_2$ mit

$$q = -\frac{R\,\ddot{R}}{\dot{R}^2}, \tag{2.163}$$

so folgt für den expandierenden Teilchenring mit Paarfusion

$$q = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\dot{\varphi}^2}{\dfrac{GM_e}{\pi R^3} + \dfrac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right] - \dot{\varphi}^2}\right) \tag{2.164}$$

Wenn am Anfang die Teilchen sehr nahe bei ihrer Anfangslage $\varphi[0] \approx 0$ bleiben (keine Strukturbildung), wird dieser Parameter immer nahe $1/2$ sein. Der Ring wird in seiner Expansion also stetig abgebremst. Wenn aber die Teilchen während der Expansion des Ringes in die Position $\varphi \to \pm\pi/N$ gelangen (Paarkollision), so wird der Parameter q deutlich abnehmen und sein Vorzeichen zum negativen wechseln. Durch diese Paarfusion wird der Ring so für eine **sehr kurze Zeit eine beschleunigte Expansion** erfahren.

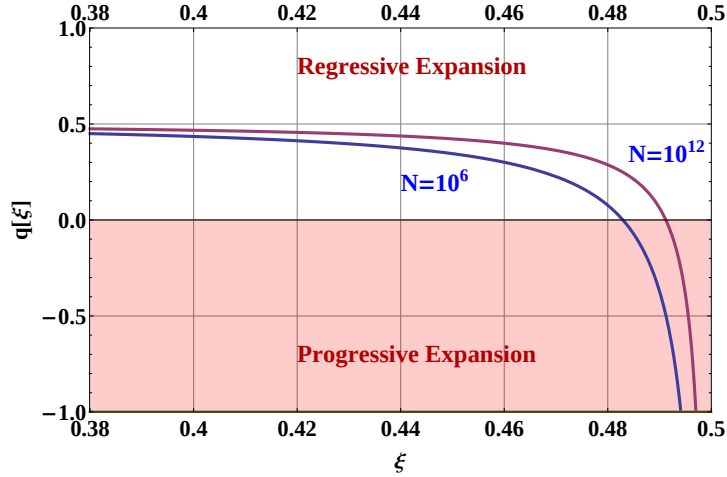


Fig. 2.12: *Der normierte Beschleunigungsparameter $q[\xi] = -q_2[\xi]$ nach (2.167) als Funktion der Lagrangeschen Verschiebung $\xi = N/(2\pi)\,\varphi$ für 2 Werte der Teilchenzahl N im Ring. Die blau markierte Linie entspricht dem Wert $N = 10^6$, die rot markierte dem Wert 10^{12}. Bei Überschreitung eines kritischen Schwellwertes ξ_0 (siehe 2.2) geht die regressive in eine progressive Expansion des Ringes über.*

Nach der Definition (2.59) gilt nun durch Umkehrung für das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{3\,w}{3\,w-1}\,\frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\,. \tag{2.165}$$

Da im Ringmodell bei sehr großen Teilchenzahlen N für $|w| \to \infty$ gilt (siehe (2.144)), gilt nach (2.156) die Relation ($N \gg 1$)

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{G\,M}{\pi R^3}\,\Phi\,[\xi] - \frac{2\,G\sqrt{M_e M}}{N\,R^3}\int_0^{\xi}\sqrt{\mathbf{\Phi}[u]}\,du - O[N]^{-2} \tag{2.166}$$

Eine andere Herleitung ist im Anhang (A.22) zu finden. Mit dieser Relation folgt dann mit $\varphi = 2\pi/N\,\xi$ bis auf Terme der Ordung $1/N$ sofort

$$\boxed{q[\xi] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{M}{M_e}\,\mathbf{\Phi}[\xi]\right).} \tag{2.167}$$

Diese q Formel ist das wichtigste physikalische Ergebnis unseres *gravitierenden, expandierenden und strukturbildenden Ringmodelles. Der Ring kann seine Expansion durch symmetrische Paarfusion gegen die eigene Gravitation selber für eine kurze Zeitspanne beschleunigen!*[27]. Da für $\xi \to \pm 1/2$ die Potentialfunktion („Metrikfunktion“) $\mathbf{\Phi}[\xi]$ gegen Unendlich strebt, ist bewiesen, dass sich der *gravitierende und gleichmäßig expandierende Ring nur durch „Paarfusion “ beschleunigen kann*, also dass $q[\xi]$ kurz vor der Paarkollision *negativ* wird. Je höher die Teilchenzahl N, desto enger müssen allerdings die Teilchen beisammen stehen, damit diese kritische Schwelle $q(\xi_0) = 0$ von der Brems – zur Beschleunigungshase einsetzen kann (siehe Fig. (2.12). Aus der asymptotischen Darstellung von $\mathbf{\Phi}[\xi]$ für $\xi \to 1/2$ (siehe (A.13)) ergibt sich mit (2.25) für diesen kritischen Schwellenwert sehr genau

$$\xi_0[N] \approx \frac{1}{\pi} \arctan\left[\frac{4}{\pi} \ln\left[\frac{4}{\pi} e^{\gamma} N\right]\right]. \tag{2.168}$$

Im Bereich $0 < \xi < \xi_0$ bremst die Expansion, im Bereich $\xi_0 < \xi \leq 1/2$ beschleunigt die Expansion des Ringes. Man kann auch eine Aussage zur gravitativen Bindungsenergie des Ringes am Schwellenwert ξ_0 machen. Nach (2.177) gilt für diese Gravitationsenergie

$$\begin{aligned} |E_{grav}(R,\xi)| &= \frac{GM\,M_e}{2\pi R} + \frac{GM^2}{2\pi R}\,\mathbf{\Phi}\,[\xi] \\ &= \frac{GM\,M_e}{2\pi R}\,(1+\beta) \end{aligned} \tag{2.169}$$

Mit dem Energieverhältnis ($\xi = N\,\varphi/(2\pi)$)

$$\beta = \left|\frac{E_{grav}[R,\xi]}{E_{grav}[R,0]}\right| - 1 = \frac{M}{M_e}\,\mathbf{\Phi}[\xi] \tag{2.170}$$

gilt dann alternativ

$$\boxed{q = \frac{1}{2}\,(1-\beta)} \tag{2.171}$$

[27] Der ganze Vorgang erinnert etwas an den **„Münchhauseneffekt“**: Sich am eigenen Schopfe aus dem Sumpf ziehen. Im Amerikanischen gibt es dafür das Bild: „Sich an den eigenen Stiefelschlaufen (*bootstrap*) herausziehen“. („pull oneself over a fence by one's bootstraps“)

$\log_{10}[N]$	ξ_0	$\log_{10}(N)$	ξ_0
1	0.419807	11	0.490439
2	0.453897	12	0.491213
3	0.467641	13	0.491871
4	0.475072	14	0.492437
5	0.479727	15	0.492929
6	0.482917	16	0.493362
7	0.485239	17	0.493744
8	0.487006	18	0.494085
9	0.488395	19	0.494391
10	0.489515	20	0.494666

Tab. 2.2: *Der kritische Schwellwert ξ_0 als Funktion der Besetzungszahl N im Ring, wie er sich aus der Gleichung $\mathbf{\Phi}(\xi_0) = M_e/M$ ergibt. Beim Wert ξ_0 hat sich die Gravitationsenergie (Bindungsenergie) des Ringes verdoppelt und im Bereich $\xi > \xi_0$ beginnt die Phase der beschleunigten Expansion des Ringes, bis sie bei $\xi = 1/2$ durch die Kollision der Punktmassenpaare endet.*

Da am Übergangspunkt $\mathbf{\Phi}(\xi_0) = M_e/M$ gilt, folgt die *von der Teilchenzahl N völlig unabhängige energetische Bedingung* $\beta_c = 1$. Die durch die Paarfusion zusätzlich entstehende gravitative Energie des expandierenden Ringes muss also der Energie des jeweiligen *homogenen Grundzustandswert* $E_{grav}(R, 0)$ *gleichkommen*, um den Schwellenwert der beschleunigten Expansion zu erreichen. Durch eine ähnliche Überlegung erhält man für die kinetische Energie am Übergangspunkt ξ_0

$$\frac{E_{kin}[R, \xi_0]}{E_{grav}[R, 0]} = 1. \tag{2.172}$$

Am Übergangspunkt zur beschleunigten Expansion verhalten sich die Anteile von Gravitationsenergie und „thermischer“ Energie im Ring wie 2:1. Damit ist bewiesen, dass es auch in einem klassischen Newton'schen Vielteilchensystem dynamische Rückkopplungen geben kann, die ab einem bestimmten Verdichtungswert zu einer beschleunigten Expansion des Gesamtsystems führen können. *Das Phänomen beruht somit nicht ausschließlich auf Effekten der allgemeinen Relativitätstheorie.* Dies wird für die spätere Diskussion noch wichtig werden.

Die beschleunigte Expansion im Ringkosmos ist beim Radius R allerdings kaum merklich . Denn nach (2.162) und (2.165) gilt für die

Hubblefunktion

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{GM_e}{\pi R^3} + \frac{1}{1-3\,w}\,\frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\xi]\,. \tag{2.173}$$

Mit (2.155) können wir aufgrund großer Besetzungszahlen N auch

$$\boxed{\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{GM_e}{\pi R^3}\left\{1 + \frac{2\pi}{N}\sqrt{\frac{M}{M_e}}\int_0^{\xi}\sqrt{\mathbf{\Phi}[u]}\,du\right\}} \tag{2.174}$$

schreiben. Der Faktor in der geschweiften Klammer bleibt aufgrund großer Besetzungszahlen N auch zum Zeitpunkt der singulären Paarkollision $\xi = 1/2$ nahe Eins. Denn es gilt

$$\int_0^{1/2}\sqrt{\mathbf{\Phi}[u]}\,du = \mathbf{0.5044}... \tag{2.175}$$

Quantitativ wichtig ist es aber , dass dieser kurz wirksame beschleunigende Effekt im klassischen Modell wirklich existiert. Die nächsten Beschleunigungsparameter wären q_3, den man auch als „Ruck“ (Englisch **jerk**) bezeichnet, sowie q_4, der im Englischen „**snap**“ genannt wird. Beide hätten hier aber nur noch akademisches Interesse.

Nun sind wir auch in der Lage, die weitere Entwicklung der *negativen* Energiedichte während der Paarfusion zu berechnen. Durch Vergleich von (2.174) mit (2.30) und (2.58) folgt nach (2.156) bis zur Ordnung $1/N$ genau ($\xi = N\,\varphi/(2\pi)$)

$$\dot{\varphi}^2 - \frac{G\,M}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\xi] = -\frac{2\,G\sqrt{M_e M}}{N\,R^3}\int_0^{\xi}\sqrt{\mathbf{\Phi}[u]}\,du - O[N]^{-2} \tag{2.176}$$

Die Energiedichte während der Paarfusion ist somit wirklich negativ und erreicht bei der Verschmelzung $\xi = 1/2$ einen endlichen minimalen Wert. Einstein hatte also bei der Diskussion der Λ Konstante mit Schrödinger im Jahre 1918 in sofern Recht, wenn wir im Sinne der Relativitätstheorie die *negative „Massendichte“* als *negative Energiedichte* interpretieren ([44],[175]).

2.17 Dunkle Energie ist negative Gravitationsenergie

Zum Abschluss des Ringmodelles wollen wir noch eine wichtige Tatsache betonen: *Die beschleunigte Expansion des idealisierten Ringmodelles (Ringuniversums) ist nicht ein Effekt der Relativitätstheorie, der in den Newtonschen Gleichungen der Kosmologie berücksichtigt werden muss, um eine Abbremsung ins Gegenteil zu verwandeln.* Der deutsche Astrophysiker W. KUNDT drückt seine Bedenken bezüglich der Λ Konstante in seinem Buch *Physikalische Mythen auf dem Prüfstand* ([101]) im Jahre 2014 so aus:

> *...Noch haben wir zu diesem Thema („Dunkle Energie") kein endgültiges Urteil, noch bestehen unsere genannten grundsätzlichen Bedenken, aber noch ist dieses Manuskript nicht endgültig eingereicht: Immerhin fällt es uns schon jetzt schwer, unsere Intuition derart zu beugen, dass relativistische Korrekturen eine gebremste Newton'sche Expansion des Raumes ins Gegenteil wandeln könnten; das verletzt die Ästhetik der Naturgesetze, meinen wir. „Dunkle Energie" mag ins Zauberhandwerk passen, aber nicht in die exakten Naturwissenschaften. Physikalische Grundgleichungen sollten sich nicht bedenkenlos über bewährte Prinzipien (Energie-Ungleichungen) hinwegsetzen dürfen.*

Die Bedenken von W. KUNDT halten wir zwar für berechtigt, aber wir können sie hier entkräften: Die Ursache der beschleunigten Expansion kann zumindest vollständig im Bilde der *Newtonschen Dynamik* verstanden werden, wie wir im vorhergehenden Kapiteln am Ringmodell gezeigt haben. Kritisch und notwendig ist dazu die Annahme und Definition eines *globalen Energiesatzes* und einer entsprechenden *globalen Energieerhaltung*. Die Ästhetik des Gravitationsgesetzes im Bilde der Newtonschen Gravitation wird dann folgerichtig in keiner Weise gestört. Allerdings treten Probleme in der Einsteinschen Gravitationstheorie bei der Definition von *Gravitationsenergien* im globalen Kontext auf!

Wiederholen wir die wesentlichen Schritte unseres Modelles noch einmal in einer alternativen energetischen Betrachtung: Da die Lagrangefunktion in einem mechanischen System ganz allgemein die Differenz aus kinetischer

und *negativer* potentieller Gravitationsenergie darstellt, ergibt sich aus (2.27) ein analytischer Ausdruck für die *gravitative Bindungsenergie* des gesamten Ringsystems zu ($E_{GRA}(R,\varphi) \equiv -E_{BIN}(R,\varphi)$)

$$E_{BIN}(R,\varphi) = \frac{GM\,M_e}{2\pi R} + \frac{GM^2}{2\pi R}\,\mathbf{\Phi}\,[\varphi]\,. \tag{2.177}$$

Diese Bindungsenergie[28] benötigt man, um das selbstgravitierende N – Teilchensystem vollständig aufzulösen, so dass alle Teilchen unendliche Abstände voneinander bekommen ($R \to \infty$). Für $\varphi = 0$ (keine Paarfusion) ist die Bindungsenergie des Ringes minimal, je stärker jedoch die Paarfusion ausgebildet ist, desto höher wird der Wert der Bindungsenergie. Bei der Paarkollision ist sie Unendlich.

Die Gesamtenergie des expandierenden Ringes mit Strukturbildung lautet in diesem Bild

$$E = \frac{1}{2}\,M\,\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\,M\,R^2\,\dot{\varphi}^2 - E_{BIN}(R,\varphi). \tag{2.178}$$

Der erste Anteil beschreibt hier die kinetische Energie der reinen Ring - Expansion, der dritte Anteil die eigentliche gravitative Bindungsenergie des Gesamtsystems. Der zweite Energieanteil ist etwas besonderes: Er stellt die **Rotationsenergie** des Ringes dar, obwohl der Gesamtdrehimpuls des Systems immer Null ist! Teilchen mit geraden Marken und die mit ungeraden Marken rotieren in entgegengesetzten Richtungen! Die daraus resultierende Rotationsenergie beschreibt die kinetische Energie der *inneren Pekuliarbewegungen (Eigenbewegung) der „Galaxien" im Ring.* In einer hydrodynamischen Bewegungsgleichung würde dieser Energieanteil nicht direkt auftreten, da er mit der *mikrophysikalischen thermischen Bewegung von Gasmolekülen* verknüpft wäre.

Da die zeitliche Änderung der Gesamtenergie Null sein muss, folgt aus der obigen Bilanz zunächst

$$\begin{aligned} M\,\dot{R}\,\ddot{R} &= \frac{d}{dt}\,E_{BIN}(R,\varphi) - \frac{1}{2}\,M\,\frac{d}{dt}\,\left(R^2\,\dot{\varphi}^2\right) \\ &= \dot{R}\,\frac{\partial E_{BIN}}{\partial R} + \dot{\varphi}\,\frac{\partial E_{BIN}}{\partial \varphi} - \frac{1}{2}\,M\,\frac{d}{dt}\,\left(R^2\,\dot{\varphi}^2\right) \end{aligned} \tag{2.179}$$

[28] Die physikalische Betrachtung in diesem Kapitel entstand durch eine kritische Diskussion mit Hans Fahr 2011 (siehe H.J. Fahr, M. Sokaliwska: The influence of gravitational binding energy on cosmic expansion dynamics: new perspectives for cosmology; Astrophys Space Sci **339**:379-387 (2012))

Für die Winkelvariable φ gilt nach (2.32) und (2.177) die Bewegungsgleichung

$$M \frac{d}{dt}\left(R^2 \dot{\varphi}\right) = \frac{\partial E_{BIN}}{\partial \varphi}. \tag{2.180}$$

Damit nimmt die Bewegungsgleichung des Ringradius die Form

$$M \dot{R} \ddot{R} = \dot{R} \frac{\partial E_{BIN}}{\partial R} + M \dot{\varphi} \frac{d}{dt}\left(R^2 \dot{\varphi}\right) - \frac{1}{2} M \frac{d}{dt}\left(R^2 \dot{\varphi}^2\right) \tag{2.181}$$

an. Im klassischen Bild der *Newton'schen Mechanik* ergibt sich so für die Kraft $\mathcal{F} = M \ddot{R}$ der Ausdruck (man vergleiche (2.29))

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{\partial E_{BIN}}{\partial R} + M R \dot{\varphi}^2.} \tag{2.182}$$

Anhand dieser Kraftgleichung kann man sehen, dass die Zunahme der *Bindungsenergie* primär nicht die Ursache für eine beschleunigte Expansion des Ringes sein kann. Denn der erste Term in der obigen Kraftrelation (2.182) ist *immer negativ*, kann also niemals eine Beschleunigung nach außen erzwingen. Und je höher die Bindungsenergie, desto stärker werden die Ringteilchen nach innen komprimiert. Die eigentlich Beschleunigungskraft nach außen kann nur durch den zweiten Term ausgelöst werden. Und dieser Term stellt eine **Zentrifugalkraft** dar, die immer nach außen wirkt und proportional dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ ist.

Diese Zentrifugalkraft ist über die **EoS** - Zustandsgleichung (A.17 an das durch Strukturbildung entstehende gravitative Kraftfeld gekoppelt. Es gilt daher im Ring

$$M R \dot{\varphi}^2 = \frac{3\,w}{3\,w - 1} \frac{GM^2}{\pi R^2} \mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]. \tag{2.183}$$

Da für den **EoS** - Parameter im Ring $|w| >> 1$ gilt (siehe 2.144), können wir für die Zentrifugalkraft einfacher

$$M R \dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{GM^2}{\pi R} \mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right). \tag{2.184}$$

schreiben. Mit dem Minuszeichen ist der in den Klammern stehende Ausdruck *rein formal* die **„Dunkle Energie“** des Ringes. Man kann

also „rein formal“ definieren

$$\boxed{E_{DE} = \frac{GM^2}{\pi R}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right].} \tag{2.185}$$

Dieser Energieterm erzeugt ein antigravitatives Zentrifugalfeld, welches die wahre Ursache der beschleunigten Expansion des Ringes ist. Die Kraftbilanz auf den Ring lautet also

$$\mathcal{F} = \frac{\partial}{\partial R}\left(E_{BIN}(R,\varphi) - E_{DE}(R,\varphi)\right). \tag{2.186}$$

Mit Hilfe von (2.182), (2.185) und (2.186) ergibt sich so zunächst wieder die Gleichung (2.29)

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\left\{\frac{GM_e}{2\pi R^3} + \frac{GM}{2\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right] - \dot{\varphi}^2\right\} \tag{2.187}$$

Nach Elimination der Größe $\dot{\varphi}^2$ durch (2.183) erhält man wieder für den Ringradius die klassisch schöne und einfache Bewegungsgleichung

$$\boxed{\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{G}{2\pi}\left\{\frac{M_e}{R^3} - \frac{M}{R^3}\,\mathbf{\Phi}\left[\varphi\right]\right\}.} \tag{2.188}$$

Man erkennt einerseits sofort wieder die Formel für den Beschleunigungsparameter q (2.167), *andererseits* aber auch *die genaue mathematische Struktur der Einstein'schen Feldgleichung der Gravitation.* Siehe hier auch die Gleichung (2.80) im Grenzfall $w \to -\infty$. Denn (2.188) ist ja nichts anderes als die dynamische kosmologische Gleichung (2.37)

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi\,G}{3}\left(\varrho + 3\,\frac{p}{c^2}\right) \tag{2.189}$$

der *Relativitätstheorie*, wo auf der linken Seite ein reduzierter Riemannscher Krümmungstensor, auf der rechten Seite der Gleichung die Gravitationskonstante steht, multipliziert mit einem *„Energie - Impulstensor“*, der in einen *„homogenen“* und einen *„polarisierten“* Anteil aufgespalten ist.

Im Gegensatz zur Newtonschen Gravitationstheorie, bei der *ein* Potential der linearen Poissongleichung genügt, müssen bei der Einsteinschen Gravitationstheorie zehn *nichtlineare* Gleichungen für zehn *Potentiale* gelöst werden. Man könnte jetzt meinen, dass die Probleme sich verzehnfachen. Aufgrund der mathematischen Struktur der nichtlinearen Gleichungen sind die Probleme aber **weitaus größer**. Denn die Einsteinschen Potentiale $R_{\alpha\beta}$ hängen von den Größen des Energie - Impulstensors $T_{\alpha\beta}$ ab, die ihrerseits aber nur berechenbar sind, wenn die Raum - Zeit schon bekannt ist. Doch die Letztere kann nur durch die Potentiale $R_{\alpha\beta}$ festgelegt werden. Dieser **rekursive Zirkel** macht wesentlich mehr Schwierigkeiten als die reine Nichtlinearität der Einsteinschen Gleichungen. Zudem kommt noch das Problem hinzu, dass der Begriff „*Gravitationsenergie*“ nicht sauber definiert ist. Der begriff *Gesamtenergie des Universums“* ist im Bild der Einsteinschen Gravitationstheorie nicht definiert. Man muss letztendlich ein *Machsches Prinzip* bemühen, um ein Postulat wie „Verschwindende Gesamtenergie des Universums“ zu fordern.

3 Das sich beschleunigt ausdehnende Universum

Gott ist eine unendliche Sphäre, deren Mittelpunkt überall und deren Umkreis nirgends ist.

Liber XXIV philosophorum (Buch der 24 Philosophen), vor dem 12. Jahrhundert ([56])

Die Dynamik des *heterogenen* Ringkosmos im Rahmen der Newton'schen Kosmologie macht es äußerst wahrscheinlich, wenn nicht zur Gewissheit, dass eine großräumige Strukturbildung - also ein stark heterogener Kosmos - die globale Expansionsrate des Universums beschleunigt. Es wurde aber auch deutlich, dass diese Kopplung im 1D - Ringkosmos bei der stärksten Anregungsmode der *Paarfusion* schwach und zudem ziemlich spät einsetzt. Allerdings ist der w - Parameter wesentlich kleiner als -1. Als *quantitatives* dynamisches „Mechanikmodell" für die Deutung einer kosmologischen Konstanten im heutigen Universum kommt die Ringdynamik so nicht in Frage. Wir benötigen für das Universum ein realistischeres dreidimensionales Modell, um gesicherte quantitative Aussagen insbesondere zum wichtigen **w** – Parameter (Zustandsgleichung) machen zu können. Doch ist dies im Rahmen der *Newtonschen Mechanik* überhaupt möglich?

Unsere Prämisse ist wieder zunächst die Gültigkeit der Newton'schen Gravitation - oder genauer gesagt - dass in großräumigen Dimensionen die Newton'sche Gravitation im Universum als einzig gültiger Grenzfall der **„weak field" Näherung der Einstein'schen Feldgleichungen** realisiert ist.[1]

[1] Das muss aber nicht so stattfinden, wie wir später spekulativ andeuten werden.

3.1 Franz Selety und der fraktale Kosmos

Schon im 17ten Jahrhundert tauchte bei Betrachtung eines unendlichen Raumes, der gleichförmig mit Sternen besetzt ist, ein Paradoxon auf, das man heute allgemein als das *Olberssche Paradoxon* bezeichnet. Schon J. Kepler widersprach 1610 der Vorstellung eines unendlichen Universums, wie es von Giordano Bruno und auch von Galileo Galilei in seinem *Sidereus Nuncius* von 1610 vertreten wurde[2]. Schließlich schreibt der Bremer Arzt und Astronom W. Olbers über 200 Jahre später im Astronomischen Jahrbuch von 1826 ([137]):

> *...Es bleibt also höchst wahrscheinlich, dass nicht blos der Theil des Raumes, den unser auch noch so stark bewaffnetes Auge übersehen hat, oder übersehen kann, sondern der ganze unendliche Raum mit Sonnen und ihren Gefolgen von Planeten und Kometen besetzt ist. Ich sage höchst wahrscheinlich. Gewissheit kann uns unsere beschränkte Vernunft nicht geben. Es könnten andere Stellen des Raums ganz andere Schöpfungen enthalten, als Sonnen, Planeten, Kometen und Lichtstoffe, Schöpfungen, von denen wir vielleicht gar keinen Begriff haben können. Halley hat freilich einen Beweis für die unendliche Menge der Sonnen zu führen gesucht. „Wäre ihre Menge nicht unendlich," sagt er, „so würde sich in dem Raum, den sie einnehmen, ein Punkt als der allgemeine Schwerpunkt finden, und gegen diesen müssten sich alle Weltkörper mit nach und nach beschleunigter Bewegung stürzen, und also zusammenfallen. Nur weil der Weltbau unendlich ist, bleibt Alles im Gleichgewicht und kann sich erhalten."*

Das Argument für einen „unendlichen" Raum mit „unendlichen Massenpunkten" von Halley geht im Prinzip auf Newton zurück, der damit den Kollaps einer endlichen Massenansammlung in einem unendlichen Raum vermeiden wollte. Schon sehr modern anmutende Gedanken hatte dann der kroatisch-italienische Astronom, Mathematiker und Jesuit R.J. Boscovic (1711-1784), in dem er am Ende seines Werkes *Theorie philosophiae naturalis* (1781) schrieb:

[2]Kepler: *Dissertation cum nuncio sidereo galilei.* Deutsch bei Diederichs 1918.

...Wenn das gesamte Universum aus unserer Sicht durch eine parallele Bewegung in eine beliebige Richtung bewegt und gleichzeitig um einen beliebigen Winkel gedreht würde, so könnten wir uns der Bewegung oder der Drehung niemals bewusst werden. . . . Darüber hinaus könnte es der Fall sein, dass sich das gesamte Universum vor unseren Augen täglich zusammenzieht oder ausdehnt, während das Ausmaß der Kräfte im gleichen Verhältnis zusammengezogen oder erweitert wird; wenn so etwas passieren würde, änderte dies nichts an den Ideen unseres Verstandes, und so sollten wir auch kein Gefühl dafür haben, dass eine solche Veränderung stattfindet...([98])

Autoren wie E.E. Fournier d'Albe ([57]) haben um 1900 ähnliche Gedanken entwickelt. In einem späteren Kapitel über die Planetenbewegung in expandierenden Räumen werden wir allerdings sehen, dass im Falle einer linearen Expansion die Keplerschen Gesetze zwar unverändert exakt gültig sind, es aber trotzdem eine „Rotverschiebung" von Photonen geben muss. Auch lineare *Raummutationen* machen sich in der Beobachtung bemerkbar.

Ein dem Olbersschen Paradoxon analoges Problem im *unendlich ausgedehnten euklidischen 3D-Universum* entdeckte schließlich Ende des 19ten Jahrhunderts H. Seeliger, in dem er Singularitäten von Newtonschen Potentialdifferenzen aufzeigte, wie sie in der Einleitung schon geschildert wurden ([183],[98]). Der schwedische Astronom und Mathematiker C.V.L. Charlier ([19], [20]) (1908) und schließlich der junge Naturphilosoph F. Selety ([188]) (1922) postulierten im Rahmen der Newtonschen Gravitation *fraktale Massenhierarchien* in einem unendlichen euklidischen Raum, um diese Kraft-Divergenzen und das *Olbersche Paradoxon* zu vermeiden. Selety konstruierte im Rahmen der Newtonschen Gravitation folgendes Bild:

- Das Universum ist räumlich unendlich.
- Die Gesamtmasse des Universums ist unendlich.
- Das Universum weist überall eine *endliche lokale Dichte* auf.
- Die mittlere Dichte des gesamten Universums ist null.
- Es existiert kein singulärer Mittelpunkt in diesem Universum

Für Ihn war insbesondere die Unendlichkeit und die Ewigkeit ein wesentlicher Punkt seiner Vorstellung. Auch das extrem Unwahrscheinliche ist irgendwo im Universum realisiert. Selbst die unendliche räumliche Wiederholung von jedem existierenden Ding hielt er für möglich - ja notwendig.

Hier sollen kurz die Gedanken von EINSTEIN aus dem Jahre 1922 zur Selety-schen Arbeit zitiert werden ([45]), welche den damaligen Kenntnisstand und persönliche Sichtweise sehr schön verdeutlicht:

Es ist zuzugeben, daß die Hypothese vom "molekular - hierarchischen" Charakter des Aufbaues der Sternenwelt vom Standpunkt der Newtonschen Theorie manches für sich hat, wenn auch die Hypothese von der Gleichwertigkeit der Spiralnebel mit der Milchstraße durch die letzten Beobachtungen als widerlegt zu betrachten sein dürfte[3]*. Diese Hypothese erklärt ungezwungen das Nichtbuchten des Himmelsgrundes und vermeidet den Seeligerschen Konflikt mit dem Newtonschen Gesetz, ohne die Materie als Insel im leeren Raum aufzufassen.*

Auch vom Standpunkte der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Hypothese vom molekularhierarchischen Bau des Weltalls möglich. Aber vom Standpunkt dieser Theorie ist die Hypothese dennoch als unbefriedigend anzusehen. Dies sei im folgenden noch einmal kurz begründet. Wenn die geometrischen und die Inertialeigenschaften des Raumes durch die Materie beeinflusst, bzw. zum Teil bedingt sind, so drängt sich die Ansicht auf, daß diese Bedingtheit eine vollständige sei, wie dies nach der allgemeinen Relativitätstheorie der Fall ist, ***wenn die mittlere Dichte der Materie endlich und die Welt räumlich geschlossen ist.*** *Ich will dies durch einen einfacheren fingierten Fall – wenn auch unvollkommen – zu illustrieren suchen.*

Es sei angenommen, man würde die Gravitation nur durch das genaue Studium der Mechanik solcher Massen kennen, welche uns bei Laboratoriumsversuchen zur Verfügung stehen. Die Kugelgestalt der Erde sei uns unbekannt. Dann könnte man folgende Theorie aufstellen. Es existiert primär ein vertikales ,"kosmisches" Schwerefeld, welches sich überall ins Unendliche erstreckt. Die Erde erstreckt sich unten ins Unendliche. Ihre Gravitationswirkung sei gegen das kosmische Schwerefeld zu vernachlässigen.

Obwohl das angenommene kosmische Schwerefeld der Poissonschen

[3]Hier irrte sich Einstein im Jahre 1922 gewaltig.

Gleichung entspricht ebenso wie die Schwerefelder der dem Experiment zugänglichen Massen an der Erdoberfläche, wäre diese Auffassung deshalb unbefriedigend, weil man das kosmische Feld selbst ohne materielle Ursache angenommen hat. Die Idee, daß das Schwerefeld, welches in der Hauptsache den Fall der Körper an der Erdoberfläche bedingt, nicht selbständig existierend, sondern durch den Erdkörper verursacht sei, würde gewiss als großer Fortschritt empfunden werden.

Das heute das Bedürfnis einer Zurückführung des metrischen und Inertialfeldes der Welt auf physikalische Ursachen nicht ähnlich intensiv gefordert wird, liegt nur daran, daß dieses letztere Feld als physikalische Realität nicht so deutlich gefühlt wird, wie im obigen Beispiel die physikalische Realität des „kosmischen Schwerefeldes". Einer späteren Generation wird aber diese Genügsamkeit unbegreiflich erscheinen.

Die "molekular - hierarchische Welt" erfüllt ebensowenig wie die „Inselwelt" das Machsche Postulat, nach welchem die Trägheitswirkung des einzelnen Körpers durch die Gesamtheit aller übrigen im gleichen Sinne bedingt sein soll, wie seine Gravitationskraft. Es ist mir schwer verständlich, wieso Herrn Selety dieser Mangel seines Systems hat entgehen können. Dieser Mangel ist um so schwerwiegender, als man in der allgemeinen Relativitätstheorie auch ohne Betrachtungen kosmologischen Charakters zeigen kann, daß sich die Körper der ersten Näherung so verhalten, wie es nach dem Machschen Gedanken erwartet werden muss. Ich verweise hierüber auf die vierte meiner bei Vieweg erschienenen „Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie" (gehalten im Mai 1921 an der Universität Princeton).

Es sei endlich noch ein Punkt erwähnt, der nicht nur in der Seletyschen Abhandlung, sondern vielfach in der einschlägigen Literatur Verwirrung stiftet. Die Relativitätstheorie sagt: Die Naturgesetze sind unabhängig von jeder besonderen Koordinatenwahl zu formulieren, da dem Koordinatensystem nichts Reales entspricht; die Einfachheit eines hypothetischen Gesetzes ist nur nach seiner allgemein kovarianten Formulierung zu beurteilen. Daraus folgt aber nicht, dass man sich die Beschreibung durch passende Wahl des Bezugssystems nicht erleichtern dürfe, ohne gegen das Relativitätspostulat zu verstoßen. Wenn ich z. B. die wirkliche Welt durch die „Zylinderwelt" mit gleichmäßig verteilter Materie approximiere und dabei die Zeitachse parallel den Erzeugenden des „Zylinders" wähle, so bedeutet dies nicht die Einführung einer „absoluten Zeit". In der Welt gibt es nach wie vor kein Koordinatensystem, welches für die Formulierung

der Naturgesetze bevorzugt wäre. Bezüglich der wirklichen Welt ist eine exakte Definition eines derartigen Koordinatensystems übrigens unmöglich, auch dann, wenn sich die wirkliche Welt durch jene Zylinderwelt roh approximieren läßt. Das Relativitätsprinzip behauptet nicht, daß die Welt gegenüber allen Koordinatensystemen in gleich einfacher oder gar in gleicher Weise zu beschreiben sei, sondern nur, daß die allgemeinen Gesetze der Natur bezüglich aller Systeme die gleichen seien (genauer: daß die hypothetisch möglichen Naturgesetze bezüglich ihrer Einfachheit nur in ihrer allgemein kovarianten Formulierung gegeneinander abzuwägen sind.

Man liest in diesem Kommentar, dass EINSTEIN 1922 die Hypothese einer unendlich ausgedehnten, hierarchischen (fraktalen) Welt aus grundsätzlichen Prinzipien ablehnte. Für SELETY ist die Welt euklidisch flach, unendlich ausgedehnt, *aber mit einer endlichen Masse bei einer verschwindenden mittleren Dichte.* Also

$$\lim_{R\to\infty} \frac{4\pi}{3} \varrho\, R^3 = \mathcal{M}; \qquad \lim_{R\to\infty} \varrho = 0. \tag{3.1}$$

Moderne Untersuchungen über die Galaxienverteilung auf verschiedenen Skalen im Kosmos widerlegen aber eine einfache fraktale Struktur mit einer gemeinsamen fraktalen Dimension ([146]).

Euklidische Räume können, müssen aber nicht unendlich ausgedehnt sein, ebenso wie auf einer Zylinderoberfläche und einem flachen Blatt die Winkelsumme in einem Dreieck 180 Grad ist, aber beim Zylinder in einer Dimension eine *periodische Randbedingung* gültig ist. Über die Topologie des flachen Raumes kann die Relativitätstheorie keine Aussagen machen. Das flache Universum könnte so die Oberfläche eines *Hyperzylinders* mit in drei Richtungen geltenden periodischen Randbedingungen sein. Heutige Messungen an der beschleunigten Expansionsdynamik des Universums machen es sehr wahrscheinlich, dass die mittlere Massendichte des Universums nicht Null sein kann. Wäre der Raum wirklich exakt flach, wäre dies ein starker Hinweis auf eine endliche, aber unbegrenzte flache *Zylinderwelt.*

3.2 Ein hydrodynamisches Zwischenspiel

Eine populäre Vorstellung eines expandierenden Kosmos ist ein *aufgehender Hefeteigs mit Rosinen.* Das erste sehr einfache mathematische

Modell im Rahmen einer NEWTONschen Kosmologie lieferte dabei der Astrophysiker und Mathematiker A. MILNE, in wahrer Meisterschaft dann von HECKMANN & SCHÜCKING 1955 ausgearbeitet. Mit dem Skalenfaktor R lautet das isotrope Strömungsfeld ohne Rotation (es gibt hier noch keine sich durchdringenden **Mehrfachströmungen**)

$$\mathbf{v}(\mathbf{r},t) = \frac{\dot{R}}{R}\,\mathbf{r} \tag{3.2}$$

Die totale zeitliche Ableitung (Lagrangesche Ableitung) dieses Strömungsfeldes einer *Einfachflüssigkeit* ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + (\mathbf{v}\circ\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v} = \left\{\frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2\right\}\mathbf{r} + \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2\mathbf{r} \equiv \frac{\ddot{R}}{R}\,\mathbf{r}$$

Für die Kontinuitätsgleichung ergibt sich für eine Dichte ϱ, die keine räumliche Variationen aufweist, die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho + \boldsymbol{\nabla}\circ(\varrho\,\mathbf{v}) = \frac{d\varrho}{dt} + 3\,\frac{\dot{R}}{R}\,\varrho = 0. \tag{3.3}$$

Aus dieser Gleichung folgt die normierte Massenerhaltung

$$\frac{4\pi}{3}\,\varrho\,R^3 = konstant \equiv \mathcal{M}. \tag{3.4}$$

Für eine kugelsymmetrische selbstgravitierende Massenverteilung erhält man so die hydrodynamische Bewegungsgleichung für alle $\mathbf{r}$

$$\frac{\ddot{R}}{R}\,\mathbf{r} = -\frac{4\pi}{3}\,G\varrho\,\mathbf{r} \equiv -\frac{G\mathcal{M}}{R^3}\,\mathbf{r}. \tag{3.5}$$

Aus dieser *hydrodynamischen* Newtonschen Bewegungsgleichung folgt in Spezialfällen die bekannten Friedmann - Lemaître Gleichungen für den Skalenfaktor R.

Es stellt sich hier die Frage, ob man hier eine Lagrangefunktion, bestehend aus der Differenz der kinetischen und der potentiellen Energiedichte, formulieren kann, aus der dann eine Bewegungsgleichung für den Skalenfaktor folgt. Für die kinetische Energie einer expandierenden Kugel vom Radius R gilt mit den obigen Formel

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2\int_0^R 4\pi\,\varrho\,r^4\,dr = \frac{2\pi}{5}\,\varrho\,R^3\,\dot{R}^2 = \frac{3}{10}\,\mathcal{M}\,\dot{R}^2 \tag{3.6}$$

Für die potentielle Energie einer homogenen gravitierenden Kugel vom Radius R ergibt sich der bekannte Wert

$$E_{pot} = -\frac{3}{5}\frac{G\,\mathcal{M}^2}{R}. \tag{3.7}$$

Für die Lagrangefunktion ergibt sich somit der Ausdruck

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{3}{5}\mathcal{M}\left(\frac{1}{2}\,\dot{R}^2 + \frac{G\,\mathcal{M}}{R}\right).} \tag{3.8}$$

Die FLRW - Gleichungen folgen somit auch aus einem Wirkungsprinzip und dem dazugehörigen Lagrangeformalismus; hier für eine hydrodynamische *Einfachströmung* im Spezialfall $\Lambda = 0$ und ohne Druck.

Im wirklichen Kosmos bewegen sich natürlich auch die „Rosinen“ (Galaxien) relativ zum expandierenden Raum (*Hubble flow*). Doch ist ihre Bewegung sehr klein ($v \sim 1000 km/s << c$) und es bleibt unklar, ob ihr **Impulsstrom** irgendeine Rückwirkung auf die Expansion hat. In einer naiven *weak field* Näherung der Einstein'schen Bewegungsgleichung ohne Λ - Term (2.37)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi\,G}{3}\,(\varrho + 3\,p) \tag{3.9}$$

erwartet man aufgrund der Pekuliarbewegung der Galaxien *gegenüber der allgemeinen Raumexpansion (Hubble flow)* einen Druckterm proportional

$$p \propto v^2. \tag{3.10}$$

Die Galaxien bewegen sich gewissermaßen *gegen den Strom* und üben so einen Druck auf das Medium aus. Diesen positiven Druckterm müsste man jetzt mit der mittleren gravitativen Wechselwirkungsenergie der Galaxien unter sich vergleichen. Denn die großräumigen Strukturen von Galaxien im Universum – Cluster und Supercluster – verändern sich auf etwa der gleichen Zeitskala wie die globale Expansion. In der Hubble-Lemaître Funktion, die ja im Prinzip eine globale Energiegleichung darstellt, muss der effektive Energieterm der beschleunigten Expansion erscheinen. Der Druckterm wäre aber in diesem Bild immer positiv!

3.3 Die Wirkungsfunktion eines Modelluniversums

Schon beim Modell eines Ringkosmos sah man, dass die *mikroskopische* Dynamik der „Paarfusion " einen geringen aber deutlichen Effekt auf die *makroskopische* Expansion des Ringes hatte. In Analogie zum Ring stellen wir uns jetzt ein euklidisches unendlich ausgedehntes dreidimensionales Universum vor, in dem identische Massenpunkte der Masse m in einem *Bravais - Gitter*, hier einem **kubisch primitiven Gitter** der Seitenlänge a, angeordnet sind. Die Geometrie ist dann euklidisch, *doch die Topologie bleibt offen.* So wäre in zweidimensionaler Analogie eine Zylinderoberfläche auch euklidisch, aber in einer Richtung gelten periodische Randbedingungen[4]. Betrachtet man einen endlichen Würfel mit periodischen Randbedingungen, so hat man die Topologie eines TORUS. Im ungestörten *homogenen* Zustand sind alle Kräfte im Gleichgewicht. In Analogie zur Kette betrachten wir nun wieder eine spezielle Strukturbildung innerhalb einer kubischen Zelle – ganz im Einklang mit dem *Kopernikanischen Prinzip*: die Kollision aller acht Massenpunkte an den „Ecken" des Würfels zum Zentrum der Elementarzelle, wieder beschrieben durch eine **einzige** Koordinate ξ, welche die Verschiebung der Teilchen aus ihren „Ecken" längs der drei Würfelkanten beschreibt (**Oktettkollision**). Dieser Vorgang findet gleichmäßig überall im unendlichen Raum statt und am Ende hat sich, wie im Ring, die Gitterkonstante **verdoppelt**, aber die entsprechenden Massenpunkte haben sich im Kollisionszentrum

[4] O. Heckmann erwähnt in seinem Buch 1942: „In diesem Zusammenhang ist bei kosmologischen Überlegungen kaum beachtete Tatsache wichtig, dass euklidische (auch hyperbolische) Räume sehr wohl endlich und unbegrenzt sein können: man braucht nur gewisse „Bravaisgitter" in sie einführen, sie in periodisch wiederkehrende Elementarzellen eingeteilt zu denken, um zu sehen, dass ein topologischer Unterschied eines periodischen Raumes nicht existiert gegenüber einem nur aus einer Elementarzelle bestehenden, sofern man jede Menge homologer Punkte in einem Falle „einen" Punkt nennt im anderen. Also ist Euklidizität keinesfalls mit *unendlicher Erstreckung des Raumes* identisch (siehe auch [**?**]). Flachheit erlaubt einen 3-Torus, ein hyperbolischer Raum eine nicht einfach verbundene kompakte Mannigfaltigkeit. Über diese Clifford - Kleinschen Raumformen vgl. F. Klein: Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, Berlin 1928, Kap. IX: Das Problem der Raumformen. Heutzutage (2008) wird diskutiert, ob das Universum endlich ist und einen 3 - Torus darstellen könnte, um die geringen Werte der niedrigen Multipolmomente der kosmischen Hintergrundstrahlung zu erklären. Sichere Aussagen sind bis heute nicht möglich.

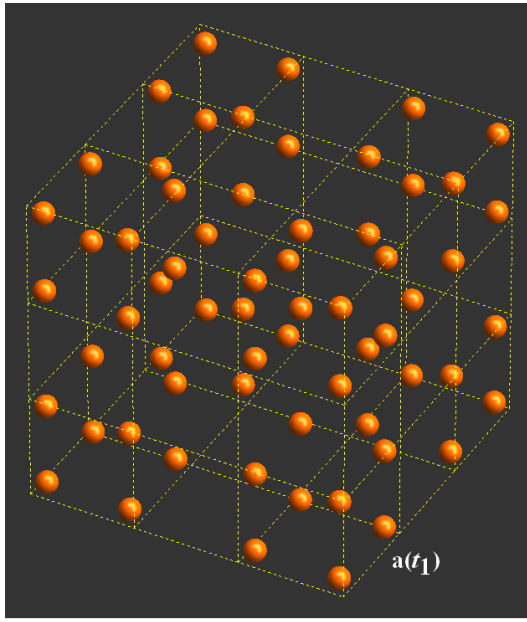


Fig. 3.1: *Ein kubisch primitives (sc) Gitter mit* $3 \times 3 \times 3$ *Elementarzellen der Seitenlänge* a *und* $4 \times 4 \times 4$ *Massenpunkten. Zu Beginn der Entwicklung beim Zeitpunkt* t_1 *ist der Raum noch sehr regelmäßig mit Massenpunkten strukturiert (*$\xi \approx 0.1$*). Sie haben gerade ihre Gitterplätze verlassen und beginnen in jeder zweiten Elementarzelle zu einem Oktett zu kollabieren. Die Expansion (Mutation) des Raumes wird hier durch die Zeitfunktion* a *beschrieben. Die eigentliche Eigenbewegung der Teilchen wird durch die Lagrangesche Verschiebung* ξ *dargestellt (hier* $\xi \approx 0.1$*).*

jeder zweiten Elementarzelle **verachtfacht**, so dass die makroskopische Dichte ϱ großräumig konstant bleibt, aber zwischenzeitlich der Raum stark *heterogen* geworden ist.

Um für unser 3D-Modelluniversum jetzt ganz allgemein ohne Rückgriff auf die Einsteinsche Gravitationstheorie eine relevante *Lagrangedichte* oder *Lagrangefunktion* aufzustellen oder besser zu definieren, lassen wir uns ganz in Analogie von der Funktion (2.27) des Ringkosmos leiten.

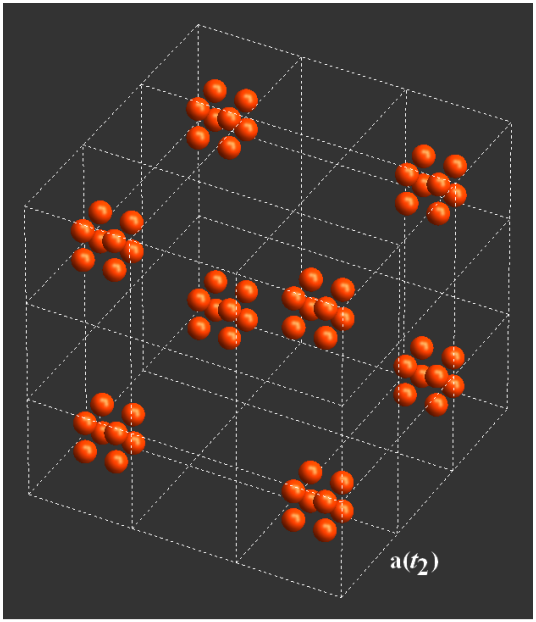


Fig. 3.2: *Das kubisch primitive expandierende (sc) Gitter mit* $3\times3\times3$ *Elementarzellen zu einem späteren Zeitpunkt* $a(t_2)$*. In diesem späteren Entwicklungszeitpunkt* t_2 $(a(t_2) > a(t_1))$ *haben sich in jeder zweiten Elementarzelle Cluster („Galaxienhaufen“) mit je 8 Punktmassen gebildet, die kurz vor dem inneren Kollaps stehen (*ξ0.4*). Diese „Brillouin – Mode“ hat im primitiv kubischen Gitter eine der höchsten Wachstumsraten. Wenn das gravitative Wechselwirkungspotential* $V[\xi]$ *während der Oktettfusion bekannt ist, lässt sich aus dem zeitlichen Verlauf der Lagrangeschen Verschiebung* ξ *und der Längenexpansion a der Elementarzellen der effektive* $w = p/\varrho$ *- Parameter berechnen. Als Verallgemeinerung können wir anstatt der Lagrangeschen Verschiebung* ξ *das Skalar* ψ *einführen, welches dann einem Dichtekontrast proportional ist.*

Diese können wir umschreiben in

$$\mathcal{L} = \left\{ \frac{1}{2}\,\dot{R}^2 + \frac{GM_e}{2\pi R} \right\} + \left\{ \frac{1}{2}\,R^2\,\dot{\varphi}^2 + \frac{GM}{2\pi R}\,\mathbf{\Phi}\,[\xi] \right\}. \qquad (3.11)$$

Der erste Teil in der geschweiften Klammer stellt in der Lagrangefunktion den *homogenen Teil* des Ringkosmos, der zweite Teil dagegen den *heterogenen strukturbildenden* Teil dar. Die Funktion ist für den endlichen Ringkosmos im Rahmen der Newtonschen Gravitation exakt.

Im nächsten Schritt wollen wir jetzt für einen 3D-Kosmos die entsprechende Wirkungsfunktion bzw. Lagrangefunktion in Analogie definieren[5]. Ganz allgemein gilt für eine Feldtheorie bis einschließlich zweiter Ordnung die relativistische Wirkungsfunktion[6]

$$\mathbf{S} = \int (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)\ \sqrt{-g}\, dx^4, \tag{3.12}$$

wobei g die Determinante der Metrik bedeutet. Da wir euklidische Metrik und Isotropie des Raumes voraussetzen, können wir auch vereinfacht

$$\mathbf{S} = \int (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)\ dt \tag{3.13}$$

schreiben. Der erste *homogene und isotrope Teil* lautet mit dem neuen Skalenparameter a einfach

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\,\dot{a}^2 + \frac{4\pi\, G\, m}{3\, a}. \tag{3.14}$$

Die Größe m/a^3 ist die über große Räume gemittelte Materiedichte des 3D-Raumes. Man kann also a als die Gitterkonstante eines kubischen Gitters und das Skalar m als die Quellmasse an jedem Gitterplatz auffassen. Als Bewegungsgleichung erhält man hieraus die *Friedmann - Lemaître Gleichungen* eines homogenen und isotropen expandierenden Universums ohne Λ - Konstante. In Analogie zum Ringkosmos definieren wir für den strukturbildenden *heterogenen Teil* die Funktion

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\, a^2\, \dot{\psi}^2 + \frac{4\pi\, G\, m}{3\, a}\, \mathbf{V}[\psi]. \tag{3.15}$$

Der neu eingeführte Pseudowinkel oder Pseudoskalar ψ soll jetzt eine abstrakte Bedeutung im Sinne eines allgemeinen *Ordnungsparameters (z.B. Dichtekontrastfunktion)* haben, also nicht auf eine konkrete Lagrange'sche Positionsverschiebung eines Testteilchens in einem expandierenden Gittermodell beschränkt sein. Die konkrete Materieverteilung kann in diesem Bild auch *anisotrop* sein. Wir schreiben daher allgemeiner

$$\varphi \to \xi \to \psi, \qquad [-\infty < \psi < +\infty]. \tag{3.16}$$

[5] Die Analogie ist hier die Seele des Denkens

[6] Es existiert hier eine gewisse Analogie zur Wirkungsfunktion allgemeiner Gravitationstheorien nach dem Maler, Physiker und Mathematiker Gregory Horndeski (1948-)[79]

Das spezielle gravitative Potential $\mathbf{V}[\psi]$ während der Strukturbildung bleibt bei unserem Ansatz zunächst unbestimmt. Wir werden für diese skalare Funktion zunächst nur die Symmetrie $\mathbf{V}[+\psi] = \mathbf{V}[-\psi]$ fordern. Wie wir später sehen werden, kann der erste quadratische Term durch eine Randbedingung zur klassischen Newtonschen Jeansgleichung für Strukturwachstum festgelegt werden. Nimmt man eine zweite Singularität im 3D-Kosmos analog wie im Ringkosmos an („Paarfusion"), so läßt sich die potentialfunktion weiter einschränken, wie wir noch sehen werden.

Aus der obigen Lagrangedichte des heterogenen Teils ergibt sich sofort die verallgemeinerte Bewegungsgleichung

$$\ddot{\psi} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\psi} = \frac{4\pi\, Gm}{3\, a^3}\,\mathbf{V}'[\psi]. \tag{3.17}$$

Zur Ableitung dieser Gleichung benötigt man keine Kenntnisse über die Dynamik des Skalenfaktors a. Diese Zeitfunktion kann „a priori" vorgegeben werden. Es gibt so keine Kopplung zwischen der Dynamik des Skalenfaktors a und der Strukturbildung ϕ. Genau dies ist das Vorgehen in der Standardkosmologie: *Expansion und Strukturbildung sind dynamisch gravitativ unabhängig voneinander.*

Doch wie lautet nun die Lagrangedichte für das Gesamtsystem aus *isotroper Expansion und heterogener anisotroper Strukturbildung?*. Im Rahmen des Lagrangeformalismus werden wir beide Anteile einfach linear kombinieren. Wir machen also den denkbar einfachsten Ansatz

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \tag{3.18}$$

Die relevante umskalierte Lagrangedichte lautet nun

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\dot{a}^2 + \frac{1}{2}\,a^2\,\dot{\psi}^2 + \frac{4\pi Gm}{3\,a} + \frac{4\pi Gm}{3\,a}\,\mathbf{V}[\psi].} \tag{3.19}$$

Diese Funktion ist die Grundlage für die Dynamik eines *inhomogenen*, *isotropen* Universums, in dem Expansion und Strukturbildung dynamisch gekoppelte Vorgänge sind. Unser Ansatz folgt nicht streng aus der Newtonschen Mechanik, welche ja einen absoluten Raum annimmt. Es kann im Rahmen der *Newtonschen Mechanik keine „back reaction" zwischen Expansion des Skalenfaktors und der Strukturbildung geben.* Im eindimensionalen Ringkosmos gibt es sie in der nächsten höheren Dimension

$1 + 1 = 2$, im dreidimensionalen Raum kann es sie nur im $3 + 1 = 4$ dimensionalen Hyperraum geben. Wir interpretieren somit mathematisch abstrakt den Raum und seine metrischen Elemente als die Oberfläche eines „expandierenden“ vierdimensionalen Hyper-Zylinders.

Die Energiegleichung oder die *Hubble-Lemaître Funktion* dieses abstrakten „Teilchenuniversums“ lautet nun einfach

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\epsilon_0}{a^2} = \frac{8\pi G m}{3\,a^3} - \left\{\dot{\psi}^2 - \frac{8\pi G m}{3\,a^3}\,\mathbf{V}[\psi]\right\}.} \tag{3.20}$$

Die Forderung oder Setzung $\epsilon_0 = 0$ führt - aus ästhetisch - physikalischen Gründen, in der dynamischen Kosmologie sofort zur Hypothese des **„Null-Energie Universums“**, welche insbesondere von E. Tryon ab 1973 diskutiert wurde ([205]). In Analogie zur Allgemeinen Relativitätstheorie bedeutet dies geometrisch *die Flachheit* oder *euklidische Metrik* der Raum - Zeit auf großen Skalen, wohl aber mit „zylindrisch - periodischen Randbedingungen“. Schon das einfache *Einstein-deSitter Modell* war ein „Null-Energie Universum“. Die Forderung $\epsilon_0 = 0$ folgt somit nicht streng aus der *Einsteinschen Gravitationstheorie*, in der dies ein Spezialfall mit global flacher Metrik ist. Wir werden im Folgenden immer $\epsilon = 0$ fordern oder einfach setzen.

Wie beim expandierenden Ring deutet sich auch hier eine enge „*Symbiose*“ zwischen der Expansionsrate a des Universums und seiner Strukturbildung, beschrieben durch das Skalar ψ, ab. Das 3D-Universum kann nur dann beschleunigt expandieren, *wenn der Ausdruck in der geschweiften Klammer negativ wird.* Der gravitative Anteil dieses Termes stellt letztendlich die sogenannte „**Dunkle Energie**“ dar.

Auch die Bewegungsgleichung für a lässt sich nun leicht ableiten. Man erhält[7]

$$\boxed{3\,\frac{\ddot{a}}{a} = 3\,\dot{\psi}^2 - \frac{4\pi G m}{a^3} - \frac{4\pi G m}{a^3}\,\mathbf{V}[\psi]} \tag{3.21}$$

[7] Der Faktor 3 soll die Ricci-Tensor Normierung im Bild der Einsteinschen Theorie ausdrücken

sowie die korrespondierende wichtige Gleichung

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\,\frac{\epsilon_0}{a^2} = \frac{4\pi G m}{a^3} + \frac{4\pi G m}{a^3}\,\mathbf{V}[\psi] - \dot{\psi}^2.} \tag{3.22}$$

Außerdem gilt auch

$$2\,\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\epsilon_0}{a^2} = \dot{\psi}^2. \tag{3.23}$$

Häufig wird in der Kosmologie auch das Expansionsskalar θ, die Spur des Expansionstensors, hier definiert durch

$$\theta = 3\,\frac{\dot{a}}{a} \tag{3.24}$$

eingeführt, welche die relative Volumenänderung pro Zeiteinheit darstellt. Mit Hilfe dieser Variablen lautet die obige Bewegungsgleichung im Falle $\epsilon_0 = 0$

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\,\theta^2 = -\frac{4\pi G m}{a^3} + 3\,\dot{\psi}^2 - \frac{4\pi G m}{a^3}\,\mathbf{V}[\psi]. \tag{3.25}$$

Diese Gleichung ist analog der insbesondere im englischsprachigen Raum bezeichneten *Raychaudhuri-Gleichung*[8]. Der Faktor 3 in der obigen Gleichung drückt die drei Freiheitsgrade der Gitterdynamik aus.

Damit ist die Dynamik von a und ψ vollständig durch Differentialgleichungen festgelegt. Wiederum liefert ein direkter Vergleich mit den klassischen FLRW – Gleichungen die *rein formalen Äquivalenzen*

$$\begin{aligned} 8\pi\,G\,\varrho_\Lambda &= \frac{8\pi G m}{a^3}\,\mathbf{V}[\psi] - 3\,\dot{\psi}^2, \\ -4\pi\,G\,\left(\varrho_\Lambda + 3\,\frac{p_\Lambda}{c^2}\right) &= 3\,\dot{\psi}^2 - \frac{4\pi G m}{a^3}\,\mathbf{V}[\psi], \end{aligned} \tag{3.26}$$

die im Rahmen eines „Flüssigkeitsmodelles im Energietensor“ nicht einfach gedeutet werden können. Daraus folgt ähnlich wie beim Ringmodell

$$8\pi\,G\,\varrho_\Lambda = -\left(3\,\dot{\psi}^2 - \frac{8\pi G m}{a^3}\,\mathbf{V}[\psi]\right) \tag{3.27}$$

[8] Amal Kumar Raychaudhuri (1923 - 2005): Phys.Rev. **98**, 1123 (1955). Indischer Physiker. Die allgemeine relativistische Gleichung lautet $\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 = \omega^2 - \sigma^2 - E[X]^a_a + \dot{X}^a_{;a}$. Siehe Hawking, Stephen; and Ellis, G. F. R. (1973). The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge: Cambridge University Press.

$$8\pi\, G\, \frac{p_\Lambda}{c^2} = -\dot{\psi}^2. \tag{3.28}$$

Der Druck ist hier also *scheinbar negativ* und proportional dem Quadrat der zeitlichen Ableitung des Pseudowinkels oder Ordnungsparameters ψ. Ich nenne die obigen Setzungen jetzt die **Einstein - Friedmann Eichung** des Energie - Impuls „Tensors“.

Analog wie im Ringmodell ergibt sich für die von BUCHERT definierten „ *backreaction*“ Größen (siehe (2.107,2.108))

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= 3\left(\dot{\psi}^2 - \frac{4\pi G m}{3\,a^3}\,\mathbf{V}[\psi]\right) \\ \mathcal{R} &= 3\left(\dot{\psi}^2 - \frac{4\pi G m}{a^3}\,\mathbf{V}[\psi]\right). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Der entscheidende **w** – Parameter, definiert durch $w_\Lambda = p_\Lambda/\varrho_\Lambda$, lautet jetzt in der *Einstein - Friedmann Eichung*

$$w = \frac{\dot{\psi}^2}{3\,\dot{\psi}^2 - \dfrac{8\pi G m}{a^3}\,\boldsymbol{V}[\psi]}. \tag{3.30}$$

Die algebraische Struktur dieser Formel entspricht derjenigen im Ringkosmos. Lösen wir die Zustandsgleichung nach $\dot{\psi}^2$ auf und setzen den entsprechenden Ausdruck in die Bewegungsgleichung (3.21) ein, so folgt in Analogie zu (2.80)

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi\, G m}{3\,a^3}\,\left\{1 + \frac{1+3\,w}{1-3\,w}\,\mathbf{V}\,[\psi]\right\}.} \tag{3.31}$$

Eine notwendige Bedingung für eine beschleunigte Expansion ist entweder $w > +\mathbf{1/3}$ oder $w < -\mathbf{1/3}$. Den physikalisch weniger interessanten Fall $w = +\mathbf{1}$ („Soft Bounce“) werden wir später separat behandeln. Im Falle $w < -\mathbf{1/3}$ muss aber das Universum noch eine kritische Materieverdichtung überschreiten, damit eine beschleunigte Expansion der *Raumzeit* einsetzen kann. Das *notwendige* und *hinreichende* Kriterium für diesen *Phasenübergang* lautet

$$\mathbf{V}[\psi] \geq \frac{3\,w-1}{3\,w+1}. \tag{3.32}$$

Da der w Parameter durch die Zeitfunktionen $a[t]$ und $\psi[t]$ bekannt ist, kann diese kritische Phasengrenze berechnet werden. An dieser Phasengrenze liegt eine Lösung des sogenannten kosmologischen „*Koinzidenz-Problems*“, das heißt die Frage, warum gerade heute die Dichte der Materie - Energie und der „dunklen Energie in der gleichen Größenordnung liegen.

3.4 Fred Hoyle und „steady state“

Im Jahre 1948 veröffentlichte Fred Hoyle (1915-2001) einen ersten Entwurf seiner *steady state theory* zum Universum, was als eine Alternative zum *Eddington-Lemaître* Modell eines „*big bang*“ gedacht war ([80])[9]. Nicht nur sollte das Universum räumlich homogen und isotrop sein, sondern auch zeitlich in seiner Dichte völlig gleichförmig sein. Die mittlere Dichte sollte während der Expansion konstant bleiben. Dafür musste Hoyle allerdings eine kontinuierliche *Materie-Erzeugung* im Raum postulieren, was im Grunde eine Energieverletzung darstellt. Dies wurde von Lemaître Anfang der 1960er Jahre kritisiert (siehe Anhang).

In dem sehr spekulativen Modell von Hoyle wird die Bewegungsgleichung (3.23) durch

$$2\,\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 3\,H_0\,\frac{\dot{a}}{a}. \tag{3.33}$$

ersetzt. Die Konstante H_0 ist aus heutiger Perspektive eine „Hubble Konstante“. Die zweite Gleichung von Hoyle lautet

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi\,G\varrho_0}{3} \equiv H_0^2. \tag{3.34}$$

Anhand der zweiten Gleichung sieht man sofort, dass bei Hoyle im Jahre 1948 der Hubble-Parameter eine echte zeitliche *Konstante* H_0 darstellt. Das Wachstum des Skalenfaktors a erfolgt somit rein exponentiell gemäß

$$a \propto e^{H_0\,t}. \tag{3.35}$$

Die Metrik ist streng euklidisch (die Topologie von z.B. periodischen Elementarzellen bleibt natürlich offen). Allerdings müssen jetzt - in

[9] Im Jahre 1950 wurde die Terminologie „big bang“ von Hoyle in einer Radiosendung zum erstenmal eingeführt

klassischer Analogie - die Masse der „Gitterteilchen“

$$m \propto e^{3\,H_0\,t} \tag{3.36}$$

ebenfalls exponentiell anwachsen, damit die mittlere Dichte m/a^3 konstant bleibt. Letztendlich ist dies natürlich eine Verletzung des *Energiesatzes*.

Die Hauptmotivation von HOYLE zum Entwurf dieses exotischen kosmologischen Modelles *mit kontinuierlicher Materieerzeugung* war die Vermeidung der *mysteriösen kosmologischen Konstanten* im Modell von LEMAÎTRE - EDDINGTON. HOYLE bezog sich dabei direkt auf die Kritik und die ablehnende Haltung von EINSTEIN zu diesem in seinen klassischen Feldgleichungen künstlich eingeführten Λ - Term. Mit seinem alternativen Modell glaubte HOYLE Ende der 1940er Jahre , den Mechanismus der beschleunigten Expansion auf eine plausiblere physikalische Grundlage gestellt zu haben. Doch EINSTEIN hatte in einem seiner letzten Interviews im Jahre 1954 auch dieses Modell mit seiner kontinuierlichen Massenerzeugung strikt abgelehnt ([26]).

Fast fünfzig Jahre nach seinem ersten Theorieentwurf bekräftigte er auch noch im Jahre 1997 die Idee und das Konzept einer kontinuierlichen Materieerzeugung im Kosmos als physikalischen Ersatzmechanismus für die schon wieder populärer werdende *ad hoc* Λ Konstante ([81]).

3.5 Ein zyklisches Null-Energie Universum ?

Wir wollen mit den erzielten dynamischen Bewegungsgleichungen des Modelluniversums uns kurz eine Frage stellen, die sich im Anschluss an das naive Postulat EINSTEIN's von einem stationären Kosmos 1918 aufdrängt: *Kann ein statisches Universum existieren oder muss es expandieren, kollabieren oder kann es sogar eine zyklische Pulsation ausführen?*. Wir beschränken uns hierbei auf das sogenannte **Null-Energie Universum** (kurz **NE**). Die *Hubble-Lemaître Funktion* (3.20) lautet dann mit $\epsilon_0 = 0$ vereinfacht

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \dot{\psi}^2 = \frac{8\pi G m}{3\,a^3} + \frac{8\pi G m}{3\,a^3}\,\mathbf{V}[\psi]. \tag{3.37}$$

Ersetzen wir hier wieder die Größe $\dot{\psi}^2$ durch die Zustandsgleichung w, so erhalten wir nach kurzer Umstellung die wichtige Bilanz

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G m}{3\,a^3}\left\{1 + \frac{\mathbf{V}[\psi]}{1-3\,w}\right\}.} \tag{3.38}$$

Die skalare Potentialfunktion $\mathbf{V}[\psi]$ ist hier positiv definit und gemäß

$$\mathbf{V}[+\psi] \equiv \mathbf{V}[-\psi]; \qquad \mathbf{V}[\psi] > 0.$$

eine gerade Funktion des Struktur-Skalars ψ .

Anhand der obigen Beziehung ist klar, dass ein *Expansionsstop* nur für

$$w > +\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

möglich ist. So ist es im Bild der Newtonschen Gravitation denkbar, mit $w = +1$ ein Modell zu konstruieren, dass während einer Kontaktion aus dem Unendlichen bei einem kleinen Skalenfaktor einen einzigen „*Soft Bounce*“ durchführt und danach wieder in das raumzeitlich Unendliche expandiert. Ein *zweiter „soft bounce“* nach einer wiederholten Kontraktion ist aber dann unmöglich - zumindest solange es sich um ein „Null-Energie Universum“ handelt.

Diese nur aus der Dynamik gewonnenen Ergebnisse lassen weitreichende Schlussfolgerungen zu. So wird seit Jahren in der Literatur diskutiert, was mit dem Universum in der Zukunft geschieht? Kann das expandierende Universum irgendwann „anhalten“ und die Expansion in eine Kontraktion verwandeln. Nach den obigen Ergebnissen ist klar, dass ein **NE** - Universum durch die fortgesetzte Verklumpung von Galaxienhaufen immer *schneller expandieren muss und niemals in eine Kontraktion übergehen kann.* Ein sogenannter *„Big Crunch“* oder auch ein sogenannter (*„Big Bounce“; “Soft Bounce“*), also ein vor etwa 14 Milliarden Jahren stattgefundener großer Rückprall oder Umschwung (*„Big Bounce“*) kann in einem **NE** - Universum zwar einmal, dann aber nie wieder stattgefunden haben[10]. Extrem spekulativ und hypothetisch sind in unserem

[10]Weitere Schlagwörter in der heutigen Kosmologie sind neben dem „Big Crunch“ (Das große Zusammenkrachen), der „Big Rip“ (Das große Zerreißen) oder der „Big Chill“ (Die große Abkühlung)

NE - Modell auch *oszillierende Modelle*, bei denen der Skalenfaktor zwischen einem Maximum und einem Minimum Zustandsänderungen periodisch ausführt. Dann muss man eine Zustandsgleichung w zulassen, die periodisch im Intervall $-\infty < w < +\infty$ oszilliert. Im Rahmen unserer Modellbetrachtung bezüglich der zulässigen gravitativen Potentialfunktionen $\mathbf{V}[\psi]$ ist dies aber sehr unwahrscheinlich - wenn nicht ausgeschlossen.

Für den Autor sind diese Eigenschaften des zu untersuchenden **NE** - Modelles sehr wichtig, da sie sich von den Arbeiten von W. PRIESTER und H.J. BLOME aus dem Jahre 1987 in Bonn, wo das Konzept *eines „Big Bounce“* in einem fast-euklidischen Universum ausgearbeitet wurde ([152]), qualitativ unterscheiden.

3.6 Äquivalente Bilder der Energiegleichung

Wie beim Ringkosmos kann man auch für den 3D - Kosmos mit Strukturbildung einen mikroskopischen „Erhaltungssatz“ ableiten, den wir auch als *Entropiegleichung* bezeichnet haben. Man bekommt durch die gleichen Überlegungen wie bei (2.64) zunächst die Beziehung

$$\frac{d}{dt}\left\{a^3\,\dot{\psi}^2 - \frac{8\pi}{3}Gm\,\mathbf{V}[\psi]\right\} + \dot{a}\,a^2\,\dot{\psi}^2 = 0, \tag{3.39}$$

welche dann sofort die thermodynamische *Entropie-Form* $T\,dS = dU + p\,dV = d\{\varrho\,V\} + p\,dV = 0$ (V = Gasvolumen, U = innere Energie, S = Entropie)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left\{\left(3\,\dot{\psi}^2 - \frac{8\pi Gm}{a^3}\,\mathbf{V}[\psi]\right)a^3\right\} + \dot{\psi}^2\,\frac{d}{dt}\left\{a^3\right\} = 0,} \tag{3.40}$$

annimmt. In dieser Formulierung tritt die Gravitationskonstante der Einsteinschen Gravitationstheorie $8\pi\,G$ anschaulich in Erscheinung. In Analogie zu (2.69) und (2.73) kann die obige Energie-Entropiegleichung auch noch in den zwei Varianten

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left\{3\,\dot{\psi}^2 - \frac{8\pi Gm}{a^3}\,\mathbf{V}[\psi]\right\} = -3\,\frac{\dot{a}}{a}\,\left\{4\,\dot{\psi}^2 - \frac{8\pi Gm}{a^3}\,\mathbf{V}[\psi]\right\}} \tag{3.41}$$

oder

$$\boxed{a^3\,\frac{d}{dt}\left\{\dot{\psi}^2\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\left(4\,\dot{\psi}^2 - \frac{8\pi G m}{a^3}\,\mathbf{V}[\psi]\right)a^3\right\}.} \tag{3.42}$$

geschrieben werden.

Der obige Erhaltungssatz lautet auch erweitert

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(3\,\dot{\psi}^2 - \frac{8\pi G m}{a^3} - \frac{8\pi G m}{a^3}\,\mathbf{V}[\psi]\right)a^3\right\} + \dot{\psi}^2\,\frac{d}{dt}\left\{a^3\right\} = 0, \tag{3.43}$$

da die Gesamtmasse ja erhalten bleibt. Hieraus ergibt sich ohne den homogenen Anteil sofort der wichtige Zustandsparameter, der dann kleiner Null ist, wenn die Energiedichte $3\,\dot{\psi}^2 - 8\pi G m/a^3\,\mathbf{V}[\psi]$ während der Strukturbildung *negativ* wird.

Zu der obigen *Entropiegleichung* können wir nun in der *Einstein - Friedmann Eichung* die Energiedichten gemäß

$$p_E = \dot{\psi}^2, \tag{3.44}$$

$$\varrho_E = 3\,\dot{\psi}^2 - \frac{8\pi G m}{a^3} - \frac{8\pi G m}{a^3}\,\mathbf{V}[\psi], \tag{3.45}$$

einführen, die einem entgegengesetzten Vorzeichen des Energie-Impuls Tensors bei einer Flüssigkeit entsprechen.

Die im Geiste von Einsteins Feldgleichungen niedergeschriebenen Bewegungsgleichungen des 3D-Kosmos lautet dann analog wie im Modell des Ringkosmos (2.78,2.79) in der „metrischen Form“ (*Raum-Zeit Anteil*)

$$\boxed{-3\,\frac{\ddot{a}}{a} + 3\,\dot{\psi}^2 = \frac{4\pi G m}{a^3} + \frac{4\pi G m}{a^3}\,\mathbf{V}[\psi]} \tag{3.46}$$

und (*Raum-Raum Anteil*)

$$\boxed{a\,\ddot{a} + 2\,\dot{a}^2 + a^2\,\dot{\psi}^2 + 2\,\epsilon_0 = \frac{4\pi G m}{a} + \frac{4\pi G m}{a}\,\mathbf{V}[\psi]} \tag{3.47}$$

Die Modifikation der Gleichungen durch die heterogene Strukturbildung ist deutlich sichtbar. Der Energie-Impulstensor auf der *rechten Seite* der Einsteingleichungen enthält nur den zusätzlichen Term $4\pi\,G\,m/a\,\mathbf{V}$,

während auf der *linken Seite* der Einsteingleichungen ein zusätzlicher metrischer Term proportional $\dot{\psi}^2$ eingeht. Aus diesen zwei Gleichungen folgen dann sofort der Energiesatz und die Energie-Entropiegleichung (*Bianchi-Identität zweiter Art*).

Die Ableitung der *Layzer - Irvine Gleichung* gelingt im 3D-Raum analog wie im Ringmodell. Man erhält in der Einstein-Normierung

$$\frac{d}{dt}\left\{3\,a^2\,\dot{\psi}^2 - \frac{8\pi G m}{a}\,\mathbf{V}[\psi]\right\} + \frac{\dot{a}}{a}\left\{6\,a^2\,\dot{\psi}^2 - \frac{8\pi G m}{a}\,\mathbf{V}[\psi]\right\} = 0. \quad (3.48)$$

Diese Bilanzgleichung gilt für ein beliebiges Potential (Metrikfunktion) $\mathbf{V}[\psi]$, speziell auch im *naiven Oktettmodell* für die sich auf den Gitterdiagonalen bewegenden Punktmassen m, wobei dann in jeder zweiten Elementarzelle eine gravitative „Oktettfusion“ im expandierenden Gitteruniversum stattfindet.

Layzer und Irvine formulierten aber 1961 und 1963 anstatt (3.40) eine modifizierte kosmische Energiegleichung ([84, 105]), die man leicht herleiten kann. Die Gleichung (3.48) kann nämlich auch in der Form

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(3\,\frac{\dot{\psi}^2}{a} - \frac{8\pi G m}{a^4}\,\mathbf{V}[\psi]\right)\,a^3\right\} + \left(2\,\frac{\dot{\psi}^2}{a} - \frac{8\pi G m}{3\,a^4}\,\mathbf{V}[\psi]\right)\,\frac{d}{dt}\left\{a^3\right\} = 0 \quad (3.49)$$

geschrieben werden. Definieren wir nun

$$p_{LI} = 2\,\frac{\dot{\psi}^2}{a} - \frac{8\pi G m}{3\,a^4}\,\mathbf{V}[\psi], \quad (3.50)$$

$$\varrho_{LI} = 3\,\frac{\dot{\psi}^2}{a} - \frac{8\pi G m}{a^4}\,\mathbf{V}[\psi], \quad (3.51)$$

so gilt *auch mit diesen Größen* wieder die Entropiegleichung

$$\frac{d}{dt}\left[\varrho_{LI}\,a^3\right] + p_{LI}\,\frac{d}{dt}\left[a^3\right] = 0. \quad (3.52)$$

Ich nenne daher die Gleichungen (3.50, 3.51) die **Layzer - Irvine Eichung** der kosmischen Energiegleichung (Energie - Impuls - Tensors). Sie stehen im Gegensatz zu der so von mir genannten *Einstein - Friedmann*

Eichung (3.27), (3.28) oder (3.44), (3.45). Der Unterschied beider *komplementären Bilder (Eichungen)* wird deutlicher, wenn man den w_{LI} - Parameter berechnet. Man erhält aus den obigen Definitionen

$$w_{LI} = \frac{p_{LI}}{\varrho_{LI}} = \frac{2\,\dot{\psi}^2 - \dfrac{8\pi G m}{3\,a^3}\,\boldsymbol{V}[\psi]}{3\,\dot{\psi}^2 - \dfrac{8\pi G m}{a^3}\,\boldsymbol{V}[\psi]}. \tag{3.53}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem entsprechenden der *Einstein - Friedmann Eichung* (3.30), so erhält man leicht

$$\boxed{w_{LI} = w + \frac{1}{3}.} \tag{3.54}$$

Gilt $w = -1/3$ (Schwellwert, unterhalb dessen die beschleunigte Expansion beginnt), so gilt in der *Layzer - Irvine Eichung* $w_{LI} = 0$. Die w_{LI} - Skala der *Layzer - Irvine Eichung* erscheint also in Bezug auf das dynamische Verhalten etwas natürlicher. Das wird auch bei den nach BUCHERT definierten Größen klar. Denn nach (2.112) erhalten wir jetzt den Zusammenhang

$$w_{LI} = \frac{4}{3}\,\frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{Q} + \mathcal{R}}. \tag{3.55}$$

In dieser Skala ist die Zustandsgleichung direkt mit der *backreaction* $\mathcal{Q}$ verknüpft, welche wiederum mit dem Virial der mikroskopischen Dynamik im expandierenden Koordinatensystem zusammenhängt (siehe (2.98)). Alle diese Beziehungen müssen wir für das Weitere im Auge behalten.

Mit den Größen (3.29) erhält man wie im Ringmodell (siehe (2.99)) wieder die *Integrabilitätsbedingung* nach BUCHERT

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[a^6\,\mathcal{Q}\right] + a^4\,\frac{d}{dt}\left[a^2\,\mathcal{R}\right] = 0.} \tag{3.56}$$

Diese „getarnte“ **Layzer - Irvine Gleichung** ist letztendlich eine thermodynamische Beziehung, wobei die Größen $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$ als *Gibbs'sche Potentiale* interpretiert werden könnten. Allerdings ist in den Variablen $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$ das Gleichungssystem *nicht geschlossen*. Die Dynamik dieser Größen als Funktion der Zeit kann nur berechnet werden, wenn man

noch eine Zustandsgleichung oder ein Skalierungsgesetz zwischen $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$ formuliert. Aus (2.112) folgt zum Beispiel

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{3}\left(\frac{1+3\,w}{1-w}\right)\,\mathcal{R}. \tag{3.57}$$

Dies ist eine gewisse konzeptionelle Schwäche der von BUCHERT eingeführten Größen.

Man kann der Entropiegleichung – wie schon im Ringmodell durchgeführt – noch andere Gestalten geben. Eine andere Variante wäre

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\,\dot{\psi}^2 - \frac{4\pi G m}{3\,a^3}\,\mathbf{V}[\psi]\right\} + \frac{\dot{a}}{a}\,\left\{2\,\dot{\psi}^2 - \frac{4\pi G m}{a^3}\,\mathbf{V}[\psi]\right\} = 0. \tag{3.58}$$

Führt man aber jetzt in (3.48) oder (3.58) die Zeitdifferentiation aus, separiert sich nach Umrechnungen der Faktor $\dot{\psi}$. Man erhält so schließlich die schon bekannte „Jeans - Gleichung“ (Punkte bedeuten hier Ableitungen nach der Zeit, Striche nach ψ)

$$\boxed{\ddot{\psi} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\,\dot{\psi} = \frac{4\pi G m}{3\,a^3}\,\mathbf{V}'[\psi],} \tag{3.59}$$

die man auch direkt aus der Lagrangedichte als Bewegungsgleichung für ψ mit einem beliebig angenommen a gewinnen kann. Die *Layzer - Irvine* Gleichung oder die kosmische Energiegleichung ist somit der erweiterte „Energiesatz“ dieser mikrophysikalischen „Jeansgleichung“.

3.7 Ein Vergleich mit dem Quintessenzmodell

Aufgrund der begrifflichen Schwierigkeiten, die kosmologische Konstante als Wirkung einer „relativistischen Flüssigkeit“ zu verstehen, wurden Ende der 1980er Jahre bestimmte *quantentheoretische „Quintessenz“ – Modelle* entwickelt. So haben WETTERICH und RATRA & PEEBLES 1988 ein quantentheoretisches hypothetisches skalares **Cosmon** - Feld vorgeschlagen ([214],[159]), dessen **w** - Parameter durch

$$w_\phi = \frac{\dot{\phi}^2 - 2\,\mathbf{V}[\phi]}{\dot{\phi}^2 + 2\,\mathbf{V}[\phi]} \tag{3.60}$$

gegeben ist. Für den Druck und die Energiedichte der „Dunklen Energie“ dieses rein hypothetisch-spekulativen „Quantenfeldes“ wird dabei

$$p_\phi = \frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 - \mathbf{V}[\phi], \qquad \varrho_\phi = \frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 + \mathbf{V}[\phi]. \tag{3.61}$$

gesetzt. Wird dies in die adiabatische Energie-Entropie-Energiegleichung

$$\frac{d}{dt}\left\{\varrho_\phi\, a^3\right\} + p_\phi\,\frac{d}{dt}\left\{a^3\right\} = 0 \tag{3.62}$$

eingesetzt, so erhält man für die Bewegungsgleichung des Feldes sofort

$$\ddot{\phi} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\phi} + \mathbf{V}'[\phi] = 0. \tag{3.63}$$

Hier taucht der eigenartige Faktor 3 anstatt eines Faktors 2 wie in (2.116) oder (3.59) auf. Das postulierte hypothetische Quantenfeld $\mathbf{V}[\phi]$ soll so positiv flach sein, dass asymptotisch $w_\phi \approx -1$ erfüllt ist. Der erlaubte Bereich scheint aber auf $-1 < w_\phi < -1/3$ beschränkt zu sein. In diesem „Quintessenz“ – Modell wird somit das Unterschreiten der kritischen Schwelle $w_\phi < -1$ nicht so einfach möglich zu sein!

Für das erweiterte Friedmann-Modell wird nun für ein völlig homogenes Materiesystem der Ansatz

$$p_\phi = \frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 - \mathbf{V}[\phi], \qquad \varrho_\phi = \frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 + \mathbf{V}[\phi] + \frac{Gm}{a^3} \tag{3.64}$$

gemacht. Die zwei Friedmann - Gleichungen für den Skalenfaktor a lauten jetzt im Quintessenzmodell schließlich ($\epsilon_0 = 0$)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\,\pi\,Gm}{3\,a^3} + \frac{8\pi}{3}\,\left(\frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2 + \mathbf{V}[\phi]\right), \tag{3.65}$$

$$2\,\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 8\pi\,\left\{\mathbf{V}[\phi] - \frac{1}{2}\,\dot{\phi}^2\right\} \tag{3.66}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\,\pi\,Gm}{3\,a^3} + \frac{8\pi}{3}\,\left(\mathbf{V}[\phi] - \dot{\phi}^2\right). \tag{3.67}$$

Man sieht, dass hier die Vorzeichenkonvention einer *„idealisierten Flüssigkeit“* in den Einsteinschen Gleichungen gesetzt wurde. Die rein hypothetische „Quantenflüssigkeit“ wurde dabei so geeicht, daß im Limes $\dot{\phi} \to 0$ für die kosmologische „Konstante“

$$\Lambda \approx 3\,\mathbf{V}[\phi] > 0 \tag{3.68}$$

gilt. Man sieht anhand der obigen dynamischen Gleichungen, daß die gravitative Energiedichte *positiv* in die Gleichungen eingeht, was mit einer entgegengesetzten Vorzeichenkonvention des *Energie-Impulstensors* einhergeht (siehe (3.44,3.45)). Das Modell nimmt somit *negativen Druck*, aber *positive Energiedichte* an - ganz im Gegensatz zu unserem gravitativen Strukturmodell mit dem Skalar ψ.

Für eine wirkliche Erklärung der beschleunigten Expansion ist dieses *hypothetische* Modell aber wenig hilfreich, da weder über die Existenz des Feldes ϕ noch die genaue Form der gewählten Funktion $\mathbf{V}[\phi]$ irgendetwas bekannt ist. In der Literatur wurden besonders die Funktionen

$$\mathbf{V}[\phi] = \mu^{4+\alpha}\,\phi^{-\alpha}, \qquad \mathbf{V}[\phi] = \mu^4\,e^{-\phi/\mu} \tag{3.69}$$

genauer diskutiert ([145],[214]). Das Potential hat somit die Eigenschaft $\mathbf{V}[\phi] > 0$ sowie $\mathbf{V}'[\phi] < 0$. In jüngster Zeit versuchen Autoren wie P.J. Steinhardt, A. Ijjas und C. Andrei (*Rapidly Descending Dark energy and the End of Cosmic Expansion (2022)*) mit Hilfe des spekulativ künstlichen Potentials

$$\mathbf{V}[\phi] = V_0\,e^{-\phi/M} - V_1\,e^{-\phi/m} \tag{3.70}$$

extrem spekulative Modelle zyklischer Universen zu konstruieren, die nach einer beschleunigten Expansionsphase in eine Kontraktionsphase übergehen. Nach dem Zusammenschrumpfen soll wieder eine neue Expansionsphase beginnen - und das in alle Ewigkeit[11].

Alle diese Modelle über „Dunkle Energie“ sind sehr spekulativ und wenig mit der Beobachtung abgeglichen. Das Problem wird auch nicht reduziert oder vereinfacht, sondern es werden *willkürliche Parameter* wie μ und α eingeführt. Das von Einstein im Jahre 1918 bei der Notiz von Schrödinger vorausgeahnte *„Gestrüpp“ von Hypothesen* wird hier also wie selbstverständlich realisiert. Auf dem Gebiete der *Elementarteilchenphysik* als eine Massenveranstaltung der Großindustrie scheint dies ein etablierter hässlicher Missstand geworden zu sein.

[11] Finanziert wird die Arbeitsgruppe von der *Simons-Foundation*. Dieser Geldgeber glaubt nicht an den „Urknall“.

3.8 Eichtransformationen der Entropiegleichung

Im vorherigen Kapitel sah man, dass die kosmische Energiegleichung in einem expandierenden System unterschiedliche Formen (*Eichungen*) haben kann. Um einen besseren Überblick zu haben, leiten wir eine spezielle Eichtransformation für diese Gleichung ab. Die *kosmologische Entropiegleichung* hat in unserem *reversiblen Modell* die Form

$$T\,\frac{d\mathbf{S}}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\left\{\boldsymbol{\varrho}_E\,a^3\right\} + \mathbf{p}\,\frac{d}{dt}\left\{a^3\right\} = 0, \tag{3.71}$$

wo $\boldsymbol{\varrho}_E$ die Energiedichte und $\mathbf{p}$ den Druck (dividiert durch c^2) darstellt. Wir multiplizieren die Energiedichte $\boldsymbol{\varrho}_E$ mit a^γ, wobei γ eine beliebige positive oder negative Zahl sein soll. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\{a^\gamma\,\boldsymbol{\varrho}_E\,a^3\right\} &= \frac{d}{dt}\left\{a^\gamma\right\}\,\boldsymbol{\varrho}_E\,a^3\\ +a^\gamma\,\frac{d}{dt}\left\{\boldsymbol{\varrho}_E\,a^3\right\} &= \frac{1}{3}\,\gamma\,a^\gamma\,\boldsymbol{\varrho}_E\,\frac{d}{dt}\left\{a^3\right\}\\ &\quad -a^\gamma\,\mathbf{p}\,\frac{d}{dt}\left\{a^3\right\}.\end{aligned} \tag{3.72}$$

Damit erhalten wir eine verallgemeinerte Form der Entropiegleichung

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left\{a^\gamma\,\boldsymbol{\varrho}_E\,a^3\right\} + \left\{a^\gamma\,\mathbf{p} - \frac{1}{3}\,\gamma\,a^\gamma\,\boldsymbol{\varrho}_E\right\}\,\frac{d}{dt}\left\{a^3\right\} = 0.} \tag{3.73}$$

Im Falle $\gamma = 0$ erhält man die schon so von mir genannte *Einstein - Friedmann Eichung*, im Falle $\gamma = -1$ die *Layzer - Irvine Eichung*. Für den verallgemeinerten EoS - Parameter w_γ erhalten wir nach Definition

$$w_\gamma = \frac{\mathbf{p} - \frac{1}{3}\,\gamma\,\boldsymbol{\varrho}_E}{\boldsymbol{\varrho}_E} \equiv w_0 - \frac{\gamma}{3}. \tag{3.74}$$

Diese Relation ist die Verallgemeinerung der speziellen Eichungs - Transformation (3.54). Mit Hilfe von (3.44) und (3.45) folgt für eine Skaleneichung der Ordnung γ explizit

$$\boxed{w_\gamma = \frac{1}{3}\left(\frac{\dot\psi^2}{\dot\psi^2 - \dfrac{8\pi G m}{3\,a^3}\,\boldsymbol{V}[\psi]} - \gamma\right).} \tag{3.75}$$

Für $\gamma = 0$ und $\gamma = -1$ ergeben sich wieder die bekannten Spezialfälle der *Einstein - Friedmann* bzw. *Layzer - Irvine Eichung*. Die obigen mathematischen Eigenschaften könnte man mit dem Vorgehen von WETTERICH aus dem Jahre 2013 vergleichen[216], der mit der Annahme von variablen Elektronenmassen die gravitativen Metriken sowie sein „Cosmonfeld“ so umeichen will, dass komplementäre Bilder wie ein *schrumpfender Kosmos* vor dem geistigen Auge erscheint. Der sogenannte „heiße Urknall“ wird so als „kaltes Wachstum“ in die unendliche zeitliche Vergangenheit geschoben. Es ist aber problematisch, ob solche alternativen Bilder falsifizierbar sind und für ein Verständnis des Kosmos fruchtbar sein können.

Es ist fast überflüssig zu erwähnen, dass eine Ausdifferentation der umgeeichten Energiegleichung (3.73) nach der kosmischen Zeit t sofort wieder die Bewegungsgleichung (3.59) für das Skalarfeld (Ordnungsparameter; Dichtekontrastfunktion) ψ liefert.

3.9 Skalengesetze der Energiedichte

Die obigen Energie - Erhaltungssätze erlauben eine allgemeine Aussage über die Abhängigkeit der Energiedichte $\boldsymbol{\varrho}_E$ vom „Skalenparameter“ a. Denn es gilt nach (2.70) mit der unbekannten Zustandsgleichung w_{DE}

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\varrho}_E + 3\,\frac{\dot{a}}{a}\,\left\{\frac{\mathbf{p}}{c^2} + \boldsymbol{\varrho}_E\right\} = 0. \tag{3.76}$$

Mit der Zustandsgleichung $\mathbf{p} = w\,\boldsymbol{\varrho}_E\,c^2$ lautet sie dann

$$\boxed{\frac{d}{dt}\boldsymbol{\varrho}_E + 3\,\frac{\dot{a}}{a}\,\{1+w\}\,\boldsymbol{\varrho}_E = 0.} \tag{3.77}$$

Setzt man hier den Parameter $w[t]$ der Zustandsgleichung als bekannt voraus, so folgt aus der obigen linearen Differentialgleichung für die *Energiedichte* (nicht *Massendichte*!)

$$\boldsymbol{\varrho}_E = \boldsymbol{\varrho}_{E,0}\,\exp\left[-3\int_0^t \frac{\dot{a}[t']}{a[t']}\,[1+w[t']]\,dt'\right]. \tag{3.78}$$

Ist w eine Konstante, so liefert (3.78) die Proportionalität

$$\boxed{\boldsymbol{\varrho}_E \propto a^{-3(1+w)}.} \tag{3.79}$$

Für den Druck gilt natürlich nach Definition $\mathbf{p} \propto w\, a^{-3(1+w)}$. Im Falle $w = -1$ ist ϱ_E konstant, genau wie im Modell der kosmologischen Konstanten. Der Fall $w = -1/3$ ist ein Grenzfall, weil oberhalb desselben keine *beschleunigte Expansion* des Universums mehr auftreten kann. Aus den obigen Relationen (3.79 lässt sich für einfache Systeme sofort der entsprechende **w** Parameter angeben. Es gilt im Einzelnen

- $\mathbf{w} = 1$; $\varrho_E \propto a^{-6}$; *ultrarelativistische Teilchen* Wahrscheinlich nur im frühen Kosmos relevant.
- $\mathbf{w} = 1/3$; $\varrho_E \propto a^{-4}$; *Photonengas, Neutrinos.* Wegen (3.30) folgt für Strahlung (Photonengas) oder masselose Neutrinos mit $\epsilon_{kin} >> \epsilon_{pot}$ eben $\mathbf{w} = 1/3$.
- $\mathbf{w} = 0$; $\varrho_E \propto a^{-3}$; *staubförmiges Medium.* Dies häufig in der Literatur anzutreffende Resultat gilt nur für nicht gravitativ wechselwirkende Teilchen ($\mathbf{V}[\psi] = 0$) mit verschwindender Pekuliarbewegung.
- $\mathbf{w}$ = -1/3; $\varrho_E \propto a^{-2}$; Grenzfall, oberhalb dessen keine beschleunigte Expansion mehr stattfindet (**lineare Expansion**). Bestimmte Quintessenzmodelle und „string models“ führen auf diesen Wert. Auch Buchert favorisierte im Jahre 2005 in seinem *backreaction model* diesen Wert ([14])
- $\mathbf{w}$ = -2/3; $\varrho_E \propto a^{-1}$; Dieser Wert folgt zwingend im Rahmen der Newtonschen Gravitationstheorie, wenn man Kopplungen zwischen der Expansion und der Strukturbildung zulässt. Mit zunehmender Strukturierung könnte der Parameter aber weiter absinken ($w < -2/3$). Dieser Zustand von $w = -2/3$ muss im frühen Universum realisiert gewesen sein.
- $\mathbf{w}$ = -1; $\varrho_E \propto$ *konstant*; Dieser Wert wird im Standardmodell angenommen („Kosmologische Konstante“); Im Rahmen der Einsteinschen Gravitation ist dies die „Integrationskonstante“, die sich nicht weiter erklären läßt. Dieses als „Dunkle Energie“ (Kosmologische Konstante) bezeichnete physikalische Phänomen kann auch nicht nachträglich aus der Quantentheorie erklärt werden. Neuere Messungen bei der Strukturbildung (S_8 Anomalie) und bei Quasaren (H_0 Anomalie) machen diesen Fall immer unwahrscheinlicher.

Ist andererseits die *Energiedichte* ϱ_E durch eine physikalische Theorie als Funktion der Zeit gegeben, so folgt für die Zustandsgleichung aus (3.77) zunächst

$$3\,[1+w]\,\frac{d}{dt}\ln[a]+\frac{d}{dt}\ln\boldsymbol{\varrho}_E=0. \tag{3.80}$$

Daraus folgt leicht

$$\boxed{w=-1-\frac{1}{3}\,\frac{d\,\ln[\boldsymbol{\varrho}_E]}{d\,\ln[a]}.} \tag{3.81}$$

$H=\dot{a}/a$ ist der *Hubbleparameter*, der bei expandierenden Universen immer positiv ist. Aus der wichtigen Darstellung (3.81) kann man entnehmen, dass der w – Parameter exakt gleich minus eins ist, wenn ϱ_E eine *zeitliche Konstante* darstellt.

Durch Einsetzten der dynamischen Energiedichten des „Gitterkosmos“ ergibt sich so für die Zustandsgleichung in der *Einstein - Friedmann Eichung*

$$w=-1-\frac{1}{3}\,H^{-1}\,\frac{d}{dt}\ln\left[\frac{1}{2}\dot{\psi}^2-\frac{4\pi Gm}{3\,a^3}\,\boldsymbol{V}[\psi]\right]. \tag{3.82}$$

Eine alternative Formulierung der obigen w - Zustandsgleichung wäre die *Layzer - Irvine Eichung* $w_{LI}=w+1/3$

$$w_{LI}=-\frac{1}{3}\,H^{-1}\,\frac{d}{dt}\ln\left[\frac{1}{2}\,a^2\,\dot{\psi}^2-\frac{4\pi Gm}{3\,a}\,\boldsymbol{V}[\psi]\right]. \tag{3.83}$$

Der „kosmische“ Druck, der für eine beschleunigte Expansion maßgeblich ist, wird also bei LAYZER durch das Virial $2E_{kin}+E_{pot}$ im „Molekülgas“ der Galaxien bestimmt. D. LAYZER schreibt 1963 ([105]) zu der von ihm formulierten Äquivalenz zwischen Virial und Raum - Expansion (Gleichung (2.87):

> *The local irregularities affects the rate of cosmic expansion through the cosmic pressure, given by...(Verweis auf (3.50)). When energy is conserved, the cosmic pressure vanishes, and the expansion is unaffected by the evolution of local irregularities.*

Diese Aussage stimmt genau mit der Energieeichung (3.83) überein, nicht aber mit der Relation (3.82), wo die Energiedichte ohne den Faktor a^2 definiert wurde. Gilt in (3.83) Energieerhaltung, ist also das Argument des Logarithmus in (3.83) zeitunabhängig, so gilt $w_{LI} = 0$. Dies ist genau der Schwellwert, bei der *keine beschleunigte Expansion des Universums mehr stattfindet*. In der *Einstein - Friedmann Eichung* gilt dann nach (3.83) $w = -1/3$.

Nach der Formel (3.40) (*Einstein - Friedmann Eichung*) ist der „kosmische Druck“ $p \propto +\dot{\psi}^2$ immer positiv definite und nur dann null, wenn $\dot{\psi} = 0$ ist. Die Energiedichte muss dann aber negativ sein, um $w < 0$ zu gewährleisten. Die Interpretation der physikalischen Größen ist also etwas anders als bei LAYZER 1963; die physikalischen Folgerungen aber dieselben. Für den „**E**quation **o**f **S**tate“ Parameter w der Zustandsgleichung $p = w\,\varrho_\epsilon$ gilt in jedem Falle wegen (3.82) oder (3.83)

$$w = \frac{p_E}{\varrho_E} \equiv \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{\psi}^2}{\dot{\psi}^2 - \dfrac{8\pi G m}{3\,a^3}\,\boldsymbol{V}[\psi]}\right). \tag{3.84}$$

Diese aus rein energetischen Überlegungen abgeleitete Formel stimmt mit der aus dynamischen Analogien zu den FLRW - Gleichungen abgeleiteten Beziehungen (2.59) vollständig überein. Für $w < -1/3$ tritt Beschleunigung der Expansion auf, was direkt aus den FLRW – Gleichungen mit $p = w\,\varrho$ folgt. Hier sieht man noch einmal, dass $w < 0$ nur dann gelten kann, wenn die im Nenner von (3.84) stehende Energiedichte negativ ist.

Im Gegensatz zu C. WETTERICH ([215]) finden wir kein allgemeines *„kosmisches Virialtheorem“*, sondern im Ringmodell wie im allgemeinen Gittermodell nur die *Layzer - Irvine* Gleichung zwischen der lokalen Energieänderung, der Expansion a der „Gitterkonstanten“ und der Änderung des *Virials*. Und diese Bilanzgleichung folgt aus einer einfachen lokalen NEWTON'schen Kosmologie. Anwachsende strukturelle Inhomogenitäten und globale Raumexpansion sind dynamisch gekoppelte Phänomene.

3.10 Klassische Deutung der Rotverschiebung

Die Allgemeine Relativitätstheorie kann sehr schön und elegant die Rotverschiebung von Photonen durch die Expansion des Skalenfaktors

$a[t]$ erklären. Trotzdem wird man beim Problem der „Rotverschiebung“ von Photonen aus den Tiefen des Universums unwillkürlich an die alte Hypothese der „Lichtermüdung“ erinnert, wie sie zum Beispiel 1929 von F. Zwicky vorgeschlagen wurde ([227]). Er stellte sich eine Art „Impulsverlust“ vor, welches ein Lichtphoton beim Durchlaufen einer Massenansammlung erleidet[12].

So liest man in der sehr interessanten Biographie über F. Zwicky von R. Müller& A. Stöckli auf Seite 171 ([138]): *Anfang 1958 wurde Zwicky von der Zeitschrift Science gebeten, einen Aufsatz über „Die Rotverschiebung und die Expansion des Weltalls“ zu schreiben. Zwicky antwortete dem Chefredakteur erst nach neun Monaten, die Situation bei der Rotverschiebung sei „äußerst verworren“. Er ließ dann nichts mehr von sich hören. Erst auf eine Nachfrage der Zeitschrift im November 1960 äußerte sich Zwicky wieder und wies darauf hin, dass er zusammen mit Humason nun vier Jahre daran gearbeitet habe, mehr Aufschluss über die Rotverschiebung zu erlangen... Er führte aus: „Im Gegensatz zu dem, was Kosmologen behaupten, geraten wegen unserer Forschungen alle bis jetzt aufgestellten Modelle von expandierenden Universen mehr und mehr ins Wanken...“. Er schlug Science vor, einen Artikel über ein „unkonventionelles, aber doch mögliches Modell des Weltalls „ zu schreiben, in dem er dieses als wesentlich statisch und im kosmischen stationären thermodynamischen Gleichgewicht befindlich darstellen würde....Die einzige noch vorhandene Schwierigkeit liege darin, dass ein anderer als der Doppler-Effekt , beispielsweise die Gravitationsreibung, für die Rotverschiebung von Galaxien verantwortlich sei.“*

Die Diskussion von Zwicky mit *Science* brach dann im Sommer 1962 ab. Zwicky hat so niemals einen Artikel zur Rotverschiebung von Galaxien oder zur Expansion des Universums geschrieben, *weil er nicht an eine Expansion des Raumes glaubte!* Dabei ist es aus heutiger Sicht zu bedauern, dass er 1929 nicht den expandierenden Raum als Hauptursache für seine „ermüdenden Photonen“ angesehen hat. Seine Argumente gegen ein expandierendes Universum gleichen heutzutage zum Teil denjenigen von L. Wiltshire aus dem Jahre 2006, der eine beschleunigte Expansion als einen „Scheineffekt“ ansieht („timescape cosmology“). Das Modell der „Gravitationsreibung“ zur Photonen- Rotverschiebung erinnert zudem

[12] Zwicky lehnte deshalb zu Beginn der 1930er bis wohl an sein Lebensende eine Expansion des Raumes - wie von Lemaître vertreten - kategorisch ab

an das Konzept der sogenannten „dynamischen Reibung“ (*dynamical friction*), welches in der Stellardynamik bei der Berechnung von Relaxationszeiten von Sternhaufen eine gewisse Rolle spielt. Doch die Idee der **Lichtermüdung in einem statischen Universum** musste später aufgegeben werden, da die Lichtzeitkurven von Supernova-IIa - Ausbrüchen direkt mit ihrer „Rotverschiebung“ korreliert sind und durch die Zeitdilatation gestreckt erscheinen, **was somit ein unmittelbarer Beweis für die Raumexpansion ist.**

Trotzdem kann man gerade in einem *expandierenden Raum* mit einer gewissen Vorsicht von einer „Lichtermüdung“ oder besser von einer *„Energie-Impulsdämpfung“* sprechen. Die Ursache ist aber keineswegs „Gravitationsreibung“, sondern liegt vielmehr in der Bewegungsgleichung (3.59). Nach dieser Formel erfährt jedes Teilchen mit endlicher Ruhemasse im *expandierenden mitbewegten Koordinatensystem des Universums* eine „Abbremsung“, eine sogenannte „*kosmische Reibung*“. Um dies besser einzusehen, kann man die Bewegungsgleichung (3.59) für die vektorielle Ortsfunktion $\boldsymbol{\psi}$ im mitbewegten Koordinatensystem in eine andere Form bringen. Für ein freies klassisches Teilchen gilt im Bild der Newtonschen Gravitation

$$\frac{d}{dt}\left(a^2\,\dot{\boldsymbol{\psi}}\right) = 0. \tag{3.85}$$

Im mitgeführten Koordinatensystem gilt für die momentane Distanz r und deren Änderung

$$\mathbf{r} = a\,\boldsymbol{\psi}; \qquad \dot{\mathbf{r}} = \dot{a}\,\boldsymbol{\psi} + a\,\dot{\boldsymbol{\psi}}. \tag{3.86}$$

Hat das Teilchen im kosmischen Strom keine Eigenbewegung, gilt also $\dot{\boldsymbol{\psi}} = 0$, so folgt aus den obigen beiden Relationen das *Hubble - Lemaiître sche Gesetz*

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\dot{a}}{a}\,\mathbf{r}. \tag{3.87}$$

Doch diese „Fluchtgeschwindigkeit“ ist nicht die Eigengeschwindigkeit des freien Teilchens gegenüber der allgemeinen *Raummutation*. Denn diese Eigengeschwindigkeit gegenüber der „allgemeinen Raumexpansion“ ist nach der obigen Relation durch

$$\mathbf{v} = a\,\dot{\boldsymbol{\psi}} \tag{3.88}$$

gegeben. Nach (3.85) gilt aber dann für freie Teilchen

$$\boxed{\dot{\mathbf{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\,\mathbf{v} = 0.} \tag{3.89}$$

In *mitbewegten Koordinatensystemen* taucht somit ein „Bremsterm“ (*cosmic drag force*) auf. Und dieser Effekt hängt *nicht notwendig* mit der allgemeinen Relativitätstheorie zusammen, sondern ist Ausfluss einer klassischen Koordinatentransformation des expandierenden Raumes, die auch im Bild der Newtonschen Gravitation gültig ist. D. Layzer veranschaulicht dieses Phänomen mit einer Eiskunstläuferin, die reibungsfrei über eine gleichmäßig expandierende Eisfläche gleitet. Ihre Gleitgeschwindigkeit muss sich relativ zum Eis verringern. Und dieser Effekt im expandierenden Raum leistet genau die „Licht-Impuls-Abnahme“, welche F. Zwicky im Jahre 1929 und auch nach 1960 für ein nicht-expandierendes Universum mit Hilfe von zusätzlichen Massen oder Streueffekten erzwingen wollte - was aber letztendlich zum Scheitern verurteilt war.

Der Bremsterm in (3.89) ist aber nur im *mitbewegten Koordinatensystem* relevant, in *mitgeführten Koordinaten* verschwindet diese „scheinbare Reibungskraft“ wieder, wie wir im nächsten Kapitel anhand der Keplerbewegung um einen Zentralkörper zeigen werden[13].

Für ein *freies* Teilchen mit endlicher Ruhemasse gilt somit fern ab von gravitierenden Zentren wie Sternen oder Galaxien die Bewegungsgleichung (3.89). Als allgemeine Lösung erhält man die Proportionalität

$$\mathbf{v} \propto \frac{1}{a}. \tag{3.90}$$

Im relativistischen Fall muss hier $\mathbf{v}$ durch $\mathbf{v}/\sqrt{1-(v/c)^2}$ erweitert werden. Die Geschwindigkeit des kräftefreien Teilchens vermindert sich also umgekehrt proportional zum Skalenfaktor des expandierenden Universums. Multipliziert man die obigen Relationen mit der von der Geschwindigkeit abhängigen Masse $m = m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$ des Teilchens, so gilt für seinen Impuls $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ ebenfalls

$$\mathbf{p} \propto \frac{1}{a}. \tag{3.91}$$

[13] Aus demselben Grund ist auch für die „Pioneer - Anomalie“ ein solcher „Bremsterm“ irrelevant. Seit 2011 wird diese Anomalie auf elektromagnetische Abstrahlung der Sonde und Reflexion an den Antennen zurückgeführt, obwohl Jahre vorher derselbe Effekt vehement ausgeschlossen worden war!

Führt man jetzt noch die De-Broglie Wellenlänge

$$\lambda_B = \frac{h}{\mathbf{p}} \tag{3.92}$$

ein, wo h das Planck'sche Wirkungsquantum bezeichnet, so gilt auch

$$\lambda_B \propto a. \tag{3.93}$$

Im expandierenden Universum vergrößert sich also *kontinuierlich* die quantenmechanische „Materiewellenlänge" eines sich frei bewegenden Masseteilchens proportional dem Skalenfaktor a. Gleichzeitig verliert das Teilchen aber im *expandierenden Koordinatensystem* Bewegungsenergie . Wichtig ist dann die Frage, wohin diese Energie im kosmischen Gesamtbild transferiert wird.

Ein analoges Phänomen muss nun auch für Photonen gelten. Da diese sich im quasi-euklidischen Raum nach der Relativitätstheorie immer mit Lichtgeschwindigkeit c bewegen, können sie zwar nicht an Geschwindigkeit, aber in einem expandierenden Raum auf ihrer Reise *kontinuierlich an Impuls und Energie verlieren.* Da der Impuls von Photonen wegen

$$p = \frac{h\,\nu}{c} \equiv \frac{h}{\lambda}$$

direkt proportional ihrer Frequenz ν und umgekehrt proportional ihrer momentanen Wellenlänge λ ist, folgt sofort

$$\frac{\lambda[t_a]}{\lambda[t_e]} = \frac{a[t_a]}{a[t_e]}. \tag{3.94}$$

Wird ein Photon mit der Wellenlänge $\lambda[t_e]$ zum Zeitpunkt t_e *emittiert* und mit der Wellenlänge $\lambda[t_a]$ zu einem späteren Zeitpunkt an einem anderen Ort im Universum zum Zeitpunkt t_a *absorbiert* (beobachtet), so verhalten sich die beiden Wellenlängen wie die entsprechenden Skalenfaktoren des Kosmos zum Zeitpunkt der Emission und Absorption des Photons. Definiert man jetzt die **Rotverschiebung**

$$\mathbf{z} = \frac{\lambda[t_a] - \lambda[t_e]}{\lambda[t_e]}, \tag{3.95}$$

so gilt die wichtige Relation

$$\boxed{\frac{a[t_a]}{a[t_e]} = 1 + \mathbf{z}.} \tag{3.96}$$

Hiermit ist es möglich, Entwicklungsprozesse im Universum anstatt als Funktion einer „kosmischen Zeit“ t nun als Funktion der „Observablen“ Rotverschiebung $\mathbf{z}$ darzustellen. Auch die Lichtzeitkurven von Supernovae werden gemäß ihrer Rotverschiebung $\mathbf{z}$ *stark gedehnt*. Dies kann als Beweis der Expansion angesehen werden[14].

Historisch ist in diesem Zusammenhang noch zu bemerken, dass nach der fundamentalen Entdeckung von E. Hubble im Jahre 1929, dass nämlich mit zunehmender Entfernung einer Galaxie ihre Rotverschiebung im Mittel linear zunimmt und somit die Expansion des Raumes im Universum sehr wahrscheinlich ist, sofort prominente Gegner in die Öffentlichkeit traten, um eine alternative Deutung vorzuschlagen. Neben Hubble, welcher die Expansion als „scheinbar“ interpretierte, waren die beiden bekanntesten Vertreter der schon erwähnte schweizerisch-amerikanische Astrophysiker F. Zwicky (1899-1974) und der britische Astrophysiker J. Jeans (1877-1946). Auch Jeans brachte wie Zwicky die Streuung an freien Elektronen ins Spiel, die einen ähnlichen Effekt bewirken könnten. In jedem Fall waren beide lange Zeit der Ansicht, dass die vermeintliche *Expansion des Universums* nur ein „Scheineffekt“ ist, der durch subtile physikalische Prozesse vorgetäuscht wird und in Wirklichkeit nicht existiert. Sie saßen hier geistig mit Einstein in einem Boot - welcher die Möglichkeit einer Expansion des Raumes aus seiner allgemeinen Relativitätstheorie zunächst völlig übersehen oder abgelehnt hatte.

3.11 Die Drift der Rotverschiebung

Da das Universum expandiert, müssten die rotverschobenen Linien in einem Spektrum sich in Jahren oder besser Jahrtausenden auch zeitlich ändern. Eine Galaxie, die heute eine Rotverschiebung $\mathbf{z} = 2$ hat, dürfte in 10 Jahren eine im Nano- Bereich veränderte Verschiebung aufweisen. Doch ist das überhaupt messbar und wie ist der genaue Trend? Um diese Frage zu beantworten, soll hier die äußerst kleine zeitliche Änderung der Rotverschiebung $\mathbf{z}$ am Beobachtungsort genauer berechnet werden. Bezeichnen wir mit t_e und t_a die Zeitpunkte der Emission (Galaxie) und der

[14] Erste Überlegungen zu „Raum, Zeit und Ewigkeit“ auf der Grundlage einer endlichen Lichtgeschwindigkeit stammen von dem Juristen und Schriftsteller Felix Eberty (1812-1884) ([33])

Absorbtion (Planet Erde) eines Photons, so gilt für die Rotverschiebung

$$\mathbf{z} = \frac{a[t_a]}{a[t_e]} - 1. \tag{3.97}$$

Wir differenzieren diese Beziehung nach der Eigenzeit t_a des Beobachters und erhalten zunächst

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt_a} = \frac{\frac{da[t_a]}{dt_a}\, a[t_e] - \frac{da[t_e]}{dt_a}\, a[t_a]}{a[t_e]^2}. \tag{3.98}$$

Nun gilt aber im Rahmen der ART die Zeitdilation

$$\frac{dt_a}{dt_e} = \frac{a[t_a]}{a[t_e]}, \tag{3.99}$$

die auch für die Streckung der Helligkeitskurven von Supernovae verantwortlich ist. Damit lautet die obige Formel vereinfacht

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt_a} = \frac{\frac{da[t_a]}{dt_a} - \frac{da[t_e]}{dt_e}}{a[t_e]}. \tag{3.100}$$

Mit der Definition des Hubble-Parameters lässt sich dies auch

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt_a} = H[t_a]\, \frac{a[t_a]}{a[t_e]} - H[t_e] \tag{3.101}$$

schreiben. Wegen $H[t_a] \equiv H[0] \equiv H_0$ ergibt sich sehr einfach

$$\boxed{\frac{d\mathbf{z}}{dt} = H[0]\ (1 + \mathbf{z}) - H[\mathbf{z}]} \tag{3.102}$$

Ist also der heutige Hubbleparameter $H[0]$ bekannt, lässt sich durch Messen von $\dot{\mathbf{z}}$ die Expansionsdynamik $H[\mathbf{z}]$ als Funktion von $\mathbf{z}$ ohne weitere Modellannahmen festlegen. Die obige Relation wurde zum erstenmal von G.C.McVittie im Jahre 1962 abgeleitet, nachdem im gleichen Jahr schon A. Sandage für ein spezielles Kosmosmodell eine solche Relation abgeleitet hatte ([123],[172]). Setzen wir in die Relation für $H[\mathbf{z}]$ das

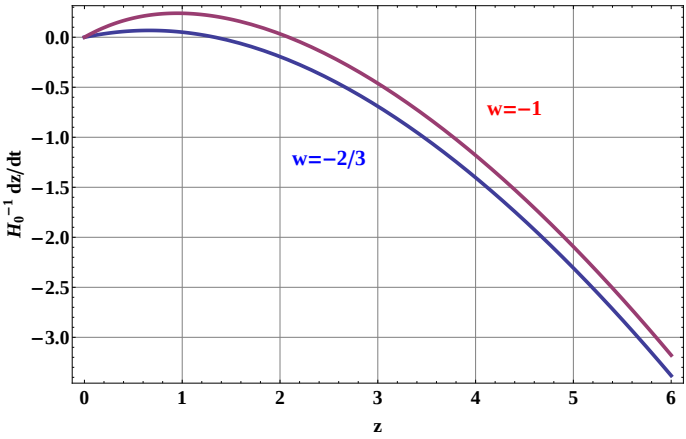


Fig. 3.3: *Das Verhalten* $\dot{\mathbf{z}}$ *(Drift der Rotverschiebung) als Funktion der Rotverschiebung* $\mathbf{z}$ *mit* $\Omega_m = 0.3$*. In der Zukunft könnte es mit hoch genauen Messungen von* $\mathbf{z}$ *am ELT über Jahrzehnte möglich sein, diesen extrem kleinen Effekt zu messen. Die Signatur der beschleunigten Expansion zeigt sich dadurch, dass bei kleinen z Werten die Drift positiv ist, bei höheren Werten aber negativ wird. Bei* $w = -1$ *ist dieser Effekt größer als bei* $w = -2/3$*. Die Messungen von* $\dot{\mathbf{z}}$ *müssen besser als 5 Prozent sein, um aussagekräftig zu sein.*

einfache wCDM Modell ein, so folgt rein theoretisch für die Drift

$$\dot{\mathbf{z}} = H_0 \left\{ 1 + \mathbf{z} - \sqrt{\Omega_m \left(1+\mathbf{z}\right)^3 + \left(1-\Omega_m\right)\left(1+\mathbf{z}\right)^{3(w+1)}} \right\}. \quad (3.103)$$

In der Figur (3.3) ist diese Funktion für $\Omega_m = 0.3$ und den zwei w-Parametern $w = -1$ und $w = -2/3$ angezeigt. Man sieht, dass die Unterschiede im w - Parameter prägnant zum Vorschein treten. Doch müssen die Messungen über einen Zeitraum von 10 Jahren relative Veränderungen von 10^{-5} mit einer Genauigkeit besser als 5% messen, um zwischen $w = -1$ und $w = -2/3$ entscheiden zu können. Ob es in der Zukunft gelingen wird, in den Spektren von Quasaren den „Lyman-α Wald“ mit Hilfe von Großteleskopen (ELT) so genau auszumessen, um die Dynamik des Universums zu entschlüsseln, bleibt unsicher.

3.12 Keplerbewegung im expandierenden Universum

Die Idee einer globalen Expansion des Raumes, oder besser einer *expandierenden Raumzeit*, beschrieben durch einen Skalenfaktor $a[t]$, provoziert sofort die Frage, ob auch das Sonnensystem mit seinen Planetenbahnen oder ganze Galaxien eine „Strukturexpansion“ erleiden und sich ihre charakteristische Ausdehnung nur aufgrund dieser Expansion verändern. Nach 1930 tauchte diese Frage sofort auf und wurde zum erstenmal von G. McVittie (1904-1988) ([122]) im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie behandelt. Seine Formeln sind aber sehr undurchsichtig und aufwendig und man fragt sich, ob das Ergebnis nicht wesentlich einfacher im Bild der Newtonschen Gravitation mit einem modifizierten Trägheitsgesetz in einem expandierenden Koordinatensystem abzuleiten ist. In den Kriegsjahren 1940 und 1942 hat dann der finnische Astronom G. Järnefelt (1901-1989) ([87],[88]) das analoge Ergebnis erzielt, dass nämlich der Einfluss der kosmischen Expansion auf die Dynamik der Planeten im heutigen Sonnensystem nicht merklich ist. Die heute populärste Darstellung wurde dann von Einstein & Straus im Jahre 1945 publiziert, in welchem die Autoren ohne Wissen ihrer Vorgänger eine sogenannte *Einstein-Straus-Vakuole* postulierten, innerhalb derer der Einfluss der äußeren expandierenden Metrik unmerklich sein sollte ([50]). Einstein prägte damals den Begriff des *„Schweizer Käses“*, bei dem die *„Löcher“* die Vakuolen repräsentieren, welche von der Expansion abgekoppelt sind. Heutzutage wird dieses Bild aber eher für die „Voids“ zwischen den Galaxienhaufen herangezogen.

Da das Phänomen der *Raumexpansion* im Prinzip unabhängig von der allgemeinen Relativitätstheorie ist und wir es im intergalaktischen Raum mit sehr schwachen Feldern und kleinen Geschwindigkeiten zu tun haben, wollen wir die Frage im Bild der Newtonschen Gravitation genauer untersuchen und prüfen, inwieweit dieses Bild einer „Vakuole“ gerechtfertigt ist. Ausgangspunkt ist die Jeansgleichung (3.17)

$$\frac{d}{dt}\left\{a^2\,\dot{\psi}\right\} = \frac{4\pi\,G m}{3\,a}\,\mathbf{V}'[\psi]. \tag{3.104}$$

für das Wachstum einer Dichtestörung in einem expandierenden Raum im *mitbewegten Koordinatensystem*. Um die Bewegung eines Massenpunktes zu beschreiben, gehen wir vom Skalar ψ zu einem Ortsvektor $\boldsymbol{\psi}$ über.

Die Bewegungsgleichung eines masselosen Körpers um eine Zentralmasse M lautet dann

$$\frac{d}{dt}\left\{a^2\,\dot{\boldsymbol{\psi}}\right\} = -\frac{GM}{a}\,\frac{\boldsymbol{\psi}}{|\boldsymbol{\psi}|^3}. \tag{3.105}$$

Computersimulationen mit dieser Gleichung zeigen, dass im mitbewegten Koordinatensystem mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{\psi}$ masselose Testteilchen im Falle $\dot{a} > 0$ *sich spiralförmig zur Zentralmasse M nach innen bewegen.* Hauptursache ist hier natürlich die „kosmische Reibung“ $2\,\dot{a}/a\,\dot{\boldsymbol{\psi}}$. Doch der Verdacht liegt nahe, dass im *mitgeführten Koordinatensystem* der wirkliche Abstand und damit der relative Ortsvektor

$$\mathbf{r} = a\,\boldsymbol{\psi} \tag{3.106}$$

zum Zentralkörper wieder nahezu konstant bleibt, weil durch die Expansion $a[t]$ die nach innen gerichtete Spiralbewegung in der Koordinate $\boldsymbol{\psi}$ in der mitgeführten Koordinate $\mathbf{r}$ wieder „*dissipations-frei*“ ausgeglichen wird. Dazu berechnen wir die Trägheitsbeschleunigung im *mitführenden Koordinatensystem* $\mathbf{r} = a\,\boldsymbol{\psi}$ zu[15]

$$\frac{d}{dt}\left\{a^2\,\dot{\boldsymbol{\psi}}\right\} \equiv \frac{d}{dt}\left\{a^2\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{a}\right)\right\} = a\,\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{a}\,\mathbf{r} \tag{3.107}$$

Wird dies ausgewertet, so ergibt sich die modifizierte Newtonsche Bewegungsgleichung für das Kepler-Problem in einem expandierenden *nicht - absoluten Newtonschen Raum* zu

$$\boxed{\ddot{\mathbf{r}} = -G\,M\,\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{\ddot{a}}{a}\,\mathbf{r}.} \tag{3.108}$$

Diese Bewegungsgleichung für die Relativbewegung eines binären Systems mit Gesamtmasse M beantwortet uns nun alle Fragen nach dem Einfluss des sich *ausdehnenden Raumes auf die evolutionäre Dynamik gebundener Systeme.* Sie entspricht der schon früher abgeleiteten Bewegungsgleichung (2.118) für Testteilchen im eindimensionalen *toy model* des Ringkosmos. Wie man sofort sieht, entfällt der kosmische „Reibungsterm“ im mitgeführten Koordinatensystem auch hier vollständig; dafür entsteht aber eine mit der Distanz zum Zentralkörper zunehmende zeitabhängige metrische

[15] In der Sprache der ART sind dies die relevanten „Fermikoordinaten“

Beschleunigung, die je nach Vorzeichen von $\ddot{a}$ abstoßend oder anziehend wirkt. Der Term $\ddot{a}$ zeigt deutlich, dass man sich unter „Raumexpansion“ nicht einfach das Auseinanderziehen einer räumlichen „Gummihaut“ vorstellen darf. Expansion bedeutet hier wirklich die *Mutation der Raumzeit* mit Konsequenzen für die dynamische Bewegungsgleichungen. Wenn zum Beispiel der Skalenfaktor $a[t]$ mit zeitlich konstanter Rate erfolgt ($\ddot{a} = 0$), so bleibt das Zweikörpersystem in seiner Dynamik davon sogar vollständig unberührt. Schon hier sieht man, dass der Begriff einer „Grenzschicht“ (*Vakuole*), bei der der Einfluss der Expansion vollständig ausgeschaltet ist, falsch ist.

Es wird hingegen die Vorstellung suggeriert, dass zwar *auch das vom Planetensystem besetzte Raumzeitgebiet expandiert, also permanent Raumzeitelemente aus der Sonne als Bezugspunkt an den Rand des Systems fließen, ohne dass das Planetensystem oder eine Galaxie selber in seiner geometrischen Ausdehnung davon betroffen ist.* Die Vorstellung, dass eine expandierende Raumzeit ein Planetensystem oder eine Galaxie proportional $\dot{a}/a$ wie eine „Gummihaut“ auseinanderzieht, ist somit völlig falsch - wird aber manchmal in Lehrbüchern stillschweigend suggeriert.

Es wundert somit nicht, dass auch bei der Keplerbewegung der Einfluss der expandierenden Raumzeit äußerst kontraintuitiv ist. Wichtig ist zu betonen, dass der Vektor $\mathbf{r}$ in der obigen Gleichung (3.108) sich auf das Massenzentrum oder auf die Masse bezieht, relativ zu der man die Bewegung des einen Teilchens gegenüber dem anderen Teilchen beschreibt. Um jetzt genauer die Wirkung des expandierenden Raumes auf die Dynamik des gravitativen Zweikörperproblems zu untersuchen, multiplizieren wir sowohl vektoriell als auch skalar die Bewegungsgleichung (3.108) mit $\dot{\mathbf{r}}$ und erhalten so

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}\right) = 0. \tag{3.109}$$

Übergang zu Polarkoordinaten führt auf den Drehimpulssatz

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}. \tag{3.110}$$

Skalare Multiplikation mit $\dot{\mathbf{r}}$ führt auf den Energiesatz in der differentiellen Form

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\,\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{G\,M}{r} - \frac{1}{2}\,\frac{\ddot{a}}{a}\,r^2\right\} = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\left\{\frac{\ddot{a}}{a}\right\}\,r^2} \tag{3.111}$$

Die rechte Seite der Gleichung (3.111) ist für die meisten Expansionsmodelle $a[t]$ des Universums *negativ*, so dass die auf der linken Seite in den geschweiften Klammern definierte Gesamtenergie immer im Abnehmen begriffen ist. Führen jetzt Polarkoordinaten gemäß

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2$$

ein und berücksichtigen (3.110), so folgt für den skalaren Radius $r \to r[t]$ mit (3.111) die Differentialgleichung

$$\boxed{\ddot{r} = \frac{L^2}{r^3} - \frac{G\,M}{r^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\,r.} \tag{3.112}$$

Der Skalenfaktor $a \to a[t]$ hat im frühen *Materie-dominierten* Universum die Zeitabhängigkeit

$$a[t] \propto t^{2/3}. \tag{3.113}$$

Setzen wir dies in die obige Differentialgleichung (3.112) ein, so folgt

$$\ddot{r} = \frac{L^2}{r^3} - \frac{G\,M}{r^2} - \frac{2\,r}{9\,t^2} \tag{3.114}$$

als Entwicklungsgleichung für den Abstand $r[t]$ zweier Massenkörper in einem expandierenden Universum kurz nach dem „Urknall“ (Urblitz) für $t > 0$. Wir interessieren uns zunächst für das Verhalten von $r[t]$ kurz nach der „Singularität“ $t = 0$ in der sich ausdehnenden Raumzeit. Eine direkte Potenzreihenlösung um die Anfangssingularität mit den beiden Integrationskonstanten c_1, c_2 lautet

$$\begin{aligned} r[t] = {} & c_1\,t^{1/3} + c_2\,t^{2/3} + \frac{9\,L^2}{2\,c_1^3}\,t - \\ & \frac{3\,(c_1^2\,G\,M + 3\,c_2\,L^2)}{2\,c_1^4}\,t^{4/3} + \\ & \frac{3\,(4\,c_1^4\,c_2\,G\,M + 12\,c_1^2\,c_2^2\,L^2 - 27\,L^4)}{8\,c_1^7}\,t^{5/3} + \ldots \end{aligned}$$

Anhand der obigen Lösung kann man schon sehen, dass in der Nähe der Singularität $t \to 0$ die Gravitation zwischen den beiden Teilchen („black holes“) fast keine Rolle mehr spielt. Dies gilt zumindest im Bild der

Newtonschen Gravitation. Wir multiplizieren (3.114) mit $\dot{r}$ und führen anschließend eine *unbestimmte* Integration aus. Man erhält zunächst

$$\frac{1}{2}\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,r^2} - \frac{G\,M}{r} + \frac{2}{9}\int \frac{r\,\dot{r}}{t^2}\,dt \equiv \epsilon \tag{3.115}$$

oder nach unbestimmter partieller Integration

$$\frac{1}{2}\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,r^2} - \frac{G\,M}{r} + \frac{1}{9}\,\frac{r^2}{t^2} + \frac{2}{9}\int \frac{r^2}{t^3}\,dt \equiv \epsilon. \tag{3.116}$$

Wir erhalten so den modifizierten Energiesatz der Keplerbewegung in der Form einer unbestimmten Integrodifferentialgleichung. Setzt man die obige Potenzreihe als allgemeine Lösung des Problems in diesen Energiesatz ein, so folgt unmittelbar

$$\frac{1}{2}\,\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\,r^2} - \frac{G\,M}{r} + \frac{1}{9}\,\frac{r^2}{t^2} + \frac{2}{9}\int \frac{r^2}{t^3}\,dt = \frac{1}{2}\,c_2\,\frac{GM}{c_1^2}, \tag{3.117}$$

also eine Art Erhaltungssatz für die obige Potenzreihe $r[t]$. Leider ist es aufgrund der Unbestimmtheit nicht möglich, die Konstanten c_1, c_2 einfach aus den asymptotischen Eigenschaften der Keplerbahn zu bestimmen.

Nehmen wir an, dass in der Zukunft $t \to \infty$ die beiden Massen sich in einer Kreisbahn im Abstand $L^2/(GM)$ bewegen, ist es zweckmäßig, die dimensionslosen Skalierungen

$$r = \frac{L^2}{G\,M}\,S; \qquad \tau = \frac{(G\,M)^2}{L^3}\,t$$

einzuführen. Dann erhalten wir für den skalierten Radius $S \to S[\tau]$ und den entsprechenden Polarwinkel $\varphi \to \varphi[\tau]$ der expandierenden Quasi-Keplerbahn die Differentialgleichungen

$$S'' = \frac{1}{S^3} - \frac{1}{S^2} - \frac{2\,S}{9\,\tau^2}; \qquad \varphi' = \frac{1}{S^2}. \tag{3.118}$$

Striche bedeuten hier Ableitungen nach der dimensionslosen Zeit τ. Die Erhaltungsgrößen L und M bezeichnen den spezifischen Drehimpuls und die Masse des Systems.

Wie sieht nun die kosmologische Entwicklung des gegenseitigen Abstandes beider Massen aus? Durch einen Potenzreihenansatz in τ lässt

sich in der Umgebung von $\tau \to 0$ wiederum zeigen, dass die allgemeine Lösung der obigen Gleichung für S als

$$S[\tau] = c_1\,\tau^{1/3} + c_2\,\tau^{2/3} + \frac{9}{2\,c_1^3}\,\tau - \frac{3\,(c_1^2+3\,c_2)}{2\,c_1^4}\,\tau^{4/3} + \\ + \frac{12\,c_1^2\,c_2\,(c_1^2+3\,c_2)-81}{8\,c_1^7}\,\tau^{5/3} + \\ + \frac{9(27\,c_1^2+135\,c_2-6\,c_1^4\,c_2^2-20\,c_1^2\,c_2^3)}{40\,c_1^8}\,\tau^2 + \dots$$

geschrieben werden kann. c_1, c_2 sind hier Integrationskonstanten, welche die Anfangsbedingungen der Bahn festlegen. Die Lösung ist geradezu eine Manifestation eines *Mach'schen Prinzips*, wonach die Dynamik eines „Subsystems" von der Massenverteilung des gesamten Kosmos abhängig ist - die absolut starre Raumzeit von NEWTON sich somit als eine Illusion herausstellt. Für den Polarwinkel $\varphi[\tau]$ ergibt sich mit der Anfangsbedingung $\varphi[0] = 0$

$$\varphi[\tau] = \frac{3}{c_1^2}\,\tau^{1/3} - \frac{3\,c_2}{c_1^3}\,\tau^{2/3} + \frac{3\,(c_1^2\,c_2^2-3)}{c_1^6}\,\tau + \dots$$

Die eigentliche Bahnkurve $S \to S[\varphi]$ um das gravitierende Zentrum im expandierenden Raum in Polardarstellung lautet dann in erster Approximation

$$S[\varphi] = \frac{1}{3}\,c_1^3\,\varphi + \frac{2}{9}\,c_1^4\,c_2\,\varphi^2 + \frac{1}{18}\,c_1^3\,\left(5+2\,c_1^2\,c_2^2\right)\,\varphi^3 + \dots$$

Für $\tau \to \infty$ lässt sich für eine relaxierende Kreisbahn die semikonvergente partikuläre Reihenlösung

$$S[\tau] = 1 - \frac{2}{9\,\tau^2} + \frac{124}{81\,\tau^4} - \frac{24008}{729\,\tau^6} + \frac{9448496}{6561\,\tau^8} - \dots \qquad (3.119)$$

angeben. Mit numerischen Methoden lässt sich dann diese analytische Lösung in den Bereich $\tau \to 0$ fortsetzen, um sie mit den obigen Lösungen für $\tau \to 0$ und den entsprechenden Konstanten c_1, c_2 der singulären Anfangsbedingung stetig abzugleichen.

Der Vollständigkeit halber sei hier auch noch die asymptotische Polargleichung für $\varphi \to \infty$ in der Form

$$S[\varphi] = 1 - \frac{2}{9\,\varphi^2} + \frac{140}{81\,\varphi^4} - \frac{79400}{2187\,\varphi^6} + \dots \qquad (3.120)$$

angegeben. Die Energie des gebundenen Zweikörperproblems folgt aus

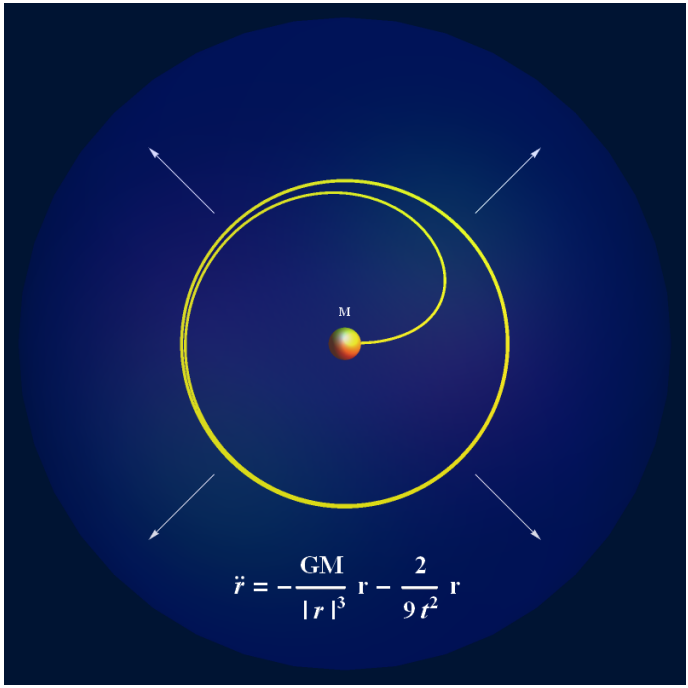


Fig. 3.4: *Die „explosive Bildung“ einer fiktiven kreisförmigen Zwerggalaxien - Bahn aus einem schnell rotierenden „schwarzen Mutterloch“ kurz nach dem „Urknall“ in der Zeiteinheit $\tau = G^2\,M^2/L^3\,t$. Der Skalenfaktor wächst hier gemäß $a \propto t^{2/3}$ an. Für die Integrationskonstanten gilt hier $c_1 \sim 2.00$ und $c_2 \sim -1.62$. Innerhalb von zwei Rotationsperioden ($\sim 10^8$ Jahren) erreicht das binäre Galaxien-System seinen endgültigen Bahnradius, obwohl der Skalenfaktor $a[t]$ der Raumzeitmutation immer weiter anwächst. Daher hat die Raumzeitexpansion heutzutage auf die Galaxiendynamik so gut wie keinen Einfluss mehr. Anomale Rotationskurven von Galaxien kann man mit einer „Raumzeitexpansion“ nicht erklären.*

der ersten geschleiften Klammer (3.111) zu

$$E = -\frac{G^2M^2}{2\,L^2}\left\{1 - \frac{2}{9\,\tau^2} + \frac{4}{81\,\tau^4} - \frac{56}{243\,\tau^6} + \ldots\right\} \qquad (3.121)$$

Die Energie ist zu Beginn singulär positiv, fällt dann aber schnell auf einen gebunden Zustand mit negativem Zahlenwert ab.

Man sieht in der Fig. (3.4), dass die Expansion zum Grenzradius äußerst schnell erfolgt und danach *keine Expansion des Bahnradius mehr erfolgt.* Quantitativ lässt sich das noch genauer abschätzen. Mit

$$\tau = \frac{(G\,M)^2}{L^3}\,t \equiv \omega_0\,t,$$

in der ω_0 die Umlauffrequenz eines Planeten um die Sonne bezeichnet, folgt für die Änderungsrate des Bahnradius pro Umlauf die Formel

$$\frac{\Delta r}{r} \approx \frac{1}{9\,\pi^2}\left(\frac{T_0}{T_A}\right)^3. \tag{3.122}$$

Mit $T_0 \sim \mathbf{1}$ Jahr und dem heutigen Alter des Universums von $T_A \sim \mathbf{10^{10}}$ Jahren folgt für die Erdbahn in einem expandierenden Raum mit $a \propto t^{2/3}$ eine gänzlich unmerkliche relative Abstandsvergrößerung von $\mathbf{10^{-32}}$ pro Umlauf. Auch bei Galaxien mit einer typischen Umlaufzeit der Sterne im Außenbereich von $T_0 \sim \mathbf{3} * \mathbf{10^8}$ Jahren folgt der immer noch kleine Betrag $\mathbf{10^{-7}}$. In den letzten 4 Milliarden Jahren hat sich der Skalenfaktor des Universums fast um den Faktor 2 vergrößert, doch die Planetenbahnen oder Sternbahnen nehmen an dieser „Raumzeitmutation“ so gut wie überhaupt nicht teil. Es wird damit das Bild bestätigt:

> *dass auch das von unserem Planetensystem besetzte Raumgebiet in den letzten Milliarden Jahren expandiert ist, also permanent Raumelemente aus der Sonne an den Rand des Systems fließen, ohne dass die Planetenbahnen selber in ihrer geometrischen Ausdehnung davon betroffen waren und sind.*

Die Ursache für dieses höchst seltsame Bild ist der Term $\ddot{a}/a$. Im Falle $\ddot{a} = 0$ ignoriert die Dynamik des Zweikörpersystems die expandierenden Raumzeitelemente vollständig. Dies war im Universum vor etwa 5 Milliarden Jahren der Fall, als die Expansion von einer *degressiven in eine progressive Phase* überging.

Seit 1998 wissen wir, dass das Universum beschleunigt expandiert. Im Falle w=-1 beschleunigt es asymptotisch exponentiell, im Falle w = -2/3 asymptotisch quadratisch mit der Zeit. Die wesentlichen Schlüsse ändern sich aber nicht - der Einfluss auf gebundene Systeme bleibt praktisch unmerklich.

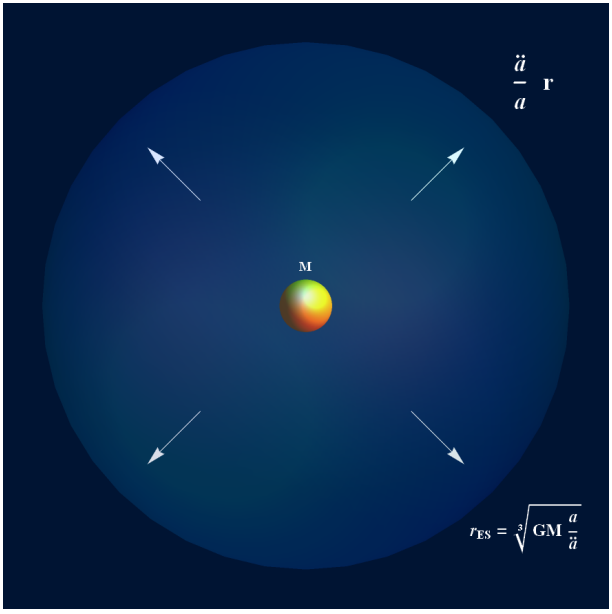


Fig. 3.5: *Die Raumzeitexpansion, beschrieben durch den zeitabhängigen Skalenfaktor $a[t]$, manifestiert sich dynamisch im Sonnensystem durch eine extrem kleine radiale Beschleunigung $\ddot{a}/a\,\mathbf{r}$, die linear vektoriell vom Bezugszentrum Sonne nach außen zunimmt. Diese Relativbeschleunigung ist anziehend, wenn $\ddot{a}$ negativ ist. Erst bei einer beschleunigten Raumexpansion mit $\ddot{a} > 0$ wird sie abstoßend. Nur dann existiert auch ein kritischer Radius r_{ES}, jenseits dessen keine gebundenen Bahnen mehr möglich sind. Die Raumzeit selber expandiert im gesamten Gebiet. Photonen erleiden so auch dann eine Rotverschiebung, wenn die Raumzeitexpansion auf die innere Dynamik einer Galaxie so gut wie keinen Einfluss hat.*

Aus den obigen Betrachtungen folgt auch, dass es die im Jahre 1945 von EINSTEIN - STRAUS betrachteten *„Vakuolen“* nur ein *künstliche Gedankengespinst* ist, da die Raumelemente auch innerhalb des Sonnensystems oder innerhalb einer Galaxie expandieren und nicht von der Eigengravitation der Systeme daran gehindert werden. Photonen erleiden so überall eine Rotverschiebung (Impulsverlust) gemäß der Raumexpansionsrate $\dot{a}/a$, auch wenn eine Galaxie an der Expansion nicht teilnimmt. Der damals mit Stetigkeitsbedingungen der Schwarzschildmetrik und der Robertson-Walker Metrik abgeleitete Radius dieser *Vakuolen* folgt sehr

einfach im Rahmen des Newtonschen Bildes aus der Forderung *gleicher Beschleunigungen*

$$\frac{G\,M}{r^2} = \pm\,\frac{\ddot{a}}{a}\,r. \tag{3.123}$$

Einstein hatte aber im Jahre 1945 kein *beschleunigt expandierendes Universum*im Sinn, bei dem der rechte Term positiv - also abstoßend - ist. In dem einfachsten *degressiv expandierenden Kosmosmodell* gilt für den Skalenfaktor a die Differentialgleichung

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\varrho_0}{3}. \tag{3.124}$$

Die Größe ϱ_0 entspricht hier der im Allgemeinen zeitlich abnehmenden mittleren Massendichte des Universums, welches hier als ein Kontinuum angenommen wird. Man sieht, dass $\ddot{a}$ negativ ist, also eigentlich eine anziehende Kraft darstellt. Setzen wir aber beide Kräfte betragsmäßig gleich, so ergibt sich für das kritische $r \equiv r_{ES}$ des stetigen Überganges das Ergebnis

$$r_{ES} = \sqrt[3]{\frac{3\,M}{4\,\pi\,\varrho_0}}. \tag{3.125}$$

Dies ist die aus Stetigkeitsbedingungen einer stationären und nichtstationären Metrik abgeleitete Formel von Einstein-Strauss aus dem Jahre 1945, die wir hier rein klassisch aus dem Newtonschen Bild eines euklidisch-expandierenden Koordinatensystems abgeleitet haben. Letztendlich hat dieser Radius aber *keine dynamische Bedeutung*, da die kosmologische Beschleunigung $\ddot{a}/a\,\mathbf{r}$ für eine Einstein-deSitter Universum $a \propto t^{2/3}$ anziehend ist. Erst für ein beschleunigt expandierendes Universum wird diese kosmologische „Raumkraft“ abstoßend und führt bei genügender Stärke zu Instabilitäten von gravitativ gebundenen Systemen.

Betrachten wir zum Abschluss noch zwei „masselose“ Testteilchen A und B. Ihre Bewegungsgleichung für den relativen Abstandsvektor $\mathbf{r}$ reduziert sich auf

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\ddot{a}}{a}\,\mathbf{r}. \tag{3.126}$$

In einem regressiv expandierenden frühen Kosmos mit $\ddot{a} < 0$ ist diese Bewegungsgleichung nichts anderes als eine Oszillatorgleichung, bei der die Eigenfrequenz mit dem Weltalter t abnimmt. Offensichtlich hängt

aufgrund des Terms $\ddot{a}/a$ die Trägheit und Bewegung eines Subsystems von der Dynamik weit entfernter Weltkörper - also dem ganzen Kosmos - ab. Die Gleichung drückt somit analytisch *den Widerstand eines Teilchens gegenüber Beschleunigung relativ zu allen anderen Massen im Weltall aus.* Es gilt nicht mehr das von NEWTON für den absoluten Raum postulierte

$$\ddot{\mathbf{r}} = 0. \qquad \text{(Newton 1684; 1713)} \tag{3.127}$$

Diese Ergebnisse erinnern an das Buch *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* von ERNST MACH (1838-1916). So schreibt er auf Seite 229 in der dritten Auflage seines Buches([120]):

> *...Bedenkt man, dass die in die Beschleunigung eingehende Zeit selbst nichts ist als die Maßzahl von Entfernungen (oder von Drehwinkeln) der Weltkörper, so sieht man, dass selbst in dem einfachsten Fall, in welchen man sich scheinbar nur mit der Wechselwirkung von zwei Massen befasst,* ***ein Absehen von der übrigen Welt nicht möglich ist...***

Hier drückt MACH genau das aus, was die Bewegungsgleichung („Geodätengleichung“) (3.126) ausdrückt. Die Dynamik des Skalenfaktors $a[t]$ wird von der Massenverteilung und auch Strukturierung des gesamten Universums bestimmt und hat somit direkten Einfluss auf die relative freie Bewegung $\mathbf{r} \to \mathbf{r}[t]$ eines einzelnen Teilchens in Bezug auf ein anderes freies Teilchens. In (3.126) manifestiert sich so *ein Mach'sches Prinzip*[16] Doch MACH hatte gegen Ende des 19ten Jahrhunderts nie an einen „expandierenden Raum“ gedacht, welcher den „absoluten Raum“ von NEWTON relativiert und somit abgelöst hätte. Selbst EINSTEIN, welcher 1918 den Begriff *Mach'sches Prinzip* formuliert hatte, dachte bei seiner Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht im Entferntesten an *„expandierende Räume“*. Erst der russische Mathematiker FRIEDMANN musste Ihn 1922 auf diesen Umstand aufmerksam machen, den dieser aber erst ab etwa 1930 akzeptierte.

Mit dem kosmologischen Standardmodell (*Einstein-deSitter*) $a \propto t^{2/3}$ im frühen *Materie-dominierten* Entwicklungsstadium gilt mit (3.126) für den Relativvektor $\mathbf{r}$ der beiden Teilchen die Differentialgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{2}{9\,t^2}\,\mathbf{r} = 0. \tag{3.128}$$

[16] Heutzutage kann man mehrere „Mach'sche Prinzipien“ postulieren. Ein weiteres wäre die Forderung eines „Null-Energie Universums“ mit einer exakt verschwindenden mittleren Raumkrümmung.

Wie man sieht, ist im Falle $a \propto t^{2/3}$ die *metrische Beschleunigung* der Raumexpansion *anziehend - nicht abstoßend!* - aber in zeitlicher Abnahme. Im Prinzip handelt es sich hier um eine Schwingungsgleichung mit einer Frequenz $\sqrt{2}/(3\,t)$, die umgekehrt mit der „*Weltzeit*“ t abfällt. Die allgemeine Lösung lautet mit den Vektorkonstanten $\mathbf{c}_1$ und $\mathbf{c}_2$, welche die Bahnebene aufspannen,

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}_1\, t^{1/3} + \mathbf{c}_2\, t^{2/3}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{3}\,\mathbf{c}_1\, t^{-2/3} + \frac{2}{3}\,\mathbf{c}_2\, t^{-1/3}, \qquad (3.129)$$

wobei t die Zeit seit der „Ur-Instabilität“ bezeichnet. Der zweite Term beschreibt in der Richtung $\mathbf{c}_2$ die normale expansive Auseinanderdrift der beiden Teilchen gemäß dem Skalenfaktor $a \propto t^{2/3}$ im Strom des expandierenden Raumes, während der erste Term proportional $t^{1/3}$ in der Richtung $\mathbf{c}_1$ die Abbremsung der überschüssigen Eigengeschwindigkeit gegenüber dem *Hubble-Lemaître Fluss* beschreibt[17]. Bei einer Abweichung vom allgemeinen „Raumfluss“ erfolgt aber wegen $t^{1/3}$ nie wieder ein vollständiger Angleich an die fließenden Raumelemente. Der Drehimpuls dieser Relativbewegung ergibt sich zu dem konstanten Wert

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{3}\,(\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2)\,. \qquad (3.130)$$

Im Allgemeinen ist die Bahn also eine leicht gekrümmte ebene Kurve, die asymptotisch in eine Gerade übergeht. Das“Mit-Fließen“ erfolgt aber nur aufgrund der zeitlichen Abnahme der anziehenden kosmischen Raumkraft. Doch schon diese Lösung zeigt *paradoxes Verhalten*, wenn man eine naive Vorstellung von einer freien Bewegung mit „Raumexpansion“ hat. Stellen wir uns zwei Teilchen der Marke 1 und 2 zum Zeitpunkt $t = t_0$ im Abstand $x[0] = x_0$ vor. Ihre gegenseitige Radialgeschwindigkeit $\dot{x}[t_0]$ zum Zeitpunkt $t = t_0$ soll Null sein. Mit diesen Anfangsbedingungen lautet die Lösung (3.129)

$$x[t] = x_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/3} \left(2 - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/3}\right). \qquad (3.131)$$

Entgegen der naiven Vorstellung eines „expandierenden Raumes“ wird die Distanz der beiden Teilchen nicht sofort größer, sondern nach dem “Loslassen” bewegen sie sich trotz fehlender Gravitation zunächst aufeinander

[17] Schon O. Heckmann hatte diese Bewegung in seinem Buch von 1941 diskutiert

zu, wechseln die Position und fangen erst dann an, sich dem allgemeinen *Hubble Fluss“* proportional $t^{2/3}$ anzugleichen. Dieser Angleich ist aber nie mehr vollkommen! Ein völlig *kontraintuitives* Resultat! Es war wohl der berühmte deutsch-amerikanische Astronom W. Baade (1893-1960), welcher die folgende anschauliche Metapher für den expandierenden Raum gegeben hat:

> *... “Stellen sie sich meinetwegen unter der Expansion des Weltraums das Aufgehen eines Kuchen vor, der mit Rosinen gepickt ist! Jede Rosine bedeutet eine Milchstrasse (Galaxie), und es dehnen sich nicht die Rosinen, sondern es dehnt sich der Kuchenteig zwischen ihnen aus; es vergrößern sich also nicht die Entfernungen innerhalb der Milchstraßen, sondern nur der Raum zwischen ihnen erweitert sich” .*

Ihre präzise mathematisch physikalische Form bekommt diese anschauliche Schilderung durch die Bewegungsgleichung (3.108), nach der gebundene Zustände in ihrem Bahnverlauf so gut wie nicht durch eine Raumexpansion gestört werden.

3.13 Dunkelmaterie sind Populationen schwarzer Löcher?

Heutzutage ist allgemein bekannt, dass in Zentren aller Galaxien und auch Zwerggalaxien sogenannte *Schwarze Löcher (black holes)* existieren, die früher auch als „vollständig gravitativ kollabierte Objekte“ bezeichnet wurden. Man muss sogar davon ausgehen, dass im sehr frühen Kosmos diese Schwarzen Löcher schon existierten und erst dann sich die eigentlichen Galaxien um diese gebildet haben.

Ausgehend von den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnittes wollen wir jetzt die vergangene Geschichte eines binären Massensystems untersuchen, welches sich im heutigen Universum in einer stabilen Kreisbahn bewegt. Die Grundgleichung für die relative Bahnentwicklung des Richtungsvektors lautet wieder (3.108)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G\,M\,\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{\ddot{a}}{a}\,\mathbf{r}. \tag{3.132}$$

Wir wollen hier das einfachste *Einstein - deSitter* Kosmosmodell mit $a \propto t^{2/3}$ annehmen. Dann gilt

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G\,M\,\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{2}{9\,t^2}\,\mathbf{r}. \tag{3.133}$$

Hier bedeutet M die Gesamtmasse $M = M_1 + M_2$ des binären Systems. Mit dem für $t \to \infty$ erreichten asymptotischen Kreisbahnradius $r \to R$ führen wir die dimensionslose Zeit

$$\tau = \sqrt{\frac{G\,M}{R}}\,t \tag{3.134}$$

ein. Mit der neuen Skalierung

$$\hat{\mathbf{r}} \to R\,\mathbf{r}$$

gilt

$$\hat{\mathbf{r}}'' = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\hat{\mathbf{r}}|^3} - \frac{2}{9\,\tau^2}\,\hat{\mathbf{r}}, \tag{3.135}$$

wobei nun Striche Ableitungen nach τ bedeuten. Für die asymptotische Umlaufzeit gilt

$$T_U = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{R^3}{G\,M}}. \tag{3.136}$$

3.14 Globale Energieerhaltung im Universum?

Die wichtigste Regel in der Physik lautet: *Da die physikalischen Elementarprozesse weder zwischen verschiedenen Zeitpunkten noch zwischen den beiden Zeitrichtungen unterscheiden, gilt Energieerhaltung.* In der Novemberausgabe der Zeitschrift *Spektrum der Wissenschaft* aus dem Jahre 2010 provoziert aber die Autorin T.M. Davis unter dem Leitartikel *„Verliert das Universum Energie?“* die Frage:

> *„Fast alle Informationen über den fernen Weltraum gewinnen wir in Form von Licht, das auf seinem langen Weg von fernen Galaxien durch das expandierende Universum eine Rotverschiebung erfährt; die elektromagnetischen Wellen werden gemäß Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie gestreckt. Doch wir wissen: Je größer die Wellenlänge, desto kleiner*

die Energie. Das wirft die Frage auf, wohin die Energie verschwindet, wenn das Licht durch die kosmische Expansion röter wird. Geht sie verloren - und verletzt damit das Energieerhaltungsprinzip?“[18]

Die Autorin versucht eine Erklärung dieser scheinbaren „Energievernichtung“ mit Hilfe der „Analogie“ zwischen dem relativistischen Dopplereffekt und der kosmologischen Rotverschiebung, bei der ja auch keine Energie „verloren“ geht. Doch dieser Vergleich ist wenig hilfreich, denn hier wird die *kosmologische Rotverschiebung* mit dem reinen kinetischen *Dopplereffekt* des Lichtes aus der speziellen Relativitätstheorie unzulässig miteinander vermengt.

Im Bild der *Newtonschen Gravitation* gilt streng bei Bewegungsvorgängen von Massenteilchen untereinander die *Energieerhaltung*. Dabei ist die Gravitationsenergie stets *negativ definiert*. Im Bild der *Einsteinschen Gravitation* wird es komplizierter. Hier hat auch der Raum physikalische Eigenschaften und man muss ihm - besonders bei metrischer Krümmung oder Expansion - eine innere Energie zubilligen. In einem topologisch abgeschlossenen endlichen Universum muss somit auch die globale Gesamtenergie eine *Erhaltungsgröße* sein.

Zum Abschluss können wir uns jetzt die wesentlich fundamentalere Frage als die von T.M. Davis stellen: Wohin geht all die kinetische Energie, welche *alle massebehafteten Teilchen im expandierenden Raum durch die Streckung ihrer De-Broglie Wellenlänge verlieren*? Für Photonen scheint die Antwort einfach zu sein. Photonen stellen ein „Photonengas“ mit dem EoS - Parameter $w = 1/3$ dar. Da hier $w > -1/3$ ist, müssen die Photonen (das Photonengas) die Expansion zusätzlich „abbremsen“. Die Energiedichte fällt dabei mit Skalierung a^{-4} ab. Wirklich relevant war dieser Energieumwandlungsprozess wohl nur in der *Strahlungs - dominierten Ära* des sehr frühen Universums.

Schwieriger ist die Antwort bei gravitierenden Teilchen mit Ruhemasse ungleich Null. Diese Teilchen können wesentlich stärker als Photonen gravitativ miteinander wechselwirken. Das Modell des Ringkosmos hat gezeigt, *dass ihr Energieverlust und Impulsverlust direkt in die beschleunigte Raumdehnung der Ringperipherie transformiert wird* (Rückkopplung zwischen Strukturbildung und Expansion). Das aber würde bei einem

[18] Der Originalartikel erschien in „Scientific American“ July 2010 unter dem Titel: *Is the Universe Leaking Energy?*

„Newton'sches Gas" aus gravitativ wechselwirkenden Teilchen einen EoS - Parameter von $w = -2/3$ bedeuten. Im übernächsten Kapitel soll dieses Problem genauer betrachtet werden.

Die Autorin T.M. Davis behauptete im Jahre 2010, *dass mit Mitteln der Allgemeinen Relativitätstheorie der Energieerhaltungssatz auf das Universum als Ganzes nicht angewendet werden kann! Die Gesamtenergie des Weltalls bleibt ihrer Meinung nach demnach weder erhalten noch geht sie verloren - sie ist nicht definierbar.* Doch schon jetzt ist klargeworden, dass mit dieser falschen Prämisse eine Erklärung für die beschleunigte Expansion des Universums vollständig unmöglich wird. Schon im „toy-model" eines Ringkosmos war die Gültigkeit einer globalen Energieerhaltung absolut notwendig, um die Tendenzen einer beschleunigten Expansion auf einer vernünftigen physikalischen Basis - nämlich der Paarfusion - zu erklären. Die Deutung der kosmischen Rotverschiebung als „*modifizierten Dopplereffekt*, welche die Energieproblematik außen vor lässt, könnte so ein völlig irreführendes Aperçu darstellen.

4 Die Zustandsgleichung des Universums auf dem Prüfstand

Die Botschaft hör ich wohl, allein, mir fehlt der Glaube. Das Wunder ist des Glaubens liebstes Kind.

Faust I, Verse 765-766 J.W. v. Goethe

Schon beim Modell des expandierenden Ringes haben wir eine einfache quadratische Gleichung für den w - Parameter eines gravitativen Punktmassensystems in einem ringförmig expandierenden 1D - Raum abgeleitet. Die gleiche analytische Rechnung soll nun für den 3D - Gitterraum mit einer allgemeinen Potentialfunktion $\mathbf{V}[\psi]$ gemacht werden. Die Hoffnung besteht darin, dass die oben entwickelte Theorie den Wert $w = -1$ liefert und somit eine Erklärung für die kosmologische Konstante Λ von Einstein liefert. Doch genau das sagt die Theorie nicht, wie der folgende Abschnitt zeigt.

4.1 Der w – Parameter und die Jeansgleichung

Um die wichtige Zustandsgleichung w des „Gitterkosmos“ zu berechnen, benötigt man in erster Näherung den zeitlichen Verlauf des Gitterabstandes oder des Skalenfaktors a. Im Falle des Null-Energie Universums $\epsilon_0 = 0$ folgt dies aus der Gleichung (3.20) mit „eingefrorenen“ Teilchen an den Gitterplätzen

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G m}{3a}. \tag{4.1}$$

Es ergibt sich als Lösung ähnlich wie im Ringmodell

$$a = \left(6\pi\, G\, m\, t^2\right)^{1/3} \tag{4.2}$$

Diesen Ausdruck setzen wir nun in die ausdifferenzierte *Layzer - Irvine* Gleichung (3.59) ein. Für das Potential $\mathbf{V}[\psi]$ setzen wir ganz allgemein ein Oszillatorpotential der Form

$$\mathbf{V}[\psi] = \frac{1}{2}\,\mathbf{V}''[0]\,\psi^2 + \dots \tag{4.3}$$

an. Bei einem Dichtemodell mit kontinuierlichen Fluktuationen gilt in *Newton'scher Gravitation* streng $\mathbf{V}''[0] = 3$. Wir lassen diese Konstante hier aber zunächst offen und es gilt

$$\mathbf{V}'[\psi] = \mathbf{V}''[0]\,\psi + \dots \tag{4.4}$$

Damit ergibt sich in linearer Näherung in ψ

$$t^2\,\ddot{\psi} + \frac{4}{3}\,t\,\dot{\psi} = \frac{2}{9}\,\mathbf{V}''[0]\,\psi. \tag{4.5}$$

Wir machen den Lösungsansatz

$$\psi \propto t^{\alpha}, \tag{4.6}$$

wo α wie im Ringkosmos eine zunächst unbekannte reelle oder komplexe Zahl darstellt. Einsetzen in (4.5) führt auf die quadratische Gleichung

$$\alpha^2 + \frac{1}{3}\,\alpha = \frac{2}{9}\,\mathbf{V}''[0]. \tag{4.7}$$

Die beiden Lösungen lauten

$$\begin{aligned} \alpha_+ &= \frac{1}{6}\left(-1 + \sqrt{1 + 8\,\mathbf{V}''[0]}\right), \\ \alpha_- &= \frac{1}{6}\left(-1 - \sqrt{1 + 8\,\mathbf{V}''[0]}\right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Die beiden Lösungen beschreiben zwei unterschiedliche expandierende Universen.

- Die Wurzel α_+ beschreibt ein expandierendes Universum, bei dem die Dichtestrukturen immer *heterogener* werden (**„big bang“** Universum).
- Die Wurzel α_- beschreibt ein expandierendes Universum, in welchem die Dichtestrukturen mit der Zeit völlig *homogen* werden (**„big bounce“** Universum).

Für uns ist hier zunächst nur die Wurzel α_+ physikalisch interessant, da sie in Richtung des „Zeitpfeils“ **anwachsenden Verdichtungen** beschreibt, wie sie im realen Universum beobachtet werden. Für den wichtigen **w** Parameter gilt in der „quadratischen“ Näherung des gravitativen Wechselwirkungspotentials

$$w = \frac{\dot{\psi}^2}{3\,\dot{\psi}^2 - \dfrac{4\pi G m}{a^3}\,\mathbf{V}''[0]\,\psi^2} \tag{4.9}$$

Einsetzen der obigen Lösungen für ψ und a liefert das aus dem Ringmodell bekannte Ergebnis

$$w_\pm = -\alpha_\pm. \tag{4.10}$$

Für die „Oktettkollsion“ oder allgemeiner die „ψ - Strukturdynamik“ in einem *expandierenden Kosmos mit steigender Heterogenität* ergibt sich so *für schwache Dichtefluktuationen* die Zustandsgleichung

$$\boxed{w = \frac{1}{6}\left(1 - \sqrt{1 + 8\,\mathbf{V}''[0]}\right).} \tag{4.11}$$

Der **w** – Parameter hängt also in dieser linearen „Störungstheorie“ nur von dem reinen Zahlenwert $\mathbf{V}''[0]$ ab. Die zweite Ableitung der skalaren Potentialfunktion $\mathbf{V}[\psi]$ bestimmt ausschließlich die Zustandsgleichung des „kosmischen Gases“ von gravitativ wechselwirkenden Massenpunkten! Daher ist (4.11) die Schlüsselbeziehung, um aus einem bekannten **w** den momentan wahrscheinlichsten Wert für $\mathbf{V}''[0]$ abzuleiten.

Im folgenden Abschnitt soll die wichtige Frage diskutiert werden, ob in den Raumdimensionen von Galaxien und Galaxienhaufen (Superhaufen) die *Newton'sche Gravitation* überhaupt noch erfüllt ist, weil nach Messungen der beschleunigten Expansion des Universums der EoS – Parameter bei $w \approx -1$ liegen muss, was mit dem Wert $w = -2/3$ für schwache Dichtefluktuationen *nicht übereinstimmt.*

4.2 Strukturwachstum durch die Jeansgleichung?

Neuste Beobachtungen des Mikrowellenhintergrundes und der Supernovae vom Typ Ia zeigen relativ eindeutig, dass der heutige **w** – Parameter

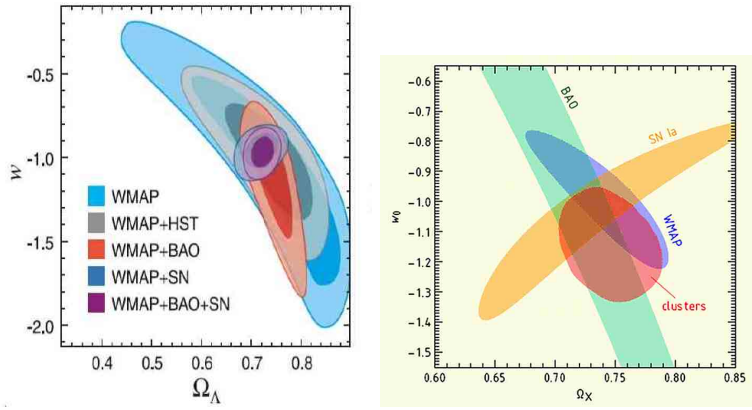


Fig. 4.1: *Die Zustandsgleichung* $\boldsymbol{w}$ *und der Parameter der kosmologischen Konstanten* Ω_Λ *oder* Ω_x *aus den letzten kombinierten Daten verschiedener Forschungsmissionen (WMAP5, SN, BAO,...). Die Daten aus 5 Jahren (Jahr 2009) bekräftigen die Existenz einer „kosmologischen Konstanten" mit dem* ***EoS*** *Parameter* $\boldsymbol{w} \approx$ *-1 oder genauer* $\boldsymbol{w} \leq$ *-1.*

recht genau bei

$$w \approx -\mathbf{1.0} \pm \mathbf{0.1} \tag{4.12}$$

liegen muss. Die Unsicherheiten kann man gut in der Graphik (4.1) erkennen. Mit Hilfe der Schlüsselbeziehung (4.11)

$$w = \frac{1}{6}\left(1 - \sqrt{1 + 8\,\mathbf{V}''[0]}\right) \tag{4.13}$$

folgt aber durch Umkehrung

$$\boxed{\mathbf{V}''[0] = \frac{9}{2}\,w\,\left(w - \frac{1}{3}\right).} \tag{4.14}$$

Daraus schließen wir dann aber mit dem beobachteten Wert $w = -1$ zwingend auf

$$\boxed{\mathbf{V}''[0] = 6.} \tag{4.15}$$

Diese Schlussweise gilt natürlich nur dann, wenn die heutigen Dichtestörungen durch eine linearisierte Theorie beschrieben werden können

und der w – Parameter in der kosmologischen Evolution konstant bleibt. Der abgeleitete Wert ist in jedem Fall doppelt so groß wie nach der Newton'schen Theorie erlaubt! Denn mit der Poissongleichung der Newton'schen Theorie, der Kontinuitätsgleichung und der hydrodynamischen Bewegungsgleichung gehorchen die komplexen Amplituden $c(\mathbf{k}, t)$ von Dichtestörungen in einem unendlich ausgedehnten expandierenden Medium im klassischen nicht-relativistischen Grenzfall (*Jeansgleichung*)

$$\ddot{C}[\mathbf{k}, t] + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{C}[\mathbf{k}, t] = \frac{4\pi G m}{a^3}\, C[\mathbf{k}, t] \tag{4.16}$$

Diese Gleichung ergibt sich aber nur aus unserer allgemeinen Gleichung

$$\ddot{C}[\mathbf{k}, t] + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{C}[\mathbf{k}, t] = \frac{4\pi G m}{3\, a^3}\, \mathbf{V}''[0]\, C[\mathbf{k}, t], \tag{4.17}$$

wenn

$$\mathbf{V}''[0] = 3 \qquad (Newton'sche\ Gravitation!) \tag{4.18}$$

ist. *Ein Faktor 2 zwischen der Beobachtung $w \sim -1$ und der Newton'schen Theorie kleiner Dichtefluktuationen!* Die Rolle des Ordnungsparameters ψ übernimmt im hydrodynamischen Dichtemodell die Wachstumsfunktion oder Dichtekontrastfunktion $D \propto \psi$, definiert durch

$$C[\mathbf{k}, t] \propto D[t]\, F[\mathbf{k}]. \tag{4.19}$$

wo $F[\mathbf{k}]$ das räumliche Fourierspektrum der vorgegebenen Dichtefluktuationen ist. Allerdings könnte der fehlende Faktor 2 durch eine relativistische Störungstheorie in einem sehr heißen Medium erklärt werden. So leitet S. Weinberg in seinem Buch *Gravitation and Cosmology*([211])[1] für kleine Dichtestörungen nach der Relativitätstheorie die modifizierte Jeansgleichung

$$\ddot{C}[\mathbf{k}, t] + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{C}[\mathbf{k}, t] = 4\pi G\left(\frac{m}{a^3} + \frac{p}{c^2}\right)\left(1 + 3\,\frac{c_s^2}{c^2}\right)\, C[\mathbf{k}, t] \tag{4.20}$$

ab, in der c_s die Schallgeschwindigkeit und c die Lichtgeschwindigkeit im ungestörten Medium bezeichnen. Im relativistisch - hydrodynamischen Grenzfall $c_s \to c/\sqrt{3}$ nimmt der Korrekturfaktor tatsächlich den

[1] auf Seite 588, Gleichung 15.10.57

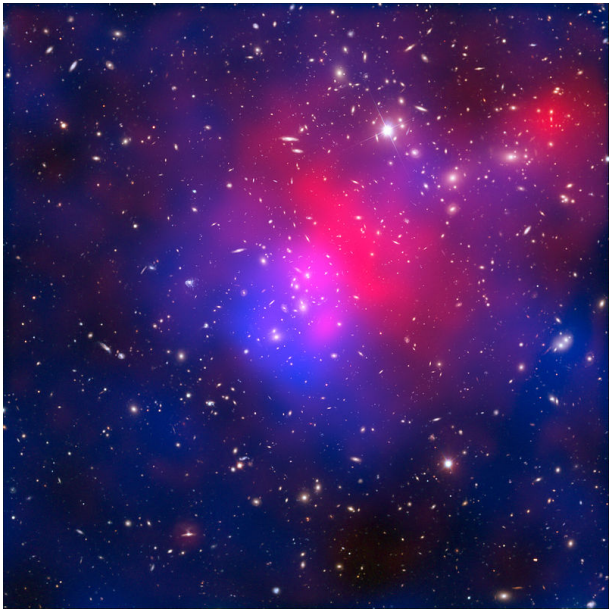


Fig. 4.2: *Durch die Kollision von vier Galaxienhaufen ist hier ein Superhaufen namens Abell 2744 (Pandora's Cluster) entstanden. Die heißen intergalaktischen ionisierten Gase (Plasmen) sind hier rosa gefärbt und bleiben bei der Kollision zurück. Die „Dunkle Materie", die angeblich 75% der Masse des Superhaufens ausmacht, ist hier blau markiert und bleibt unbeeinflusst. Es ist zudem bis heute eine offene Frage, ob die Dynamik und Entwicklung dieser Gebilde durch „dunkle Materie" oder einzig durch eine „anomale Newton'sche Gravitation" erklärt werden kann. (Quelle: NASA/ Chandra X-ray Observatory)*

doppelten Wert an. Doch nach der Phase der Rekombination ist es unwahrscheinlich, dass sich die Strukturbildung gemäß der Gleichung (4.20) entwickelt, da alle physikalischen Parameter nicht - relativistische Werte angenommen haben. Die gravitative Dynamik der Strukturbildung im Universum müsste sich also in guter Näherung wie in einem selbstgravitierenden *Newton'schen* Kontinuum abspielen. Damit ergäbe sich aber mit $\mathbf{V}''[0] = 3$ der w Parameter zu

$$\boxed{w = -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}, \qquad (Newton'sches\ Teilchen - Gas)} \tag{4.21}$$

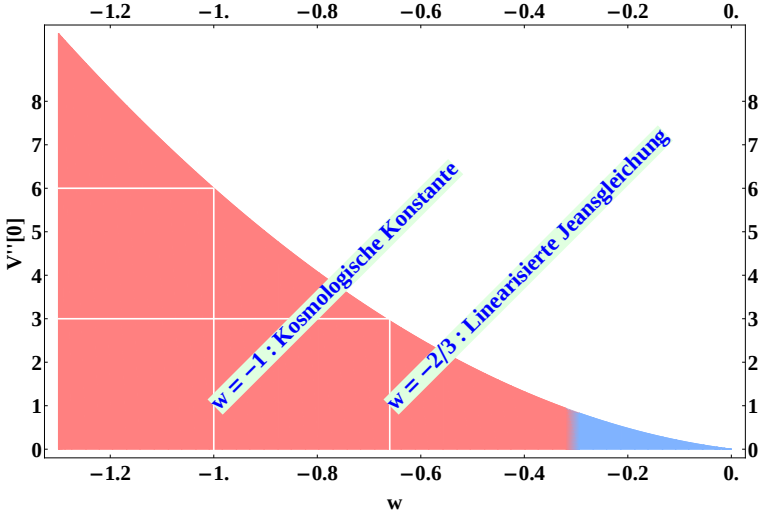


Fig. 4.3: *Der EoS – Parameter w in Abhängigkeit von der zweiten Ableitung der Potentialfunktion $\mathbf{V}''[\psi]$ nach dem Ordnungsparameter ψ um $\psi = 0$. Rote Bereiche kennzeichnen Gebiete mit $w < -1/3$, für blaue Bereiche gilt $w > -1/3$, wo keine beschleunigte Expansion mehr stattfindet. Gilt für die Strukturbildung von Galaxienhaufen im expandierenden Universum die klassische Jeansgleichung, so wäre $\mathbf{V}''[0]$ sehr nahe 3 und $w = -2/3$. Wenn aber im Universum streng $w \approx -1$ gilt („Kosmologische Konstante"), müssen – bei Gültigkeit der hier diskutierten Theorie mit der Lagrangedichte (3.19)– entweder im Reich von Galaxien und Galaxienhaufen anomale Newton'sche Felder mit $\mathbf{V}''[0] = 6$ maßgebend sein, oder aber der w-Parameter ist über kosmologische Zeitskalen nicht konstant und wird durch nichtlineare Strukturbildung immer negativer!*

Dies führt zwar wegen $w < \mathbf{-1/3}$ zu einer beschleunigten Expansion der „Raumzeit", aber der quantitative Wert, abgeleitet aus einer linearisierten Störungstheorie, stimmt nicht exakt mit dem aus gegenwärtigen Beobachtungen abgeleiteten Wert von etwa $w \approx \mathbf{-1}$ (*kosmologische Konstante!*) überein. Wenn der momentan (2010) beobachtete Wert der Zustandsgleichung $\mathbf{w} \approx -1$ korrekt wäre, müsste man $\mathbf{V}''[0] = 6$ annehmen. Hier liegt jetzt eine gravierende Diskrepanz zwischen der Beobachtung und der Theorie vor [2]

[2] Es ist hier vielleicht nicht unwichtig zu betonen, dass die sogenannte MOND – Theorie (**Mo**dified **N**ewtonian **D**ynamics) von Mordehai Milgrom den Wert von

Ein weiterer physikalisch unangenehmer Effekt kommt mit der Beobachtungstatsache $\mathbf{w} \approx -1$ hinzu. Da nun $\alpha = +1$ folgt, gilt für die zeitliche Entwicklung der Lagrange'schen Koordinate oder Strukturfunktion ψ

$$\frac{d\psi}{dt} = konstant! \tag{4.22}$$

Wenn also in etwa $\mathbf{w} \approx -1$ wäre, nimmt die Skalarfunktion ψ der Dichtestörung (!) linear mit der kosmischen Zeit zu. Das steht natürlich im Gegensatz zur normalen *Newton'schen Störungstheorie*, bei der im Laufe der Entwicklung das Wachstum $\psi \propto t^{2/3}$ stattfindet.

Eine weitere Folgerung der Annahme $w \approx -1$ ist, dass die durch die Strukturbildung den FLRW – Gleichungen aufgeprägte negative Druckspannung

$$8\pi\, G\, p_\psi = -\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \tag{4.23}$$

über kosmische Zeiten ebenfalls *konstant ist*; zumindest wenn w exakt gleich -1 ist. Ein Vergleich mit dem Modell der kosmologischen Konstanten ergibt somit wegen $8\pi\, G\pi\, p_\Lambda = -\Lambda$ die Identität

$$\boxed{\Lambda = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \equiv\ konstant.} \tag{4.24}$$

Die physikalische Bedeutung der EINSTEINschen kosmologischen Konstante wäre hier also das Quadrat der zeitlichen Änderung des skalaren Ordnungsparameters (*Dichtekontrastfunktion*) ψ, welche für $w = -1$ einfach konstant bleibt. Damit gilt auch

$$\psi = \sqrt{\Lambda}\, t. \tag{4.25}$$

Wir werden mit diesen überraschenden Ergebnissen vor zwei *Alternativen* gestellt:

- Wenn der heutzutage beobachtete Wert von $w \approx -1$ zu allen Zeiten gültig war , so muss nach unserer Theorie für die Potentialfunktion

$\mathbf{V}''[0] = 6$ auch nicht erklären könnte. Diese Theorie ist sehr erfolgreich bei der Beschreibung der Rotationskurven von Galaxien, aber auf größeren Skalen ist sie unzureichend und ihre mathematische Schönheit lässt gegenüber der Einstein'schen Theorie sehr zu wünschen übrig.

$\mathbf{V}[\psi]$ die Eigenschaft $\mathbf{V}''[0] = 6$ gelten. Da *nach der Rekombinationsphase* $c_s \ll c$ gilt, kann diese Erhöhung um den Faktor 2 nicht mit der relativistischen Gleichung (4.20) erklärt werden. Wir stehen so vor einem scheinbaren Paradoxon.

- Wenn wir die Gültigkeit der klassischen Jeansgleichung (4.16) für kleine Dichtefluktuationen annehmen, muss kurz nach der Rekombination im expandierenden Universum der Wert $w_0 = \mathbf{-2/3}$ gültig gewesen sein[3]. Der heutige Wert von ungefähr $w \leq -1$ ist entweder durch systematische Effekte verfälscht und in Wirklichkeit $w \approx -2/3$ oder es hat eine nichtlineare Entwicklung des w Parameters und der zugehörigen Potentialfunktion $\mathbf{V}[\psi]$ im Kosmos stattgefunden. Dies wäre gleichbedeutend damit, dass die „Dunkle Energie“ – denn nichts anderes beschreibt die Funktion $\mathbf{V}[\psi]$ – nichtlinear stärker mit ψ zunimmt, als es eine kosmologische Konstante mit $w = -1 \equiv konstant$ beschreiben kann.

Im Folgenden wollen wir das Strukturwachstum im Standardmodell der Kosmologie in seiner linearen Form diskutieren.

4.3 Die Zustandsgleichung w[a]

Wir haben bis jetzt eine Theorie erster Ordnung für den zeitlichen Verlauf der Größen a, ψ und der Zustandsgleichung w Kosmos entwickelt. Es zeigte sich, dass nur dann $w = -1$ erklärt werden kann, wenn beim zeitlichen Beginn der Skalenfaktor $a \propto t^{2/3}$ ist und die Potentialfunktion $\mathbf{V}[\psi]$ im quadratischen Term mit dem Faktor 3

$$\mathbf{V}[\psi] = 3\,\psi^2 + o|\psi^4|\,\{w = -1\}$$

beginnt. Dichtekontraste wachsen dann - völlig unphysikalisch - proportional der Zeit an. Es ist klar, dass dies der *Jeansgleichung* für kleine Dichtefluktuationen in einem expandierenden Medium widerspricht, bei denen $w = -2/3$ sein muss. Doch dieses *Paradoxon* lassen wir zunächst beiseite und betrachten die obige Lösung in der weiteren zeitlichen Entwicklung, wenn Terme höherer Ordnung in der Potentialentwicklung ins

[3] $w_0 \equiv w_{EDE}$ bedeutet hier den w-Parameter im frühen Universum (*EDE = early dark energy*

Spiel kommen. Beim „Arbeitsmodell“ des Ringkosmos wurde der q -Parameter sogar für $\xi = 1/2$ (Paarkollision) negativ singulär!

Im Folgenden sollen daher Bedingungen für das Potential $\boldsymbol{V}[\psi]$ diskutiert werden, in denen für alle Zeiten $w \equiv \mathit{konstant}$ gilt. Die dazugehörige Skalarfunktion $\mathbf{V}[\psi]$ soll also durch ihre Dynamik die Zustandsgleichung w zeitinvariant machen. Ob diese Bedingung in der Natur verwirklicht ist, kann nur die Empirie entscheiden. Beim Blick auf den Ringkosmos erscheint die Annahme $w = \mathit{konstant}$ sicherlich unwahrscheinlich.

Ausgangspunkt ist wieder die ganz allgemeine Lagrangedichte (siehe (3.19))

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{a}^2 + \frac{4\pi G m}{3\,a} + \frac{1}{2}\,a^2\,\dot{\psi}^2 + \frac{4\pi G m}{3\,a}\,\mathbf{V}[\psi], \tag{4.26}$$

Aus der Lagrangedichte folgt für die Beschleunigungsfunktion

$$-\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G m}{3a^3} + \frac{4\pi G m}{3\,a^3}\,\mathbf{V}[\psi] - \dot{\psi}^2 \tag{4.27}$$

und für *Hubble-Lemaître Funktion* im „euklidischen“ Grenzfall $\mathcal{K} = \epsilon_0 = 0$ („Null-Energie Universum“)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G m}{3a^3} - \left\{\dot{\psi}^2 - \frac{8\pi G m}{3\,a^3}\,\mathbf{V}[\psi]\right\} \tag{4.28}$$

Für die Dichte und den Druck der durch Strukturbildung bedingten „Dunklen Energie“ gilt *in hydrodynamischer Interpretation*

$$\begin{aligned} 8\pi\,G\,\varrho_\epsilon &= -3\,\left(\dot{\psi}^2 - \frac{8\pi G m}{3\,a^3}\,\mathbf{V}[\psi]\right) \\ 8\pi\,G\,p_\epsilon &= -\dot{\psi}^2. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Für die kosmologische „Konstante“ Λ folgt schließlich

$$\Lambda = \dot{\psi}^2. \tag{4.30}$$

Hier muss betont werden, dass aus $w = \mathit{konstant}$ keineswegs $\Lambda = \mathit{konstant}$ folgt. Wir gehen nun zu (3.30) zurück und lösen diese Relation nach $\dot{\psi}^2$ auf. Man erhält allgemein

$$\boxed{\dot{\psi}^2 = \frac{3w}{3w-1}\,\frac{8\pi\,G\,m}{3\,a^3}\,\mathbf{V}[\psi].} \tag{4.31}$$

Setzen wir (4.31) in (4.28) und (4.27) ein, folgt sofort

$$-\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G m}{3a^3} - \left(\frac{3w+1}{3w-1}\right)\frac{4\pi\, G m}{3\, a^3}\,\mathbf{V}[\psi]. \tag{4.32}$$

und

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G m}{3a^3} + \frac{1}{1-3w}\,\frac{8\pi\, G m}{3\, a^3}\,\mathbf{V}[\psi]. \tag{4.33}$$

Hier zeigt sich nun deutlich, dass es anstatt der dimensionslosen skalaren Funktion $\mathbf{V}[\psi]$ günstiger ist, die Funktion $\mathbf{V}[a]$ in Betracht zu ziehen. Dies wird noch deutlicher, wenn wir (4.31) in die w - Gleichung (3.82) einsetzen. Das Differential dt kann durch das Differential da ersetzt werden und man erhält zunächst

$$w[a] = -1 - \frac{1}{3}\,a\,\frac{d}{da}\ln\left[\frac{\boldsymbol{V}[a]}{(3\,w[a]-1)\,a^3}\right]. \tag{4.34}$$

Nach Reduktion ergibt sich für $w[a]$ eine spezielle *Riccatische* Differentialgleichung[4]

$$\boxed{\frac{dw}{da} + \left(\frac{1}{3} - w\right)\left(3\,\frac{w}{a} + \frac{\mathbf{V}'[a]}{\mathbf{V}[a]}\right) = 0.} \tag{4.35}$$

Eine enge Analogie zu der entsprechenden Formel (2.155) für $w[\xi]$ im Ringkosmos ist zu sehen. Es ist klar, dass die dimensionslosen Funktionen $\mathbf{V}[\psi]$ und $\mathbf{V}[a]$ in ihrer Form unterschiedlichen analytischen Verlauf haben, obwohl sie physikalisch die gleiche „Gravitationsenergie“ („Dunkle Energie“) beschreiben. Möglich ist dieser Übergang nur, wenn a und ψ umkehrbar eindeutige Funktionen sind.

Die obige Differentialgleichung (4.35) besitzt die partikuläre Lösung

$$w = \frac{1}{3}; \qquad w'[a] = 0. \tag{4.36}$$

Dieser Zustand entspräche im Universum einem *Photonengas*. Mit Hilfe dieser partikulären Lösung substituieren wir in (4.35)

$$w[a] = \frac{1}{3}\,(1 + f[a]) \tag{4.37}$$

[4] Jacopo Riccati (1676-1754) Stammte aus reichem venezianischem Adel, studierte in Padua Jura und fand Lösungsmethoden für bestimmte nichtlineare Differentialgleichungen.

und erhalten für $f[a]$ die *Bernoullische* Differentialgleichung

$$f'[a] = \left(\frac{1 + f[a]}{a} + \frac{\mathbf{V}'[a]}{\mathbf{V}[a]} \right) f[a]. \tag{4.38}$$

Mit Ihrer Lösung ergibt sich schließlich die allgemeine Lösung von (4.35) zu

$$w[a] = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{a\, \mathbf{V}[a]}{\int_0^a \mathbf{V}[a']\, da'} \right). \tag{4.39}$$

oder nach Substitution

$$\boxed{w[a] = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\mathbf{V}[a]}{\int_0^1 \mathbf{V}[a\, u]\, du} \right).} \tag{4.40}$$

Man erkennt hier sofort die enge Analogie zu der entsprechenden Formel (2.155) für $w[\xi]$ im Ringkosmos. Eine weitere spezielle Lösung mit $w =$ *konstant* ergibt sich aus der Fundamentalgleichung (4.35) zu

$$w = -\frac{a}{3} \frac{\mathbf{V}'[a]}{\mathbf{V}[a]} \equiv -\frac{1}{3} \frac{d \ln[\mathbf{V}[a]]}{d \ln[a]}. \tag{4.41}$$

Die erlaubte Klasse der $\mathbf{V}[a]$ Funktionen für konstantes w lautet dann

$$\boxed{\mathbf{V}[a] \propto a^{-3\,w}.} \tag{4.42}$$

Der w Parameter ist also dann konstant, wenn die Potentialfunktion $\mathbf{V}[a]$ eine reine Potenz von a ist, multipliziert mit einer willkürlichen Konstanten.

Setzen wir nun (4.42) in (4.31) und (4.28) ein, so folgt für den zeitlichen Verlauf von a im Falle $w =$ *konstant* (Index „0“ bedeutet zum heutigen Zeitpunkt)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G m}{3 a_0^3} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \frac{1}{1 - 3\,w} \frac{8\pi\, G m}{3\, a_0^3} \mathbf{V}[a_0] \left(\frac{a_0}{a} \right)^{3\,(w+1)}. \tag{4.43}$$

Daraus folgt für den Hubble - Parameter zum Zeitpunkt $t = T$

$$H_0^2 = \frac{8\pi G m}{3 a_0^3} + \frac{1}{1 - 3\,w} \frac{8\pi\, G m}{3\, a_0^3} \mathbf{V}[a_0]. \tag{4.44}$$

und damit die wichtige Relation

$$\frac{1}{1-3\,w}\,\frac{8\pi\,Gm}{3\,H_0^2\,a_0^3}\,\mathbf{V}[a_0] = 1 - \frac{8\pi Gm}{3\,H_0^2\,a_0^3}. \tag{4.45}$$

Außerdem gilt jetzt

$$\dot{\psi}^2 = \frac{3\,w}{3\,w-1}\,\frac{8\pi\,Gm}{3\,a_0^3}\,\mathbf{V}[a_0]\,\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\,(w+1)}. \tag{4.46}$$

Die obige **Friedmann - Gleichung** (4.43) kann somit auf den heutigen Wert $H_0 = \dot{a}_0/a_0$ normiert werden. Wir können sie mit $H = \dot{a}/a$ dann

$$\boxed{\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_M\,\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + (1-\Omega_M)\,\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\,(w+1)}} \tag{4.47}$$

schreiben, wobei der *nur aus Beobachtungen zu bestimmende dimensionslose Parameter* $\Omega_{M,T_0} \equiv \Omega_m$ durch

$$\boxed{\Omega_m = \frac{8\pi Gm}{3\,H_0^2\,a_0^3},} \tag{4.48}$$

gegeben ist. Damit lautet (4.46) vereinfacht

$$\boxed{\dot{\psi}^2 = -3\,w\,H_0^2\,(1-\Omega_m)\,\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\,(w+1)}.} \tag{4.49}$$

Mit (4.44) lässt sich H_0 eliminieren und es gilt für den heutigen Zeitpunkt

$$\Omega_m = \frac{1-3\,w}{1-3\,w+\mathbf{V}[a_0]}, \tag{4.50}$$

und

$$1-\Omega_m = \frac{\mathbf{V}[a_0]}{1-3\,w+\mathbf{V}[a_0]}. \tag{4.51}$$

Die Beziehung (4.47) ist in der Standardkosmologie wohlbekannt und gilt für ein flaches euklidisches Universum. Die physikalische Deutung der Größen Ω_m und $\Omega_x = 1-\Omega_m$ ist jetzt aber gegenüber dem Standardmodell

eine völlig andere. Nach (4.28) können wir in Analogie zum Ringkosmos für die Zunahme der gravitativen Bindungsenergie im 3D - Kosmosmodell

$$|E_{grav}[\psi]| = \frac{8\pi G m}{3a^3}\,\mathbf{V}[a] \equiv |E_{grav}[0]|\,\mathbf{V}[a] \equiv |E_{grav}[0]|\,\beta[a].$$

schreiben. Mit dem so definierten Parameter $\beta[a]$

$$\boxed{\beta = \frac{E_{grav}[a]}{E_{grav}[0]}} \tag{4.52}$$

folgen aus den obigen Formeln die **wichtigen** Darstellungen ($\Omega_x = 1 - \Omega_m$)

$$\Omega_M = \frac{1}{1 + \beta/(1-3w)}, \quad \Omega_X = \frac{1}{1 + (1-3w)/\beta}. \tag{4.53}$$

Es gilt „energetisch - euklidische“ Randbedingung $\Omega_m + \Omega_x = 1$. Aus einem der kosmologischen Parameter Ω_m oder Ω_x kann eindeutig das Energieverhältnis β abgeleitet werden. Die populäre Darstellung der Standardkosmologie, dass Ω_m oder Ω_x einen Prozentsatz von „realer“ und „dunkler“ Energiedichte - Anteile darstellt, ist in unserem Modell somit *völlig abwegig.*

Wichtig ist die Formel für den Bremsparameter $q = -a\ddot{a}/\dot{a}^2$. Durch Division von (4.27) mit (4.28) ergibt sich mit den Parametern (4.53)

$$\boxed{q \equiv -q_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\beta + 1 - 3w\,(1-\beta)}{\beta + 1 - 3w}\right].} \tag{4.54}$$

$q(\beta_c) = 0$ ergibt sich hier im Grenzfall $w \to -\infty$ zu $\beta_c = 1$ (siehe Ringkosmos) sowie im Spezialfall $w = -1$ zu $\beta_c = 2$. Im wichtigen Falle $w = -1$ gilt im Einzelnen ($\beta \geq 1$)

$$\Omega_m = \frac{4}{4+\beta}, \qquad \Omega_\Lambda = \frac{\beta}{4+\beta} \tag{4.55}$$

sowie für den Bremsparameter

$$\boxed{q(\beta) = \frac{2-\beta}{4+\beta}.} \tag{4.56}$$

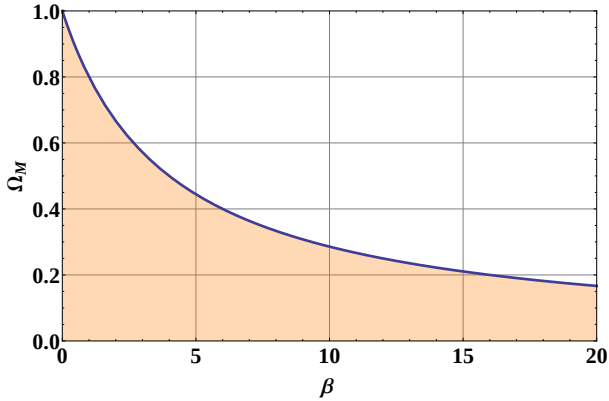


Fig. 4.4: *Der kosmologische Parameter Ω_m als Funktion von β (siehe Formel (4.55). Der Parameter ist ein indirektes Maß für den Anteil der Gravitationsenergie, welcher durch die Strukturbildung im Universum entstanden ist. Die Deutung im Modell der Standardkosmologie, in dem Ω_m den prozentualen Energieanteil der baryonischen sowie „Dunklen Materie" gegenüber der hypothetischen „Dunklen Energie" darstellt, ist hier physikalisch völlig abwegig.*

Man erkennt hier deutlich, dass für $\beta \geq 2$ die beschleunigte Expansion einsetzt. Man könnte diesen kritischen Punkt als einen *Schmelzpunkt* oder **Phasenübergang** ansehen, bei dem die *Materiestrukturierung oder das Materiekondensat* endlich die Oberhand über die *Fesseln des Raum - Zeit Gitters* gewinnt. Oder theatralischer gesagt: *Die Akteure (die Materie) übernehmen nun das Spiel, während die Bühne (die Raum - Zeit) immer schneller im Nebel verschwindet.*

Wenn nach den heutigen Beobachtungen $\Omega_\Lambda = \mathbf{3/4} \equiv \mathbf{0.75}$ ist, muss also β nach (4.55) $\beta = \mathbf{12}$ sein. Das heutige Universum hat also seine gravitative Bindungsenergie $E_{grav}[\psi]$ um etwa das dreizehn-fache gegenüber dem früheren strukturlosen Grundzustand $E_{grav}[\mathbf{0}]$ erhöht. Ein beeindruckender „Schöpfungsakt"!

Die Beziehung (4.43) gilt für den Fall, dass die Potentialfunktion $\mathbf{V}[a]$ durch ein reines Potenzgesetz dargestellt werden kann. Ganz allgemein gilt dagegen mit (4.40)

$$H^2 = \frac{8\pi G m}{3a^3} + \frac{8\pi G m}{3a^4} \int_0^a \mathbf{V}(a')\, da'. \tag{4.57}$$

oder nach einer Substitutionsoperation

$$H^2 = \frac{8\pi G m}{3a^3} + \frac{8\pi G m}{3a^3} \int_0^1 \mathbf{V}[a\,u]\,du. \tag{4.58}$$

Durch Normierung auf das heutige „Weltalter“ $t = T$ ergibt sich

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{1 + \int_0^1 \mathbf{V}[a\,u]\,du}{1 + \int_0^1 \mathbf{V}[a_0\,u]\,du} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \tag{4.59}$$

Als Verallgemeinerung von (4.50) ergibt sich so die interessante Relation

$$\Omega_m = \frac{1}{1 + \int_0^1 \mathbf{V}[a_0\,u]\,du}. \tag{4.60}$$

Auch die sogenannte „Kosmologische Konstante“ $\Lambda \equiv \dot{\psi}^2$ kann durch einen allgemeineren Ausdruck als (4.31) dargestellt werden. Mit (4.40) gilt nämlich auch

$$\dot{\psi}^2 = \frac{8\pi\,G\,m}{3\,a^3} \left(\mathbf{V}[a] - \int_0^1 \mathbf{V}[a\,u]\,du\right). \tag{4.61}$$

Durch partielle Integration können wir das umschreiben in

$$\Lambda \equiv \dot{\psi}^2 = \frac{8\pi\,G\,m}{3\,a^2} \int_0^1 u\,\mathbf{V}'[a\,u]\,du. \tag{4.62}$$

Dies ist eine *relative* Darstellung der zeitabhängigen kosmologischen Konstanten, keine *absolute* Darstellung.

4.4 Der allgemeine Zustand w[t]

Durch die Lagrangefunktion (3.19) ist die Dynamik des Skalenparameters a mit dem des Strukturparameter ψ eng verbunden. Dieser innere Zusammenhang wird am Einfachsten durch den w Parameter (3.30)

$$w = \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{\psi}^2}{\dot{\psi}^2 - \frac{8\pi G m}{3\,a^3}\,\boldsymbol{V}[\psi]} \right).$$

ausgedrückt. Wir führen jetzt eine Funktion $\chi[t]$ ein, welche die *räumlich integrierte negative Energiedichte* in der Entropiegleichung repräsentiert. Es gilt

$$w = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{\boldsymbol{V}[\psi]}{\chi[\psi]}\right). \tag{4.63}$$

Durch Gleichsetzen der obigen Ausdrücke ergibt sich für die immer *negative spezifische Energie* im Volumen a^3

$$\chi[t] = \frac{3\,a^3}{8\pi G m}\left\{\dot{\psi}^2 - \frac{8\pi G m}{3\,a^3}\mathbf{V}[\psi]\right\} \equiv \frac{3\,a^3}{8\pi G m}\,\dot{\psi}^2 - \mathbf{V}[\psi] \tag{4.64}$$

Analog wie im Ringkosmos (2.146) berechnen wir wieder

$$\frac{d\,\chi}{d\,\psi} = \frac{\dot{\chi}}{\dot{\psi}}; \qquad \frac{d^2\,\chi}{d\,\psi^2} = \frac{\dot{\psi}\,\ddot{\chi} - \dot{\chi}\,\ddot{\psi}}{\dot{\psi}^3}. \tag{4.65}$$

und eliminieren die Größen $\ddot{\psi}$ und $\ddot{a}$ durch die entsprechenden Bewegungsgleichungen. Mit Hilfe der beiden so berechneten Größen $\chi[\psi]$ und $d\chi[\psi]/d\psi$ lassen sich die Unbekannten a und $\dot{a}$ eliminieren. Durch Einsetzen in $d^2\,\chi[\psi]/d\psi^2$ entsteht so eine einzige Differentialgleichung für $\chi[\psi]$, wobei der verbleibende Faktor $\dot{\psi}$, der ungleich Null sein muss, herausfällt. Nach einer umfangreichen Rechnung ergibt sich so für $\chi[\psi]$ die fundamentale Differentialgleichung

$$\boxed{(\mathbf{V}[\psi] + \chi[\psi])\,(-1 + \mathbf{V}[\psi] + 2\,\chi[\psi] + 2\chi''[\psi]) = \mathbf{V}'[\psi]\,\chi'[\psi].} \tag{4.66}$$

Eine allgemeine *analytische* Lösung für eine beliebige Potentialfunktion $\mathbf{V}[\psi]$ scheint es für $\chi[\psi]$ nicht zu geben. Doch zunächst interessieren wir uns für den wichtigen Spezialfall $w = konstant$. Wegen (4.63) gilt dann für alle ψ

$$\chi[\psi] = \frac{\mathbf{V}[\psi]}{3\,w - 1} \tag{4.67}$$

Einsetzen in die obige Differentialgleichung führt zunächst zu dem System

$$(1 - 3\,w)\,\mathbf{V}'[\psi]^2 + 3\,w\,\mathbf{V}[\psi]\,(1 - 3\,w + \mathbf{V}[\psi] + 3\,w\,\mathbf{V}[\psi] + 2\,\mathbf{V}''[\psi]) = 0.$$

Diese Gleichung ist integrabel und führt im ersten Schritt zu

$$\mathbf{V}'[\psi]^2 = \mathbf{V}[\psi]\left(9\,w^2 - 3\,w(1 + \mathbf{V}[\psi]) + C_1\,\mathbf{V}[\psi]^{-\frac{1}{3w}}\right).$$

Die Integrationskonstante spaltet die möglichen Lösungsklassen in zwei Zweige auf. Wir konzentrieren uns hier auf eine eindeutige Darstellung mit der Symmetrie $\mathbf{V}[-\psi] = \mathbf{V}[+\psi]$. Wir setzen also $C_1 = 0$ und es gilt

$$\mathbf{V}'[\psi]^2 = 3\,w\,\mathbf{V}[\psi]\,(3\,w - 1 - \mathbf{V}[\psi])\,. \tag{4.68}$$

Die allgemeine Lösung mit der Anfangsbedingung $\mathbf{V}[0] = 0$ lautet schließlich

$$\mathbf{V}[\psi] = (1 - 3\,w)\,\sinh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-3\,w}\;\psi\right]^2. \tag{4.69}$$

Entwickeln wir diese Funktion nach ψ, so folgt

$$\mathbf{V}[\psi] = \frac{3}{4}\,w\;(3\,w - 1)\;\psi^2 + \ldots \tag{4.70}$$

Da wir wissen, dass aufgrund der *Jeansgleichung* für Dichtestörungen $\mathbf{V}''[0] = 3$ sein muss, kommen physikalisch nur die Werte

$$\mathbf{w} = \mathbf{-2/3}; \qquad \mathbf{w} = \mathbf{+1} \tag{4.71}$$

in Frage. Insbesondere ist damit der Fall $w = -1$ (ΛCDM - Modell) ausgeschlossen.

Weiter folgt nun

$$\chi[\psi] = -\sinh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-3\,w}\;\psi\right]^2. \tag{4.72}$$

Mit diesen Ergebnissen können wir im Falle $w = \mathit{konstant}$ auch den Bremsfaktor $q[\psi]$ berechnen. Analog wie im Ringkosmos gilt wieder

$$q = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\dot{\psi}^2}{\frac{8\pi\,Gm}{3\,a^3} + \frac{8\pi\,Gm}{3\,a^3}\,\mathbf{V}[\psi] - \dot{\psi}^2}\right). \tag{4.73}$$

Mit den obigen Formeln können wir das auch als

$$q = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\chi[\psi] + \mathbf{V}[\psi]}{1 - \chi[\psi]}\right) \tag{4.74}$$

schreiben. Einsetzen der bekannten Funktionen ergibt

$$\boxed{q[\psi] = \frac{1}{2}\left(1 + 3\,w\,\tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-3\,w}\;\psi\right]^2\right)} \tag{4.75}$$

Anhand dieser Beziehung kann man sehr schön erkennen, dass nur für $w < -1/3$ eine beschleunigte Expansion ($q < 0$) des Universums möglich ist. Symmetrisch ist nur der Fall $w = -2/3$, bei dem der Parameter q von einer Abbremsung mit $q = +1/2$ zu einer Beschleunigung mit $q = -1/2$ abnimmt. Letztendlich bestimmt diese Formel für q einen Phasenübergang bei $q = 0$, bei dem das Universum von einer Abbremsung in eine Beschleunigung übergeht.

Die eigentliche gravitative Bindungsenergiedichte, welche durch die Strukturbildung entsteht, ist gegenüber dem homogenen Grundzustand $4\pi\, Gm/a$ durch den Ausdruck

$$\frac{E_B[a,\psi]}{E_B[a,0]} = \mathbf{V}[\psi] \tag{4.76}$$

gegeben. Der Übergangspunkt ψ_0 folgt aus

$$1 + 3\,w\,\tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-3\,w}\;\psi_0\right]^2 = 0$$

Das Verhältnis von kritischer Bindungsenergie zum homogenen Grundzustand beträgt dann

$$\frac{E_B[a,\psi_0]}{E_B[a,0]} = \frac{3\,w-1}{3\,w+1}. \tag{4.77}$$

Mit diesen Ergebnissen können wir jetzt die dynamischen Modelle im Falle $w = \mathit{konstant}$ übersichtlich zusammenstellen. Mit den dimensionslosen Skalen

$$\tau = H_0\,t; \qquad \zeta = \frac{a[t]}{a[T_0]} \tag{4.78}$$

lautet die Bewegungsgleichung (Energiegleichung) für $\zeta[\tau]$ (Striche bedeuten Ableitungen nach τ)

$$\zeta'^2 = \frac{\Omega_m}{\zeta}\,(1 + \mathbf{V}[\psi]) - \psi'^2\,\zeta^2. \tag{4.79}$$

Mit der Definition des als konstant angenommen w- Parameters nimmt dies die Form

$$\zeta'^2 = \frac{\Omega_m}{\zeta} + \frac{1}{1-3\,w}\,\frac{\Omega_m}{\zeta}\,\mathbf{V}[\psi] \tag{4.80}$$

an. Andererseits folgt wegen (4.43) die Darstellung

$$\boxed{\zeta'^{\,2} = \frac{\Omega_m}{\zeta} + (1-\Omega_m)\,\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{3w+1}\,.} \tag{4.81}$$

Ein Vergleich des letzten Terms beider Relationen führt mit (4.69) zu der wichtigen Beziehung

$$\zeta = \left(\frac{\Omega_m}{1-\Omega_m}\right)^{-\frac{1}{3w}}\,\sinh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-3w}\,\psi\right]^{-\frac{2}{3w}}\,. \tag{4.82}$$

Noch wichtiger ist die Umkehrung dieser Beziehung, die eigentlich nur für $w = -2/3$ oder $w = +1$ physikalischen Sinn macht. Man erhält

$$\boxed{\psi = \frac{2}{\sqrt{-3\,w}}\,\mathrm{arcsinh}\left[\zeta^{-3w/2}\,\sqrt{\frac{1}{\Omega_m}-1}\right].} \tag{4.83}$$

Aus der Differentialgleichung (4.81) folgt zudem die Entwicklungszeit als Funktion des Skalenfaktors ζ. Es gilt

$$\sqrt{\Omega_m}\,\tau = \int_0^\zeta \sqrt{\frac{x}{1+(1-\Omega_m)/\Omega_m\,x^{-3w}}}\;dx$$

Unter der Prämisse $w < 0$ machen wir die Substitution $x = \zeta\,u^{-1/(3w)}$ und erhalten

$$\sqrt{\Omega_m}\,\tau = -\frac{\zeta^{3/2}}{3\,w}\,\int_0^1 u^{-\frac{1}{2w}-1}\left(1+\frac{1-\Omega_m}{\Omega_m}\,\zeta^{-3w}\,u\right)^{-\frac{1}{2}}\;du$$

Das Integral ist eine spezielle hypergeometrische Funktion und es gilt $(w < 0)$

$$\tau = \frac{2\,\zeta^{3/2}}{3\,\sqrt{\Omega_m}}\;{}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2w}, 1-\tfrac{1}{2w}, -\frac{1-\Omega_m}{\Omega_m}\,\zeta^{-3w}\right]. \tag{4.84}$$

Damit ist indirekt der Skalenfaktor $\zeta \to \zeta[\tau]$ als Funktion der Zeit nach dem *Urblitz* bekannt. Die Umkehrung der obigen Funktion definiert im **wCDM** Modell die Zeitabhängigkeit des Skalenfaktors

$$\boxed{\zeta = \Omega_m^{1/3}\,\left(\frac{3}{2}\,\tau\right)^{2/3} + \frac{\Omega_m^{-2/3-w}\,(1-\Omega_m)}{3\,(1-2\,w)}\,\left(\frac{3}{2}\,\tau\right)^{2/3-2w} + \ldots} \tag{4.85}$$

Anhand dieser Entwicklung sieht man, dass die beschleunigte Expansion zeitlich immer später einsetzt, je negativer der w - Parameter ist.

Mit Hilfe von (4.84) können wir das Weltalter als Funktion von w und Ω_m sehr übersichtlich darstellen. Wegen $\tau = H_0\, t$ folgt wegen $\zeta \equiv 1$ für das Weltalter T_A

$$T_A = \frac{2}{3\, H_0\, \sqrt{\Omega_m}}\; {}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2w}, 1 - \tfrac{1}{2w}, -\frac{1-\Omega_m}{\Omega_m}\right]. \tag{4.86}$$

Durch Anwendung einer Pfaffschen Transformation für hypergeometrische Funktionen läßt sich dies auch als

$$\boxed{T_A = \frac{2}{3\, H_0}\; {}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{2}, 1, 1 - \tfrac{1}{2w}, 1 - \Omega_m\right]} \tag{4.87}$$

schreiben. Das Argument der Funktion ist jetzt der reine prozentuale Anteil der „Dunklen Energie“ im Universum. Durch die Einführung von „Dunkler Energie“ ($\Omega_m < 1$) wird somit das Weltalter gegenüber einem Modell mit $\Omega_m = 1$ erhöht - allerdings noch leicht abhängig vom w - Parameter.

Auch das Strukturwachstum ψ läßt sich mit (4.83) in der Form

$$\begin{aligned}\tau = {} & \frac{2\,(1/\Omega_m - 1)^{1/(2w)}}{3\,\sqrt{\Omega_m}}\, \sinh\left[\frac{\sqrt{-3w}}{2}\,\psi\right]^{-1/w} \times \\ & {}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2w}, 1 - \tfrac{1}{2w}, -\sinh\left[\frac{\sqrt{-3w}}{2}\,\psi\right]^2\right].\end{aligned} \tag{4.88}$$

schreiben. Mit (4.75) folgt weiterhin für den „Bremsparameter“

$$q[\zeta] = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3\,w\,(1-\Omega_m)}{1 - \Omega_m\,(1 - \zeta^{3\,w})}\right). \tag{4.89}$$

Für den Pseudowinkel ψ als Funktion der Zeit gilt mit (4.67) und (4.64) die Differentialgleichung

$$\psi'^{\,2} = -3\,w\,\frac{\Omega_m^{1+1/w}}{(1-\Omega_m)^{1/w}}\, \sinh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-3w}\,\psi\right]^{2(1+1/w)}. \tag{4.90}$$

Die beiden obigen Beziehungen sind fundamental für die Dynamik des Universums unter der Voraussetzung eines *konstanten w-Parameters.* In

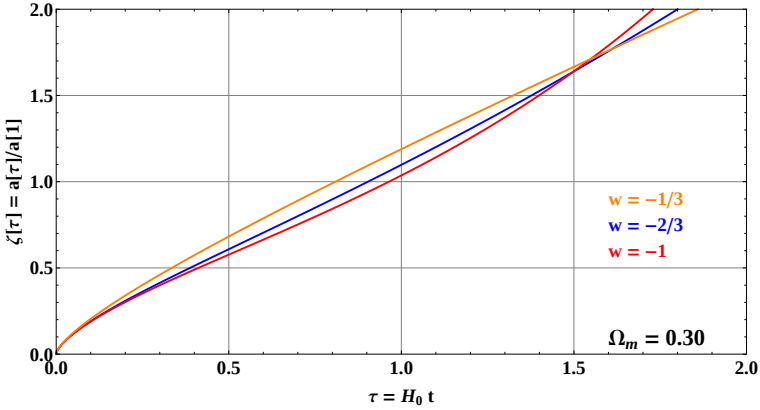


Fig. 4.5: *Der Skalenfaktor ζ als Funktion der kosmischen Zeit für die drei Zustandsparameter $w = -1/3, -2/3$ und $w = -1$. Der Massenparameter $\Omega_m = 0.3$. Überraschend ist hier, dass das am stärksten beschleunigende Universum mit $w = -1$ zu Beginn am langsamsten expandiert und erst später alle anderen überholt. Bei $w = -1/3$ bleibt nach einer heftigen Ausdehnungsphase später nur noch eine gleichbleibende Expansion mit konstanter Rate übrig.*

Analogie könnte man die Gleichung (4.83) als die *„Keplersche Bahngleichung“* zwischen dem Skalenfaktor a und dem Pseudowinkel ψ bezeichnen, während (4.90) den *„Flächensatz“* für den Pseudowinkel ψ repräsentiert. Der Skalenfaktor expandiert, während gleichzeitig die Strukturen „kollabieren“. Letztendlich definiert (4.90) im Falle $w \neq -1$ eine zeitabhängige *„kosmologische Konstante“*.

Der Ausdruck (4.90) stellt so eine verallgemeinerte „kosmologische Konstante“ dar. Nur im Falle $w = -1$ ist diese Konstante unabhängig von ψ. Auch die Druck - und Energiedichte lässt sich im Falle $w =$ konstant analytisch darstellen. Setzen wir mit (3.27) und (3.28) im Sinne von EINSTEIN und insbesondere LEMAÎRE $p_\Lambda = -p_\epsilon$ und $\varrho_\Lambda = -\varrho_\epsilon$, so gilt zunächst

$$\frac{8\pi\,G}{3}\,\varrho_\epsilon = \dot{\psi}^2 - \frac{8\pi G m}{3\,a^3}\,\mathbf{V}[\psi] \tag{4.91}$$

$$\frac{8\pi\,G}{3}\,p_\epsilon = \frac{1}{3}\,\dot{\psi}^2. \tag{4.92}$$

Setzt man hier die weiter oben bekannten Ausdrücke ein, so ergeben sich

die schönen Resultate

$$\frac{8\pi\,G}{3\,H_0^2}\,\varrho_\epsilon = -\frac{\Omega_m^{1+1/w}}{(1-\Omega_m)^{1/w}}\,\sinh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-3w}\;\psi\right]^{2(1+1/w)} \tag{4.93}$$

$$\frac{8\pi\,G}{3\,H_0^2}\,p_\epsilon = -w\,\frac{\Omega_m^{1+1/w}}{(1-\Omega_m)^{1/w}}\,\sinh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-3w}\;\psi\right]^{2(1+1/w)}. \tag{4.94}$$

Mit den obigen Ergebnissen können wir nun auch den *Hubble-Parameter* H in Einheiten von H_0 als Funktion von w und ψ darstellen. Wegen $H = \zeta'/\zeta$ folgt

$$\frac{H}{H_0} = \Omega_m^{1/2}\,\left(\frac{\Omega_m}{1-\Omega_m}\right)^{\frac{1}{2w}}\,\frac{\cosh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-3w}\;\psi\right]}{\sinh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-3w}\;\psi\right]^{-\frac{1}{w}}}. \tag{4.95}$$

Ein weitere wichtige Größe ist die logarithmische Wachstumsrate **f**, definiert durch

$$\mathbf{f} = \frac{d\ln[\psi]}{d\ln[a]} \equiv \frac{d\ln[\psi]}{d\ln[\zeta]} \tag{4.96}$$

Mit den bekannten analytischen Ausdrücken ergibt sich so

$$\boxed{\mathbf{f}[\tau] = \sqrt{-3\,w}\;\frac{\tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-3\,w}\,\psi[\tau]\right]}{\psi[\tau]}} \tag{4.97}$$

Die mit der kosmischen Expansion sich verändernden kosmologischen Größen Ω_m und $\Omega_x = 1-\Omega_m$ können nach (4.50) und (4.51) jetzt durch die Formeln

$$\Omega_m[\psi] = \mathrm{sech}\left[\frac{1}{2}\sqrt{-3\,w}\,\psi\right]^2, \qquad \Omega_x[\psi] = \tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{-3\,w}\,\psi\right]^2 \tag{4.98}$$

beschrieben werden. Bei bekanntem Ω_m oder Ω_x lässt sich so mit vorgegebenen w der Pseudowinkel bzw. die „Heterogenität“ ψ abschätzen. Ist zum Beispiel $w = -1$ und $\Omega_x = \mathbf{0.7}$, dann folgt aus den obigen Formeln für den heutigen Wert des Dichtekontrast - Skalars der Wert $\psi = \mathbf{1.397}$..., ist dagegen $w = -2/3$, so folgt der Wert $\psi = \mathbf{1.711}$.... Mit

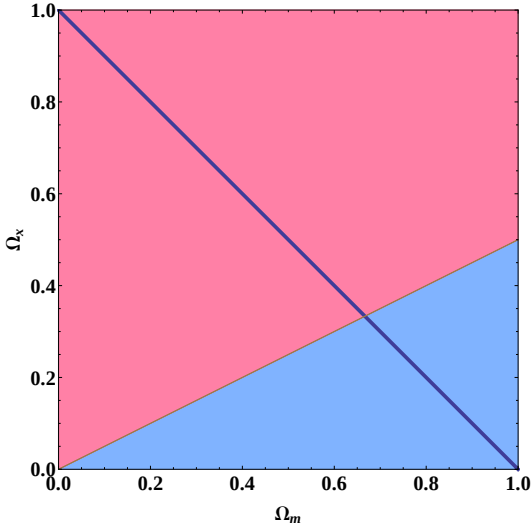


Fig. 4.6: *Im Falle $w = konstant$ zeigt hier die blaue Linie für ein flaches Universum die Relation $\Omega_m + \Omega_x = 1$ an. Im roten Bereich erfolgt beschleunigte Expansion, im blauen Bereich abgebremste Expansion. Die Trennlinie ist durch $w = -1/3$ festgelegt. Ist der Massenparameter $\Omega_m \geq 2/3$, so kann ein euklidisches Universum nicht mehr beschleunigt expandieren.*

Hilfe von (4.98) lässt sich die Wachstumsrate $\mathbf{f}$ im Falle $w = konstant$ auch ausdrücken als

$$\mathbf{f} = -\frac{3\,w\,\sqrt{1-\Omega_m}}{2\,\ln[1/\sqrt{\Omega_m} + \sqrt{1/\Omega_m - 1}]}. \tag{4.99}$$

In der Standardkosmologie gibt es einen ähnlichen Zusammenhang, der häufig durch die Formel $\mathbf{f} \sim \Omega_m^{0.55}$ approximiert wird. Doch beruht diese genäherte Beziehung auf einer inkonsistenten Behandlung der Dynamik des Universums, bei der es keine Rückkopplung zwischen der Strukturbildung und der Expansionsrate des Skalenfaktors gibt.

Die Struktur der Formeln für $\zeta[\psi], \mathbf{V}[\psi]$ und $\chi[\psi]$ im Falle $w = konstant$ lässt vermuten, dass es neben der Differentialgleichung (4.66) auch eine Differentialgleichung zwischen $\chi[\zeta]$ und $\mathbf{V}[\zeta]$ geben muss. Um diese abzuleiten, braucht man nur die Ausdrücke (4.34) mit (4.63) gleichsetzen. Man erhält mit dem dimensionslosen Skalenparameter

$\zeta = a[t]/a[t_0]$ nach einigen Umformungen die überraschend einfache *lineare Differentialgleichung*

$$\boxed{\frac{d}{d\zeta}\left\{\zeta\,\chi[\zeta]\right\} + \mathbf{V}[\zeta] = 0.} \tag{4.100}$$

Im Spezialfall $w = konstant$ gelten mit (4.83,4.69,4.72) die beiden Darstellungen

$$\mathbf{V}[\zeta] = (1 - 3\,w)\,\frac{1-\Omega_m}{\Omega_m}\,\zeta^{-3\,w}; \quad \chi[\zeta] = -\frac{1-\Omega_m}{\Omega_m}\,\zeta^{-3\,w}. \tag{4.101}$$

Die Gleichung (4.100) wird tatsächlich von diesen beiden Funktionen erfüllt. Die allgemeine Lösung der Gleichung (4.100) bei vorgegebenen $\mathbf{V}[\zeta]$ lautet

$$\chi[\zeta] = -\frac{1}{\zeta}\int_0^{\zeta} \mathbf{V}[y]\,dy. \tag{4.102}$$

Für die *Hubble-Lemaître* Funktion und ihre astronomische Auswertung bietet die Darstellung der Schlüsselfunktionen in Abhängigkeit von ζ große Vorteile. Denn es gilt

$$\zeta'^2 = \frac{\Omega_m}{\zeta}\,(1 + \mathbf{V}[\psi]) - \psi'^2\,\zeta^2. \tag{4.103}$$

Mit der Definition (4.63) erhalten wir zudem

$$\psi'^2 = \Omega_m\,\frac{\chi[\zeta] + \mathbf{V}[\zeta]}{\zeta^3}. \tag{4.104}$$

Mit (4.100) wird daraus

$$\psi'^2 = -\Omega_m\,\frac{\chi'[\zeta]}{\zeta^2}. \tag{4.105}$$

Damit erhalten wir für die *Hubble-Lemaître* Funktion den schönen Ausdruck

$$\boxed{\zeta'^2 = \frac{\Omega_m}{\zeta}\left\{1 - \chi[\zeta]\right\}.} \tag{4.106}$$

Der w - Parameter ergibt sich mit (4.64) zu (vergleiche hierzu (4.40))

$$w = -\frac{1}{3}\,\zeta\,\frac{d}{d\zeta}\log[\chi]. \tag{4.107}$$

Im Ausdruck (4.106) ist sehr schön zu sehen, dass ein Universum nur dann beschleunigt expandieren kann, wenn diese aktive gravitative Energie $\chi[\zeta]$ mit dem Skalenfaktor ζ immer stärker negativ wird. Es ist zweckmäßig, die Funktion $\chi[\zeta]$ durch einen Faktor neu zu eichen. Wir setzen

$$\chi[\zeta] = -\frac{1-\Omega_m}{\Omega_m}\,\chi_e[\zeta], \tag{4.108}$$

wobei $\chi_e[\zeta]$ jetzt eine positiv definite Funktion darstellt. Die *Hubble-Lemaître* Funktion lautet nun

$$\boxed{\zeta'^2 = \frac{\Omega_m}{\zeta} + (1-\Omega_m)\,\frac{\chi_e[\zeta]}{\zeta}} \tag{4.109}$$

mit der Randbedingung $\chi_e[1] = 1$ ($\zeta = 1$: heutiger Zeitpunkt). In einem einfachen **wCDM**-Modell folgt mit (4.101) die Darstellung

$$\chi_e[\zeta] = \zeta^{-3\,w}. \tag{4.110}$$

Mit (4.109) liegt dann die Expansionsdynamik des Universums fest. Der Dichtekontrast wächst gemäß

$$\psi'^2 = (1-\Omega_m)\,\frac{\chi_e'[\zeta]}{\zeta^2}. \tag{4.111}$$

Im Folgenden werden diese Ergebnisse für Spezialfälle ausgewertet.

4.5 Der Zustand w = -1 (ΛCDM-Modell)

Der physikalisch und auch mathematisch ausgezeichnete Wert des Parameters w in unserem dynamischen Modell ist eindeutig $w = -1 \equiv \textit{konstant}$. Dies entspricht tatsächlich der „*legendären kosmologischen Konstanten*“ $\Lambda \equiv \lambda$ von Einstein. Die entsprechenden Lösungen können in diesem Fall auch in der Zeit vollständig analytisch angegeben werden. Da Λ

physikalisch die Dimension einer Frequenz ins Quadrat hat, ergibt sich im Falle $w = -1$ und (4.90) die Darstellung

$$\boxed{\Lambda \equiv \dot{\psi}^2 = 3\,(1 - \Omega_m)\,H_0^2.} \tag{4.112}$$

Mit $H_0 = \mathbf{70}$ km/s/Mpc und $\Omega_m = \mathbf{0.30}$ ergibt sich

$$\Lambda \approx \mathbf{10^{-35}}\, s^{-2}, \tag{4.113}$$

was in Worten 10 *Quadrat - Atto Hertz* wäre. Wenn das Modell $w = -1$ zuträfe, wäre die sogenannte „kosmologische Konstante“ zum heutigen Zeitpunkt ungefähr dem doppelten Quadrat der gegenwärtigen „Hubble Konstanten“ gleich.

Die Zeitabhängigkeit des Pseudowinkels ψ lautet daher

$$\psi = \sqrt{3(1 - \Omega_m)}\,H_0\,t \equiv \sqrt{3(1 - \Omega_m)}\,\tau. \tag{4.114}$$

Dieser Strukturparameter oder das **Morphon** - Skalar ψ hat somit im Spezialfall $w = -1$ eine konstante Anwachsrate, die mit den obigen Daten in etwa

$$\dot{\psi} \approx \mathbf{10^{-10}}\,/Jahr \tag{4.115}$$

entspricht. Ein konstanter Wert von $w = -1$ kann aber in unserer Modellvorstellung nur durch eine anomale *Newton'sche Gravitation* in der Lagrangedichte erklärt werden. Das effektive gravitative Wechselwirkungspotential ergibt sich aus (4.69) zu

$$\mathbf{V}[\psi] = 4\,\sinh\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\psi\right]^2. \tag{4.116}$$

Die fundamentale Lösung für den Skalenfaktor $a[\tau]$ lautet mit (4.83) für den *singulären Fall* $w = -1$

$$\boxed{\zeta = \left(\frac{\Omega_m}{1 - \Omega_m}\right)^{\frac{1}{3}}\,\sinh\left[\frac{3}{2}\sqrt{1 - \Omega_m}\,\tau\right]^{\frac{2}{3}}.} \tag{4.117}$$

Diese Formel für den Skalenfaktor $a[\tau] \equiv a[\tau_0]\,\zeta[\tau]$ beschreibt schlechthin die *zunächst abgebremste, dann beschleunigte Expansion des Universums*

im klassischen ΛCDM – Modell, wie im nächsten Abschnitt noch näher ausgeführt werden soll. Für kleine Zeiten t gilt hier $a \propto t^{2/3}$. Ob das reale Universum sich aber wirklich so verhält ($w = -1 \equiv konstant$), bleibt zweifelhaft. Nach unserem Modell mit Kopplung von Strukturbildung und Expansion im Bild der Newtonschen Gravitation ist ein Parameterwert von $w = -1$ **nicht möglich**!.

Für den Hubbleparameter ergibt sich mit (4.118) entsprechend

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{1-\Omega_m}\,\coth\left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\Omega_m}\,\tau\right]. \tag{4.118}$$

Hieraus kann man ersehen, wie der Hubbleparameter als Funktion der kosmischen Zeit abnimmt. Asymptotisch gilt in ferner Zukunft

$$H_{t\,\to\infty} \equiv H_\infty = \sqrt{1-\Omega_m}\,H_0. \tag{4.119}$$

Der wichtige Beschleunigungsparameter q folgt aus (4.75) zu

$$q[\psi] = \frac{1}{2}\left(1 - 3\,\tanh\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\psi\right]^2\right) \tag{4.120}$$

Für das spezielle Expansionsmodell mit $w = -1$ gilt also jetzt die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{a}^2 + \frac{4\pi G m}{3\,a} + \frac{1}{2}\,a^2\,\dot{\psi}^2 + \frac{16\pi\,G m}{3\,a}\,\sinh\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\psi\right]^2 \tag{4.121}$$

oder analytisch einfacher (λCDM-Modell)

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{a}^2 + \frac{1}{2}\,a^2\,\dot{\psi}^2 + \frac{4\pi G m}{3\,a}\left(e^{\sqrt{3}\,\psi} - 1 + e^{-\sqrt{3}\,\psi}\right).} \tag{4.122}$$

An dieser Lagrangedichte sieht man unmittelbar die Kopplung zwischen Raumexpansion a (Raummutation) und der Strukturbildung ψ. Der Raum stellt kein festes Gitter mehr dar, indem die dynamischen Strukturierungsprozesse ψ ablaufen. Die Dynamiken von Raum - Zeit und Materiestrukturen bedingen sich gegenseitig. *„Raum - Zeit“ und „Materie“ sind komplementäre Aspekte der gleichen Realität geworden.*

In Analogie zum expandierenden Ringmodell können wir jetzt mit der obigen Lagrangedichte eine Gravitationsenergie oder besser gravitative Bindungsenergie pro Elementarzelle

$$E_{BIN}[a,\psi] = \frac{4\pi\, G m^2}{3\, a}\left(e^{\sqrt{3}\,\psi} - 1 + e^{-\sqrt{3}\,\psi}\right)$$
$$= \frac{4\pi\, G m^2}{3\, a}\left(2\cosh[\sqrt{3}\,\psi] - 1\right) \tag{4.123}$$

definieren. Für $\psi = 0$ hat sie ihren niedrigsten Wert, der einem homogenen Universum entspricht. Je heterogener das Universum wird, desto größer wird die Bindungsenergie und damit auch der Ordnungsparameter ψ.

Der kritische Übergangspunkt ψ_0 zur beschleunigten Expansion wird durch (4.75) bestimmt und folgt aus

$$3\tanh^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\psi_0\right] = 1. \tag{4.124}$$

Damit ergibt sich der kritische Schwellwert zu $\psi_0 \approx \mathbf{0.760346}$.... Aus (4.77) folgt für das Verhältnis der Bindungsenergien im Falle $w = -1$

$$\frac{E_{BIN}[a,\psi_0]}{E_{BIN}[a,0]} = 2. \tag{4.125}$$

Im Falle $w = -1$ gilt also: *Im Gegensatz zum expandierenden Ring mit Paarfusion muss der expandierende 3D-Kosmos vom homogenen Grundzustand seine isotrope homogene gravitative Energiedichte durch Strukturbildung* ***verdreifachen****, um in die beschleunigte Phase der Raum – Zeit einzutreten.*

Die Größe ψ ist somit eine skalare Variable (**Morphon** – Skalar), welche mit der Dichtekontrastfunktion D_+ korreliert ist, die das Wachstum der Fourieramplituden von *Dichtefluktuationen* unterschiedlicher Wellenlänge im Kosmos in gleicher Weise beschreibt.

4.6 Der Zustand w = +1 („soft bounce“)

Ein Universum mit $w = +1$ gehört nicht in die Klasse der beschleunigt expandierenden Universen, sondern eher in die Kategorie „soft bounce“

oder „soft bang“ ([160]). Doch bei der Untersuchung des Strukturwachstums in einem Universum, dessen Skalenfaktor mit der Zeit wie $t^{2/3}$ anwächst, zeigte sich, dass für kleine Dichteschwankungen sowohl der Zustandsparameter $w = -2/3$ als auch der Zustandsparameter $w = +1$ von Relevanz sein können. Ein dynamisches Modell mit $w = +1$ hat interessante Eigenschaften, die sich lohnen, untersucht zu werden. Doch welche besondere Eigenschaft sind das?

Mit Hilfe der allgemeinen Lösung (4.69) erhalten wir jetzt für das Potential im Falle $w = +1$

$$\mathbf{V}[\psi] = 2\,\sin\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\psi\right]^2 = \frac{3}{2}\,\psi^2 + \dots \tag{4.126}$$

und folglich mit (4.72) auch

$$\chi[\psi] = \sin\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\psi\right]^2. \tag{4.127}$$

Die relevante Lagrangedichte lautet somit

$$\mathcal{L} = \zeta'^2 + \zeta^2\,\psi'^2 + \frac{\Omega_m}{\zeta}\,\Big(2 - \cos[\sqrt{3}\,\psi]\Big). \tag{4.128}$$

Man sieht hier sofort, dass diese nichtlineare Lagrangefunktion invariant gegenüber der Transformation

$$\psi^\star \to 2\,\pi/\sqrt{3} - \psi \tag{4.129}$$

ist. Die gekoppelten Differentialgleichungen für die Skalenfunktion ζ und das Dichtefeld ψ lauten nun

$$\zeta'' - \zeta\,\psi'^2 = -\frac{1}{2}\,\Omega_m\,\frac{2 - \cos[\sqrt{3}\,\psi]}{\zeta^2},$$
$$\psi'' + 2\,\frac{\zeta'}{\zeta}\,\psi' = +\frac{\sqrt{3}}{2}\,\Omega_m\,\frac{\sin[\sqrt{3}\,\psi]}{\zeta^3}.$$

Ein Vergleich von (4.81) und (4.80) zeigt, dass im Falle $w = +1$ der Massenparameter Ω_m größer 1 sein muss. Wir erhalten also mit $w = +1$ und $\Omega_m > 1$ die Differentialgleichung

$$\zeta'^2 = \frac{\Omega_m}{\zeta} - \frac{\Omega_m - 1}{\zeta^4}. \tag{4.130}$$

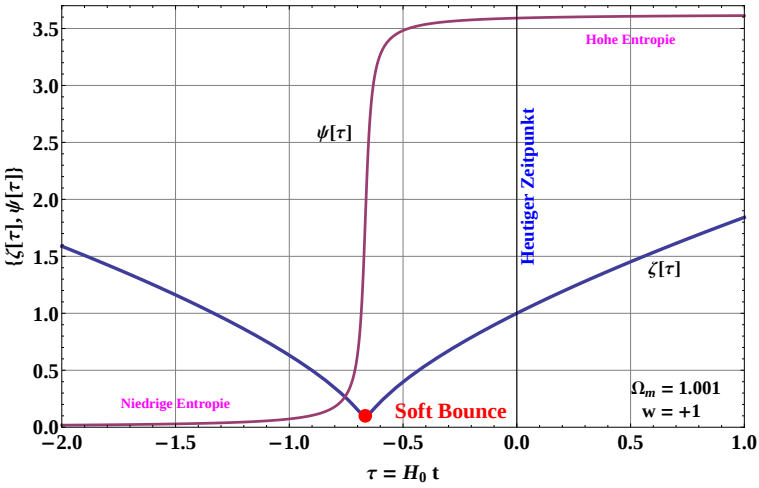


Fig. 4.7: *Die Implosions - und Expansionsdynamik eines Modell-Universums mit dem Zustandsparameter $w = +1$ und der Gesamtenergie Null (Euklidische Metrik). In diesem Modell muss immer $\Omega_m > 1$ sein. Das Universum wechselt dabei von einem instabilen Gleichgewichtszustand niedrigen Dichtekontrastes (Entropie) in einen entgegengesetzten Gleichgewichtszustand hohen Dichtekontrastes über. Der „soft bounce" oder „soft bang" geschah bei dem „Abprall-Zeitpunkt" $\tau = -2/(3\Omega_m)$. Asymptotisch geht es in das Einstein-deSitter Modell über. Für das reale beobachtbare Universum kommt dieses Modell aber nicht in Frage, da es keine beschleunigte Expansion aufweist.*

Die allgemeine Lösung dieser Entwicklungsgleichung mit der Anfangsbedingung $\zeta[0] = 1$ lautet

$$\zeta = \left(1 + 3\,\tau + \frac{9}{4}\,\Omega_m\,\tau^2\right)^{1/3} . \tag{4.131}$$

Der Skalenfaktor $\zeta[\tau]$ erreichte hier in der Vergangenheit bei

$$\tau_{min} = -\frac{2}{3\,\Omega_m}$$

das Minimum bei

$$\zeta_{min} = \left(1 - \frac{1}{\Omega_m}\right)^{1/3} .$$

Diese *Soft Bang Skala (Abprall-Skala)* existiert nur dann, wenn der Massenparameter $\Omega_m > 1$ ist. Dies ist konsistent mit den Identitäten (4.101) im Falle $w = +1$, denn dann gilt

$$\mathbf{V}[\zeta] = 2\,\frac{\Omega_m - 1}{\Omega_m}\,\zeta^{-3}; \quad \chi[\zeta] = \frac{\Omega_m - 1}{\Omega_m}\,\zeta^{-3} \tag{4.132}$$

und das Potential $\mathbf{V}[\zeta]$ ist nur dann positiv definit, wenn im Modell $w = +1$ die Bedingung $\Omega_m > 1$ erfüllt ist. Ein Vergleich von (4.132) mit (4.126) führt zu der Identität

$$\zeta^3 = \frac{1 - 1/\Omega_m}{\sin\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\psi\right]^2}. \tag{4.133}$$

Ein Vergleich mit der zeitabhängigen Formel führt zu dem Ergebnis

$$\tan\left[\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\psi\right] = \pm\frac{\sqrt{\Omega_m - 1}}{1 + \frac{3}{2}\,\Omega_m\,\tau}. \tag{4.134}$$

Bei einer Entwicklung von niedriger zu hoher Entropie gilt hier das Minuszeichen. In der Abbildung (4.7) ist die physikalische Situation dargestellt. Das Nullenergie-Modelluniversum kollabiert aus einem unendlichen Raum auf einen Minimalskalenfaktor ζ_{min} und expandiert dann wieder in das Unendliche (*Einstein-deSitter Modell*). Für das reale Universum kommt dieses Modell wegen seiner fehlenden beschleunigten Expansion und dem über-kritischen Massenparameter Ω_m nicht in Frage.

4.7 Der Zustand w = -2/3

Unsere Untersuchungen zur beschleunigten Expansion des Skalenfaktors im Universum haben unter der Prämisse, dass *nur Strukturverdichtungen als Trigger für diese beschleunigte Expansion in Frage kommen*, gezeigt, dass sich der Parameterwert $w = -1$ in unserer Theorie *nicht herleiten lässt* ($w = -1$: Kosmologische Konstante, ΛCDM-Modell). Unsere dynamisch-gravitative Theorie fordert dagegen für diesen Parameter zumindest im jungen Universum den Zahlenwert

$$\boxed{w \equiv -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}.}$$

Im Falle schwacher Strukturbildung und im *nicht-relativistischem* Grenzfall gemäßigter Temperaturen muss die Jeansgleichung für schwache skalare Druck-Dichtestörungen gültig gewesen sein. Und das leistet im Rahmen unseres dynamischen Modelles nur eine kosmische Zustandsgleichung mit $w = -\mathbf{2/3}$. Die skalare Potentialfunktion lautet für die Zustandsgleichung $w = -2/3$ lautet mit (4.69)

$$\mathbf{V}[\psi] = 3\,\sinh\left[\frac{\psi}{\sqrt{2}}\right]^2 = \frac{3}{2}\,\psi^2 + \frac{1}{4}\,\psi^4 + \frac{1}{60}\,\psi^6 + \ldots \tag{4.135}$$

Die Funktion (4.135) zeigt somit das gleiche asymptotische Verhalten wie der Zustand $w = +1$ bei $\psi \to 0$. Der Verlauf der Funktion garantiert, dass während der Expansion im gesamten ψ Bereich der w Parameter exakt gleich $-2/3$ bleibt. In der heutigen Phase des Universums gilt mit großer Wahrscheinlichkeit $w < -2/3$. Doch davon später. Die zeitliche Ableitung des Pseudowinkels ψ ist jetzt natürlich keine Konstante mehr, sondern genügt nach (4.90) der Differentialgleichung

$$\sinh\left[\frac{\psi}{\sqrt{2}}\right]\,\left(\frac{d\psi}{d\tau}\right)^2 = \frac{2\,(1-\Omega_m)^{3/2}}{\Omega_m^{1/2}}. \tag{4.136}$$

Der Skalenfaktor genügt nach (4.83) wegen $w = -2/3$ der Gleichung

$$\zeta = \sqrt{\frac{\Omega_m}{1-\Omega_m}}\,\sinh\left[\frac{\psi}{\sqrt{2}}\right], \tag{4.137}$$

Die Umkehrung dieser Beziehung lautet

$$\psi = \sqrt{2}\,\mathrm{arcsinh}\left[\zeta\,\sqrt{\frac{1}{\Omega_m} - 1}\right]. \tag{4.138}$$

Die logarithmische Wachstumsrate $\mathbf{f}[\zeta]$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{-2/3} &= \zeta\,\frac{d\ln[\psi]}{d\zeta} \\ &\equiv \frac{\zeta\,\sqrt{1-\Omega_m}}{\sqrt{\Omega_m + (1-\Omega_m)\,\zeta^2}\,\mathrm{arcsinh}\left[\zeta\,\sqrt{1/\Omega_m - 1}\right]}\end{aligned} \tag{4.139}$$

Der Verlauf dieser Funktion ist in Fig. (4.12) dargestellt. Es wird nun sehr wichtig sein, die zeitliche Entwicklungsfunktion des Skalenfaktors

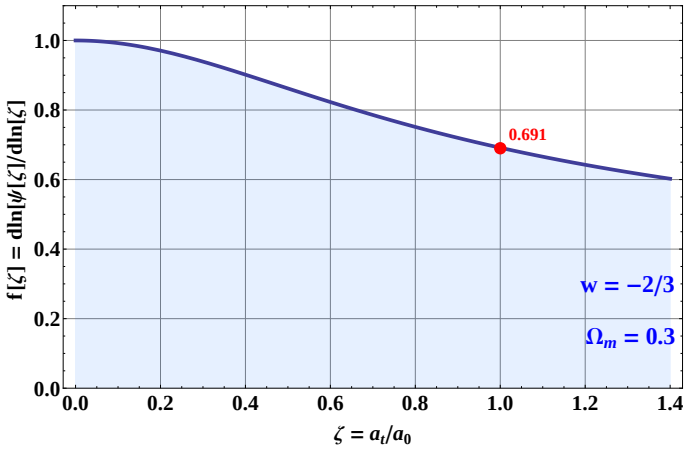


Fig. 4.8: *Die logarithmische Wachstumsrate* **f** *für das skalare Feld* ψ *im konsistent nichtlinearen Dichtemodell mit* $w = -2/3$ *als Funktion des Skalenfaktors.*

$\zeta[\tau]$ im neuen Modell mit $w = -2/3$ mit dem des alten Modelles $w = -1$ zu vergleichen. Wir werden dies in einem gesonderten Kapitel zum sogenannten σ_8 Problem („tension“) des realen Universums genauer diskutieren. Denn das klassische Standardmodell (ΛCDM-Modell) *ist nicht exakt identisch mit dem hiesigen nichtlinearen Rückkopplungsmodell mit* w *= -1.* Wir wollen von den beiden obigen Gleichungen besonders (4.136) exakt lösen. Mit (4.84) erhalten wir indirekt die Lösung

$$\tau = \frac{2\,\zeta^{3/2}}{3\,\sqrt{\Omega_m}}\;{}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{7}{4}, -\frac{1-\Omega_m}{\Omega_m}\,\zeta^2\right]. \tag{4.140}$$

Damit ist zumindest die Umkehrfunktion $\tau \to \tau[\zeta]$ bekannt. Asymptotisch gilt für die Umkehrfunktion $\tau \to \infty$ (w = -2/3)

$$\zeta = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1-\Omega_m}\,\tau + \mathbf{M}[2,\sqrt{2}]\,\sqrt[4]{\frac{\Omega_m}{1-\Omega_m}}\right)^2 + \ldots$$

$\mathbf{M}[a,b]$ bedeutet hier das arithmetisch - geometrische Mittel. Der Skalenfaktor expandiert somit im Zustand $w = -2/3$ asymptotisch für große $\tau \to \infty$ quadratisch mit der Zeit, also nicht exponentiell wie im Falle $w = -1$. Der Hubble-Parameter nimmt also mit der Zeit monoton ab.

Ebenso ergibt sich mit (4.137) als indirekte Lösung für das Strukturwachstum

$$\tau = \frac{2}{3}\,\frac{\Omega_m^{1/4}}{(1-\Omega_m)^{3/4}}\,\sinh\left[\frac{\psi}{\sqrt{2}}\right]^{3/2}\,{}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4},\tfrac{7}{4},-\sinh\left[\tfrac{\psi}{\sqrt{2}}\right]^2\right]. \quad (4.141)$$

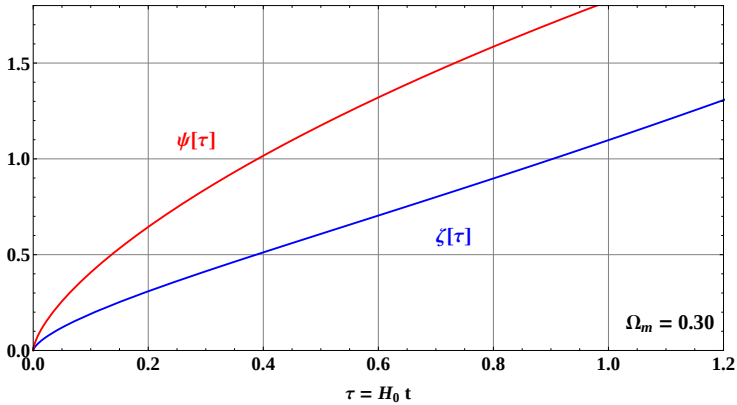


Fig. 4.9: *Der Skalenfaktor ζ und der Dichtekontrast ψ als Funktion der Zeit $\tau = H_0\,t$ im Expansionsmodell mit $w = -2/3$ und dem Massenparameter $\Omega_m = 0.3$.*

Die transzendente Umkehrgleichung $\psi \to \psi[\tau]$ erinnert an die *Keplersche Gleichung* in der Planetenbewegung, bei der ein Winkel der Bahnbewegung in einem Kegelschnitt mit der Zeit verknüpft wird. Sicherlich ist (4.140) das wichtigste Resultat unseres Modelles. Wir wollen daher das zeitliche Wachstum des Skalenfaktors bei identischen physikalischen Parametern wie Ω_m und H_0 in den beiden Modellen mit $w = -1$ (*Kosmologische Konstante*) und in dem von uns favorisierten Modell mit $w = \mathbf{-2/3}$ vergleichen. Im Falle $w = -1$ folgt bekanntlich der Skalenfaktor der Gleichung (4.117)

$$\zeta = \left(\frac{\Omega_m}{1-\Omega_m}\right)^{\frac{1}{3}}\,\sinh\left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\Omega_m}\,\tau\right]^{\frac{2}{3}}. \quad \Lambda CDM - Modell$$

Rein äußerlich sieht man gewisse Ähnlichkeiten zu (4.140), aber auch deutliche Unterschiede. In Figur (4.10) sind für den Dichteparameter $\Omega_m = \mathbf{0.25}$ die Wachstumskurven des Skalenfaktors für die beiden w -

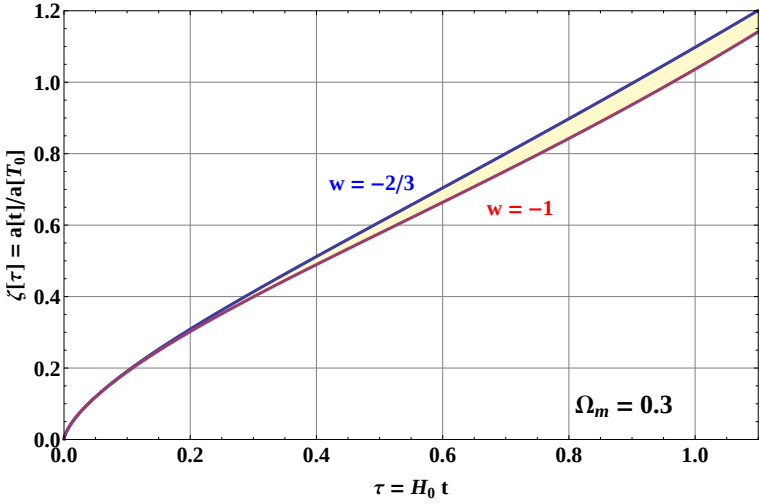


Fig. 4.10: *Ein Vergleich der Expansionsdynamik in einem Modell mit $w = -2/3$ (blaue Kurve) und dem klassischen ΛCDM-Modell mit $w = -1$ (rote Kurve) bei identischem Massenparameter $\Omega_m = 0.30$. Das Modell mit $w = -2/3$ (blaue Kurve) expandiert in der Frühphase des Universums deutlich stärker als das entsprechende klassische Modell mit einer Kosmologischen Konstanten (rote Kurve). Im Falle $w = -2/3$ ist die Expansionskurve zudem über weite Strecken fast eine Gerade und der „Vorsprung“ bleibt lange erhalten.*

Parameter dargestellt. Äußerst überraschend zeigt sich, dass im Falle $w = -2/3$ das Universum zu Beginn wesentlich stärker expandiert als das klassische ΛCDM - Universum - trotz gleicher Massenparameter. Erst im Laufe der Entwicklung holt das ΛCDM Universum langsam auf. Der einfache Grund für dieses Verhalten ist aber schon in der Bewegungsgleichung (4.81)

$$\zeta'^2 = \frac{\Omega_m}{\zeta} + (1 - \Omega_m) \left(\frac{1}{\zeta}\right)^{3w+1}$$

zu sehen. Im Falle $w = -1$ wächst der Term proportional $1 - \Omega_m$ wie ζ^2, aber im Falle $w = -2/3$ ist er direkt proportional zu ζ. Das erklärt qualitativ das unterschiedliche Verhalten der beiden Modelle im frühen ($\zeta \to 0$) wie im späteren Entwicklungsstadium ($\zeta \to 1$). Wir können dieses *fast paradoxe Ergebnis* zusammenfassen mit der Feststellung, dass obwohl

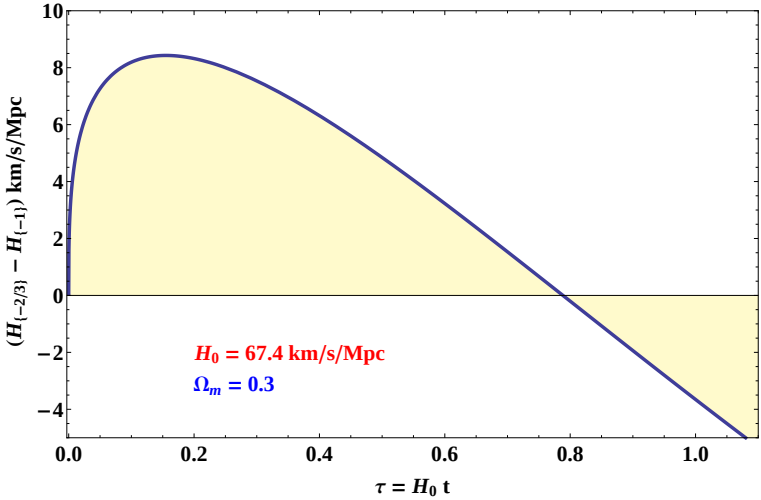


Fig. 4.11: *Die Differenz $H_{-2/3} - H_{-1}$ der beiden Hubble-Lemaître Parameter in einem Universum mit $w = -2/3$ und einem mit $w = -1$. In beiden Fällen sind H_0 (Ergebnis Planck-Satellit 2018) und Ω_m identisch. Da die Expansionsdynamik mit $w = -2/3$ zu Beginn schneller erfolgt als im entsprechenden klassischen ΛCDM-Modell mit $w = -1$, tritt hier ein „Überschuss“ von maximal etwa 8 km/s/Mpc auf. Allerdings nimmt die relative Expansionsrate im Modell mit $w = -2/3$ in der Spätphase ab, so dass die Differenz sogar negativ wird und sich so das ΛCDM Modell schließlich schneller ausdehnt.*

der Zustandsparameter $w = -2/3$ gegenüber dem Wert $w = -1$ näher an dem kritischen Wert $w_c = -1/3$ liegt, bei dem in der Spätphase eines Universums keine beschleunigte Expansion mehr stattfindet, expandieren in der Frühphase alle Universen mit $-1 < w < -1/3$ stärker „beschleunigt“ “ als das klassische ΛCDM - Modell. In Fig.(4.11) wird der dynamische Unterschied in den beiden dazugehörigen Hubble-Lemaître Parametern sogar quantitativ deutlicher. Im klassischen Modell mit $w = -1$ gilt für den Hubble-Lematrîre Parameter als Funktion der „kosmischen Zeit“ τ

$$H_{-1}[\tau] = H_0 \sqrt{1 - \Omega_m} \coth\left[\frac{3}{2}\sqrt{1 - \Omega_m}\,\tau\right].$$

Im Falle $w = -2/3$ lautet die entsprechende Abhängigkeit

$$H_{-2/3}[\tau] = H_0 \, \frac{(1-\Omega_m)^{3/4}}{\Omega_m^{1/4}} \left\{ \frac{1}{u^{3/2}} + \frac{2\,u^{1/2}}{7} - \frac{26\,u^{5/2}}{539} + \right.$$
$$\left. + \frac{32\,u^{9/2}}{3773} - \frac{25070\,u^{13/2}}{16559697} + \dots \right\}$$

Wir nehmen für H_0 das Ergebnis des Planck-Satelliten aus dem Jahre 2018, der aus Messungen im frühen Universum auf den heutigen Parameter durch „Hochrechnung“ auf Grundlage des ΛCDM Modelles den Wert $H_0 = \mathbf{67.4 \pm 0.5}$ km/s/Mpc erhalten hatte. Rechnet man mit diesem Parameter die Expansion des Universums mit der Prämisse von $w = -2/3$, so liegt der H-Parameter zu Beginn der Expansion etwa um **8** km/s/Mpc über dem klassisch zu erwartenden Wert des ΛCDM Modelles. Erst in späteren Phasen „überholt“ das klassische Modell mit $w = -1$ das Vergleichsmodell mit $w = -2/3$.

Die Ergebnisse scheinen einen deutlichen Hinweis dahingehend auszusprechen, dass die seit 2019 immer stärker werdende *Diskrepanz* („*tension*“) zwischen der Expansionsrate im frühen Universum (Planck-Daten) und der Spätphase des Universums (SNe-1A Daten) auf einem falschen Wert des w - Parameters und seiner zeitlichen Entwicklung beruhen. Allerdings kann der w Parameter nicht über die ganze Epoche den konstanten Wert $-2/3$ gehabt haben, denn auch heute misst man auf der Grundlage des ΛCDM Modelles einen rätselhaften Überschuss von etwa 7 km/s/Mpc, wenn man die Auswertungen von A. Riess et al. aus dem Jahre 2019 bezüglich der heutigen Hubblekonstante von $\mathbf{74.0 \pm 1.4}$ km/s/Mpc als signifikant ansieht. Der Wert aus dem Planck-Satelliten von etwa $\mathbf{67.4 \pm 1.4}$ km/s/Mpc ist allerdings eine *Hochrechnung* aus den Anfangsdaten des sehr frühen Universums auf der Grundlage des ΛCDM Modelles zum heutigen Zeitpunkt und somit stark von den Prämissen des komplizierten Modelles abhängig.

4.8 Der dynamische Zustand w[t]

Im vorhergehenden Kapitel haben wir festgestellt, dass ein Modell mit dem Zustand $w = -2/3$ zu Beginn seiner Entwicklung stärker beschleunigt als das klassische ΛCDM Modell des Universums. Es ist aber sehr

wahrscheinlich, dass im Laufe der Expansion der Parameter $w[0] = -2/3$ - gültig für niedrige Energiedichten - langsam abfällt, wie wir es im Ringkosmos schon berechnet haben. Um diese Änderung der Zustandsgleichung genauer quantitativ zu beschreiben, bleibt uns nicht anderes übrig, als in der *Hubble-Lemaître* Funktion (4.109)

$$\zeta'^2 = \frac{\Omega_m}{\zeta} + (1 - \Omega_m)\,\frac{\chi_e[\zeta]}{\zeta} \tag{4.142}$$

die *positiv* normierte Energie $\chi_e[\zeta]$ in eine Potenzreihe nach dem dimensionslosen Skalenfaktor ζ zu entwickeln. Da wir im frühen Universum $w = -2/3$ annehmen wollen, ergibt sich als physikalisch sinnvoller Ansatz mit $\chi_e[\zeta] \equiv \chi_e[-\zeta]$

$$\chi_e[\zeta] = c_2\,\zeta^2 + c_4\,\zeta^4 + c_6\,\zeta^6 + \ldots \tag{4.143}$$

Aufgrund der Randbedingung $\chi_e[1] = 1$ gilt für die Koeffizienten die Normierungsbedingung

$$c_2 + c_4 + c_6 + \ldots = 1.$$

Die dynamischen Parameter, die man durch astronomische Beobachtungen eingrenzen kann, sind neben dem Hubble-Lemaître Parameter H_0

$$\frac{\zeta''[1]}{\zeta'[1]^2} = -\frac{1}{2}\,(1 - (1 - \Omega_m)\,\chi_e'[1])\,, \tag{4.144}$$

$$\frac{\zeta'''[1]}{\zeta'[1]^3} = 1 - (1 - \Omega_m)\,\chi_e'[1] + \frac{1}{2}\,(1 - \Omega_m)\,\chi_e''[1]. \tag{4.145}$$

Der erste Parameter wird in der Kosmologie als „*Bremsparameter*“ bezeichnet, wobei auch das Minuszeichen weggelassen wird, wie im Buch von S. Weinberg aus dem Jahre 1972. Den zweiten Parameter könnte man im Deutschen als „*Ruckparameter*“ bezeichnen (im englischen Sprachraum „**jerk**“). Dieser Parameter ist in einem ΛCDM Modell mit $w = -1$ exakt gleich Eins. Gelingt es aus Beobachtungen, diesen „Ruckparameter“ auf einen Wert größer Eins festzulegen, dann ist es sehr wahrscheinlich, dass das Universum stärker als das Standardmodell *beschleunigt expandiert*.

Wir wollen jetzt aus rein mathematischen Prinzipien und physikalischen Überlegungen die einfachste Form der Funktion $\chi_e[\zeta]$ ableiten. Die drei Prinzipien sind:

- Im Grenzfall $\zeta \to 0$ soll $\chi_e[\zeta] \propto \zeta^2$ gelten. Dies garantiert im frühen Universum die Zustandsgleichung $w = -2/3$, die wir aus physikalischen Gründen (*first principles*) fordern. Zudem soll aufgrund der definierten Randbedingung $\chi_e[1] = 1$ gelten.

- Die Funktion $\chi_e[\zeta]$ soll eine gerade Funktion von ζ sein. Also gilt $\chi_e[+\zeta] = \chi_e[-\zeta]$.

- Bei einem bestimmten Skalenfaktor ζ_0 soll im Universum die zeitliche Änderung des Dichtekontrastes und damit auch des Skalenfaktors singulär werden. Die negative gravitative Energiedichte soll dann auch singulär werden (Analogie Ringkosmos: Paarfusion). Nach dem „Big Bang“ erleidet das Universum so bei einem endlichen Skalenfaktor einen „Hitzekollaps der Strukturen“. Im unkritischen Falle $\zeta_0 \to \infty$ soll das Modell in die Zustandsgleichung $w = -2/3 \equiv \mathit{konstant}$ übergehen.

Die einfachste analytische Funktion, welche diese Forderungen erfüllt, lautet

$$\boxed{\chi_e[\zeta] = \zeta^2 \, \frac{\zeta_0^2 - 1}{\zeta_0^2 - \zeta^2}} \tag{4.146}$$

Diese funktionale Abhängigkeit mit einer Polstelle garantiert, dass kurz nach dem **„Urknall“** im Universum $w = -2/3$ war und das nach einer gewissen Zeit bei $\zeta \equiv \zeta_0$ ein **„Endknall“ (final flash)** im komplexen Strukturnetz stattfindet. Nach neueren Daten, die mit Hilfe von Quasaren gewonnen wurden, könnte diese kritische Grenze schon bei etwa $\zeta_0 \approx \sqrt{2}$ liegen, also bei einem Skalenfaktor, der nur etwas mehr als 40% größer als der Heutige wäre. Bei diesem *Endblitz* stoppt die Expansion nach einer ruckartigen Endbeschleunigung zum maximalen Skalenfaktor ζ_0 und alle netzartigen Strukturen (*Galaxiencluster - Gespinst*) sind zu „fadenartigen heißen Singularitäten“ gesintert. Ein solche **Symmetrie** zwischen Anfangs - und Endzustand des Universum wäre in einem ΛCDM Modell nicht möglich.

Die Hubble-Lemaître Funktion lautet mit (4.146)

$$\zeta'^2 = \frac{\Omega_m}{\zeta} + (1 - \Omega_m) \, \frac{\zeta_0^2 - 1}{\zeta_0^2 - \zeta^2} \, \zeta. \tag{4.147}$$

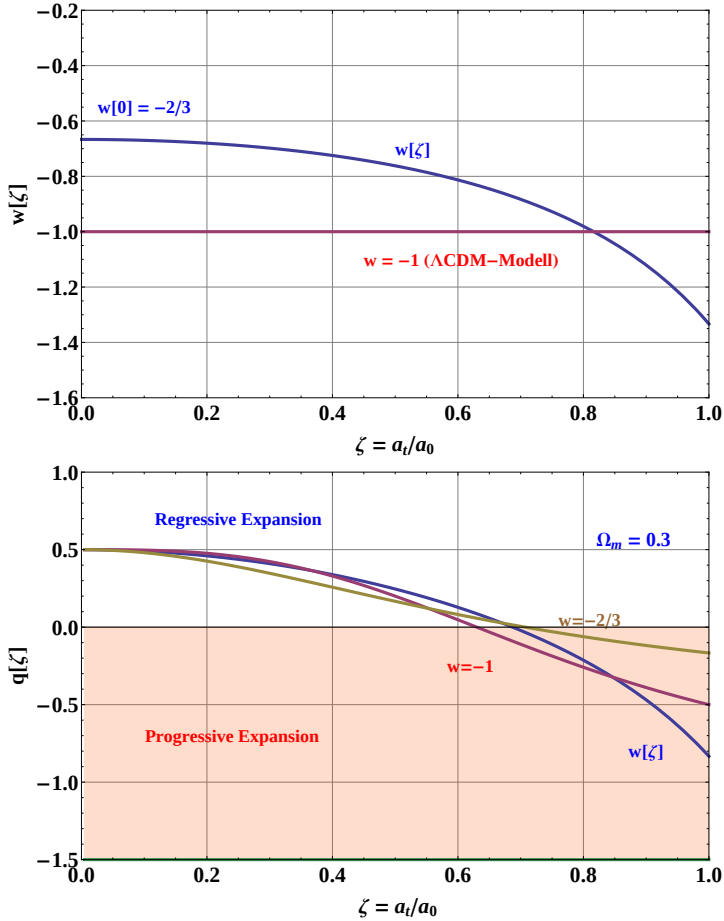


Fig. 4.12: *Die obere Figur zeigt den Verlauf von $w[\zeta]$ für das spezielle Energiepotential (4.146) und $\zeta_0 = \sqrt{2}$, welches das Hubble-Diagramm von Quasaren gut beschreibt ([167]), als Funktion des normierten Skalenfaktors ζ. Genau diesen Verlauf erwarten wir für den realen 3D-Kosmos - ganz analog wie im 1D-Ringkosmos. Als Vergleich wurde auch die Zustandsgleichung $w = -1$ dargestellt. Die untere Figur zeigt den „Bremsparameter" $q[\zeta]$ für den Masseparameter $\Omega_m = 0.3$. Ab einer kritischen Verdichtung wechselt die Raummutation von einer regressiven zu einer progressiven Expansion. In beiden Figuren wurde der Wert $\zeta_0 = \sqrt{2}$ angenommen.*

Eine indirekte Lösung dieser Differentialgleichung kann durch die erste *Appellsche hypergeometrische Funktionen* dargestellt werden. Aus dem Differential

$$\sqrt{\frac{\zeta\,(\zeta_0^2-\zeta^2)}{\Omega_m\,\zeta_0^2+((1-\Omega_m)\,\zeta_0^2-1)\,\zeta^2}}\;d\zeta = d\tau \tag{4.148}$$

folgt für die Entwicklungsgeschichte des Skalenfaktors im Universum die Gleichung

$$\boxed{\tau = \frac{2\,\zeta^{3/2}}{3\,\sqrt{\Omega_m}}\;\mathbf{F_1}\left[\tfrac{3}{4},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{7}{4},\frac{\zeta^2}{\zeta_0^2},\frac{1-(1-\Omega_m)\zeta_0^2}{\Omega_m}\frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}\right],} \tag{4.149}$$

wobei $\mathbf{F_1}$ die erste Appellsche hypergeometrische Funktion mit vier Parametern und zwei Variablen bedeutet. Im Grenzfall $\zeta_0 \to \infty$ erhalten wir wieder ein Universum mit der konstanten Zustandsgleichung $w = -2/3$ und der analytischen Beschreibung (4.140)

$$\zeta^{3/2}\;{}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4},\tfrac{7}{4},-\frac{1-\Omega_m}{\Omega_m}\,\zeta^2\right] = \frac{3}{2}\,\sqrt{\Omega_m}\,\tau, \tag{4.150}$$

Hier expandiert das Universum über alle Grenzen von Raum und Zeit.

Wichtig ist noch die Frage nach dem Verhalten des skalaren ψ Feldes, welches in unserem Modell ja proportional dem Dichtekontrast der sich bilden Strukturen im Universum ist. Nach (4.111) und (4.146) gilt

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \sqrt{\frac{2\,(1-\Omega_m)\,\zeta_0^2\,(\zeta_0^2-1)}{\zeta\,(\zeta^2-\zeta_0^2)^2}}. \tag{4.151}$$

Wird jetzt das Differential $d\tau$ mit (4.148) durch $d\zeta$ ersetzt, so ergibt sich das elliptische Integral

$$d\psi = \zeta_0\,\sqrt{\frac{2\,(1-\Omega_m)\,(\zeta_0^2-1)}{(\zeta_0^2-\zeta^2)(\Omega_m\,\zeta_0^2+((1-\Omega_m)\,\zeta_0^2-1)\,\zeta^2)}}\;d\zeta \tag{4.152}$$

Im nächsten Kapitel wollen wir durch eine spekulative *analytische* Invarianz - Betrachtung den kritischen Skalenfaktor ζ_0 als Funktion von Ω_m bestimmen.

4.9 Ein spekulatives X-CDM Modell

Die im vorhergehenden Kapitel unter minimalen Annahmen hergeleitete dynamische Entwicklungsgleichung (4.147) enthält den Skalenparameter ζ_0, der als freier Parameter in das Modell eingeht. Er beschreibt die endgültige maximale Ausdehnung unseres spekulativen Kosmosmodelles. Schaut man sich aber die Lösung (4.149) genauer an, so fällt eine *unschöne Asymmetrie* zwischen den beiden Variablen dieser Funktion auf. Es liegt hier der *hypothetische Gedanke* nahe, den freien Parameter ζ_0 durch eine weitere physikalische Überlegung zu eliminieren. Wir gehen dabei - ganz im Geiste der Einsteinschen Gravitationstheorie - von einer **Selbstähnlichkeit oder Ununterscheidbarkeit der beiden singulären Endzustände** aus[5]. Wir fordern also *spekulativ* beim Übergang zu den beiden singulären Zustände $\zeta \to 0$ und $\zeta \to \zeta_0$ das gleiche asymptotisch - analytische Verhalten. Es gilt um die beiden Polstellen

$$\zeta'^2 = \frac{\Omega_m}{\zeta} + \ldots, \qquad \zeta \to 0$$

$$\zeta'^2 = \frac{(\zeta_0^2 - 1)(1 - \Omega_m)}{2\,(\zeta_0 - \zeta)} + \ldots, \qquad \zeta \to \zeta_0$$

Aus der geforderten Selbstähnlichkeit folgt die Bedingung

$$\frac{1}{2}(\zeta_0^2 - 1)(1 - \Omega_m) \equiv \Omega_m.$$

Aus dieser *spekulativen* Identitätsforderung zwischen Anfangs - und Endzustand des Universums folgt die bemerkenswert schöne Relation

$$\boxed{\zeta_0 = \sqrt{\frac{1 + \Omega_m}{1 - \Omega_m}}, \quad \Omega_m = \frac{\zeta_0^2 - 1}{\zeta_0^2 + 1}.} \tag{4.153}$$

Diese Formel bestimmt den maximalen Skalenfaktor des Universums direkt aus dem Massenparameter Ω_m und umgekehrt. Mit $\Omega_m = \mathbf{1/3}$ folgt unmittelbar $\zeta_0 = \sqrt{2} \approx \mathbf{1.414}$. Der heutige Skalenfaktor muss sich

[5] Ontologisch ist das Universum eine „Singularität“. Anfangs - und Endzustand sollen identisch sein.

also nur noch um etwa 42% erhöhen, bis die Endsingularität einsetzt und die Expansion nach einer singulären Endbeschleunigung abrupt zum Stillstand kommt. Dies gilt natürlich nur, *wenn unsere mathematische Spekulation der Wahrheit entspricht.* Mit (4.147) folgt jetzt für die Hubble-Lemaître Funktion

$$\zeta'^2 = \frac{\Omega_m}{\zeta}\,\frac{1+\zeta^2/\zeta_0^2}{1-\zeta^2/\zeta_0^2}. \tag{4.154}$$

Die dynamische Entwicklung folgt jetzt der symmetrisierten Formel

$$\boxed{\zeta^{3/2}\,\mathbf{F_1}\left[\frac{3}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{7}{4},\frac{\zeta^2}{\zeta_0^2},-\frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}\right]=\frac{3}{2}\,\sqrt{\Omega_m}\,\tau,} \tag{4.155}$$

wobei ζ_0 als Funktion von Ω_m durch (4.153) festliegt. Der w-Parameter ergibt sich mit (4.63) zu

$$w[\zeta] = -\frac{2}{3}\left(1-\frac{\zeta^2}{\zeta_0^2}\right)^{-1}. \tag{4.156}$$

Auch der *Bremsparameter* kann jetzt auf die Form

$$q[\zeta] = \frac{1}{2} - \frac{(\zeta/\zeta_0)^2}{1-(\zeta/\zeta_0)^4} \tag{4.157}$$

gebracht werden. Der Übergang von einer *regressiven* zu einer *progressiven Expansion* erfolgt bei dem kritischen Skalenfaktor

$$\zeta_c = \sqrt{\sqrt{5}-2}\;\zeta_0 \equiv \sqrt{\sqrt{5}-2}\;\sqrt{\frac{1+\Omega_m}{1-\Omega_m}}. \tag{4.158}$$

Erste Abschätzungen zeigen, dass dieser Umkehrpunkt etwas später im Universum einsetzt als nach den Prämissen des Standardmodelles.

Sehr wichtig ist auch das Verhalten der skalaren ψ Funktion, welche das zeitliche Anwachsen des Dichtekontrastes beschreibt und durch (4.152) gegeben ist. Mit (4.153) folgt das überraschende Resultat

$$d\psi = \frac{2\,\zeta_0\,d\zeta}{\sqrt{\zeta_0^4-\zeta^4}}. \tag{4.159}$$

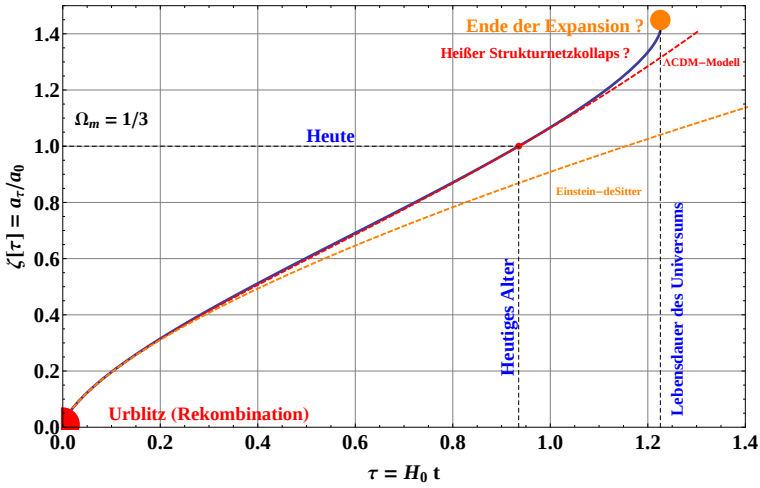


Fig. 4.13: *Die Entwicklung des Skalenfaktors in unserem expandierenden Kosmosmodell, berechnet nach (4.155) mit $\Omega_m = 1/3$. Zum Vergleich ist die Kurve des ΛCDM Modelles (rot gestrichelt) und des einfachen Einstein-deSitter Modelles (orange gestrichelt) eingezeichnet. Das spekulative Modell unterscheidet sich kaum vom klassischen ΛCDM Modell. Darum gibt es hier beim Strukturwachstum auch keine ausgeprägte S8-Anomalie. Bemerkenswert ist die Existenz einer zweiten gravitativen Singularität, bei welcher die zeitliche Änderung des Skalenfaktors abrupt über alle Grenzen steigt. Das Skalar ψ (Dichtekontrast) zeigt bei einem endlichen Wert ein ähnliches singuläres Verhalten.*

Die Abhängigkeit des Skalenfaktors ζ von ψ wird in unserem Modell somit durch die *Lemniskatische Funktion* dargestellt. Der maximale Wert in der Endsingularität $\zeta = \zeta_0$ lautet

$$\psi_0 = \int_0^{\zeta_0} \frac{2\,\zeta_0\, d\zeta}{\sqrt{\zeta_0^4 - \zeta^4}} = \frac{\pi}{\mathbf{M}[\sqrt{2}, 1]}, \tag{4.160}$$

wobei $\mathbf{M}$ das arithmetisch - geometrische Mittel der beiden Argumente bedeutet. Mit der *lemniskatischen Sinusfunktion* $\mathbf{sl}[z]$ von GAUSS gilt dann die elegante Darstellung

$$\zeta[\psi] = \zeta_0\, \mathbf{sl}\left[\frac{\psi}{2}\right] \equiv \sqrt{\frac{1+\Omega_m}{1-\Omega_m}}\, \mathbf{sl}\left[\frac{\psi}{2}\right]. \tag{4.161}$$

Die elliptische Funktion $\mathbf{sl}[z]$ kann im Intervall $0 \le u \le \pi/\mathbf{M}[\sqrt{2}, 1]$ mit

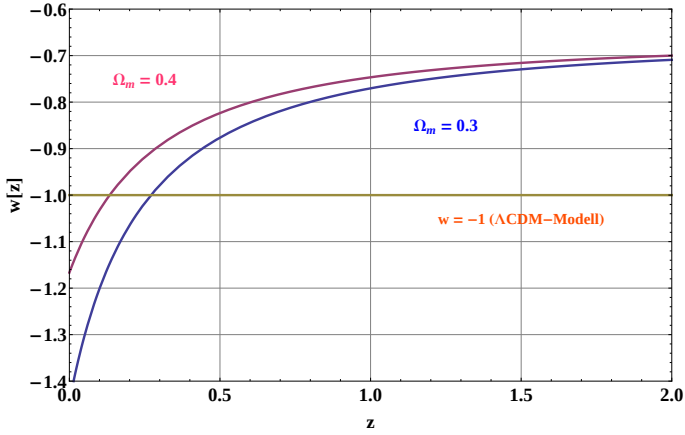


Fig. 4.14: *Die Zustandsgleichung (EOS) des Universums, beschrieben mit dem w - Parameter ($w = P_\epsilon/\varrho_\epsilon$), als Funktion der Rotverschiebung z. Je nach dem Massenparameter Ω_m ist der Verlauf zum heutigen Zeitpunkt $z \to 0$ unterschiedlich. Für $z \to \infty$ gilt der asymptotische Wert $w = -2/3$.*

der *Weierstrasschen* Funktion $\wp[z]$ im harmonischen Fall ($g_2 = 4, g_3 = 0$) durch

$$\mathbf{sl}[u] = \frac{1}{\sqrt{\wp[u, \{4, 0\}]}} \tag{4.162}$$

dargestellt werden. Mit diesem eleganten Ergebnis sind wir in der Lage, auch die Potentialfunktion $\mathbf{V}[\psi]$ exakt zu berechnen und mit dem Zustand $w = -2/3 = konstant$ zu vergleichen. Man erhält mit (4.100) , (4.108) und (4.153)

$$\boxed{\mathbf{V}[\psi] = \frac{1}{(1 + \mathbf{sl}[\psi/2])^2} + \frac{1}{(1 - \mathbf{sl}[\psi/2])^2} - 2.} \tag{4.163}$$

Entwickeln wir diese Potentialfunktion nach dem Skalar ψ, so folgt

$$\mathbf{V}[\psi] = \frac{3}{2}\,\psi^2 + \frac{5}{8}\,\psi^4 + \frac{1}{5}\,\psi^6 + \ldots \tag{4.164}$$

Hier kann man sehr schön sehen, dass der quadratische Term mit dem Vorfaktor 3/2 die Zustandsgleichung $w = -2/3$ kurz nach dem „Urknall“

reproduziert. Ein Vergleich mit (4.135) zeigt zudem das stärkere Ansteigen des Potentials für höhere Potenzen in ψ. Es gilt so die Beziehung

$$\chi[\psi] = -\frac{2\,\zeta^2}{\zeta_0^2 - \zeta^2} \equiv -\frac{2\,\mathbf{sl}[\psi/2]^2}{1 - \mathbf{sl}[\psi/2]^2}. \tag{4.165}$$

Diese Größe ist proportional der Energiedichte während der Strukturbildung und repräsentiert somit die sogenannte „Dunkle Energie“. Das nichttriviale Funktionenpaar (4.163) und (4.165) erfüllt natürlich die Differentialgleichung (4.66), also

$$(\mathbf{V}[\psi] + \chi[\psi])\,(-1 + \mathbf{V}[\psi] + 2\,\chi[\psi] + 2\chi''[\psi]) = \mathbf{V}'[\psi]\,\chi'[\psi].$$

Die Lagrangedichte unseres neuen dynamischen Modelles *jenseits des Standardmodelles* lautet anstatt (4.122) jetzt

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{a}^2 + \frac{1}{2}\,a^2\,\dot{\psi}^2 + \frac{4\pi G m}{3\,a}\left\{\frac{1}{(1 + \mathbf{sl}\left[\frac{\psi}{2}\right])^2} + \frac{1}{(1 - \mathbf{sl}\left[\frac{\psi}{2}\right])^2} - 1\right\}. \tag{4.166}$$

Im Gegensatz zu (4.122) gibt es neben der Anfangssingularität $a = 0$ auch eine Endsingularität bei einem endlichen Skalenfaktor a und endlichem ψ.

Unser spekulatives Modell würde es auch erlauben, mit (4.155) sowohl das *momentane Alter des Universums* als auch - und dies als Novum - die zu erwartende *Lebensdauer des Universums* zu berechnen. Das Letztere ist in einem ΛCDM Modell natürlich nicht möglich, weil dort das Universum in der Ewigkeit ohne zeitliche Grenze weiterexistiert! Für das heutige Alter T_A ergibt sich mit $\zeta = 1$ und (4.155)

$$T_A = \frac{2}{3\,H_0\,\sqrt{\Omega_m}}\,\mathbf{F_1}\left[\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{4}, \tfrac{1-\Omega_m}{1+\Omega_m}, -\tfrac{1-\Omega_m}{1+\Omega_m}\right]. \tag{4.167}$$

Für die Lebensdauer T_L gilt dagegen mit $\zeta = \zeta_0$ und den Eigenschaften der *Appellschen oder Hornschen Funktionen*

$$T_L = \frac{2}{3\,H_0\,\sqrt{\Omega_m}}\left(\frac{1+\Omega_m}{1-\Omega_m}\right)^{3/4}\mathbf{F_1}\left[\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{7}{4}, 1, -1\right]. \tag{4.168}$$

oder

$$T_L = \frac{2\,\mathbf{M}[\sqrt{2}, 1]}{5\,H_0\,\sqrt{\Omega_m}}\left(\frac{1+\Omega_m}{1-\Omega_m}\right)^{3/4}{}_{\mathbf{2}}\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{9}{4}, -1\right]. \tag{4.169}$$

Wir wollen diese Zeitskalen konkret abschätzen. Momentan (im Jahre 2020) gibt es zwei widersprüchliche Zahlenwerte für den heutigen Hubble-Lemaître Parameter. Der aus lokalen astronomischen Beobachtungen deduzierte Wert beträgt $H_0 = \mathbf{74.0}\, km/s/Mpc$. Wir folgen hier dem Wert des Planck-Satelliten und setzen

$$H_0 = \mathbf{67.4}\, km/s/Mpc.$$

Da $1\, pc = \mathbf{3.0857 * 10^{16}}\, m$ sind, folgt so für die „*Hubblezeit*“

$$1/H_0 = \mathbf{14.5 * 10^9}\, Jahre.$$

Mit $\Omega_m = \mathbf{1/3}$ ergibt sich so für das Alter des Universums

$$T_A = \mathbf{13.6 * 10^9}\, Jahre.$$

Die Zahlen zeigen, dass unser Modell fast identische Zeitskalen wie das klassische ΛCDM Modell liefert. Natürlich ist dies von Ω_m abhängig. Für die vermeidliche Lebensdauer T_L des Universums ergibt sich analog

$$T_L = \mathbf{17.8 * 10^9}\, Jahre.$$

Spricht unser hypothetisches Modell die „Wahrheit“, so müssen wir in etwa 4 Milliarden Jahren eine plötzlich einsetzende „**Struktursingularität**“ erwarten. Dieses Phänomen kann das klassische Standardmodell nicht vorhersagen. Die Zeitskalen hängen natürlich etwas von dem angenommen Massenparameter Ω_m ab. Wichtig ist hier das Ergebnis, dass unser dynamischer Kosmos, der mit $w = -2/3$ seine Expansion beginnt, im Falle $w \to -\infty$ in endlicher Zeit bei einem endlichen Skalenfaktor eine zweite Singularität erlebt. Was danach passiert, ist unklar. Wahrscheinlich ist aber eine dann einsetzende Implosion.

Doch müssen wir das so diskutierte Modell mit Vorsicht betrachten, da nach der Relativitätstheorie es keine „*Punktmassen* „ gibt und so die gravitative Wechselwirkungsenergie beim Verschmelzen zweier „*black holes*“ nicht singulär unendlich wird! Das spekulative Modell zeigt aber auf, dass unter bestimmten Prämissen die beschleunigte Expansion - zumindest im Newtonschen Bild der Gravitation - zum plötzlichen Stillstand gebracht werden kann.

4.10 Strukturwachstum und Dunkle Materie

Das klassische Λ-CDM Modell der Standard-Kosmologie hat zwei sehr starke Argumente zugunsten der Existenz von **„Dunkler Materie“**:

- **Problem A:** Das Wachstum der Dichtekontrastfunktion D_+ ist im Rahmen der Newton'schen Gravitation zu langsam ($\propto t^{2/3}$), um aus den sehr schwachen Dichtefluktuationen von einigen 10^{-5} zu Beginn der Rekombination bei Rotverschiebungen von $\mathbf{z} \sim 1000$ auf den heutigen Wert von über 1 zu schließen.

- **Problem B:** Die Lage der drei ersten *akustischen Peaks* des Powerspektrums der Kosmischen Hintergrundstrahlung, die vom **WMAP** -Satelliten gemessen wurden, können ebenfalls nicht mit normaler Newton'scher Gravitation erklärt werden, da diese Gravitation gegenüber dem Schalldruck ohne *Renormierung* zu schwach ist.

Beide Punkte werden als Argument für die Existenz dunkler kalter Materie (**CDM**) gewertet. Bezweifelt man die Existenz „Dunkler Materie“, so muss man diese beiden Argumente nachhaltig entkräften.

Unter der Prämisse, dass die beschleunigte Expansion allein durch Strukturbildung hervorgerufen wird und der Eos - Parameter schon kurz nach dem „big bang“ bei $w \approx -2/3$ lag, expandiert das Universum in unserem Modell zu Beginn etwas schneller als im klassischen ΛCDM-Modell.

Die allgemeine linearisierte Gleichung für die gravitative Strukturbildung in einem expandierenden Raum lautet mit dem renormierten Gravitationspotential (4.14) in Erweiterung von (3.59) (noch ohne Schallwellen)

$$\boxed{\ddot{\psi} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\psi} = 2\pi\, w\,(3w-1)\,\frac{Gm}{a^3}\,\psi.} \tag{4.170}$$

In dieser Gleichung kommt sehr schön die Kopplung zwischen Strukturbildung und Expansion zum Ausdruck. Will man in diesem klassischen Modell akustische Wellenausbreitung berücksichtigen, so transformiert sich die Gleichung für die *räumliche* Fouriertransformierte $\psi[\mathbf{k}]$ der Dich-

tekontrastfunktion mit $w = -2/3$ in

$$\boxed{\ddot{\psi}_{\mathbf{k}} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\psi}_{\mathbf{k}} + \left(\frac{c_s^2|\mathbf{k}|^2}{a^2} - 4\pi\,\frac{Gm}{a^3}\right)\psi_{\mathbf{k}} = 0.} \tag{4.171}$$

Für eine vorgegebene *dimensionslose* Wellenzahl $|\mathbf{k}|$ beschreibt diese *Jeans-Gleichung* in einfachster Weise das Wachstum von *akustischen Oszillationen* in einem klassischen Gas mit der Schallgeschwindigkeit c_s. Weiter unten werden wir das zeitliche Verhalten der Größe $\psi_{\mathbf{k}}$ in einem idealisierten Modell genauer untersuchen.

Asymptotisch für $t \to 0$ gilt für den Skalenfaktor nach dem vorhergehenden Kapitel

$$a = \left(6\pi\, Gm\, t^2\right)^{1/3} \tag{4.172}$$

Dann besitzt (4.170) die beiden linear unabhängigen Lösungen

$$\begin{aligned} \psi_+ &\propto t^{-w} \\ \psi_- &\propto t^{+w-1/3}. \end{aligned} \tag{4.173}$$

Die erste Lösung beschreibt einen Dichtekontrast, der bei $w < 0$ mit der Zeit zunimmt, die zweite dagegen eine Lösung, die mit der Zeit abnimmt. Da im frühen Universum kurz nach der Rekombination wahrscheinlich $w = -2/3$ galt, muss der Dichtekontrast mit $\propto t^{2/3}$ zugenommen haben.

Das Standardmodell und auch unser modifiziertes Modell haben jetzt folgendes Problem: Man argumentiert gewöhnlich so, dass die Temperaturfluktuationen der kosmischen Hintergrundstrahlung so gering sind, dass die mit ihnen einhergehenden Dichtefluktuationen niemals den heutigen Dichtekontrast allein durch gravitative Instabilitäten erklären könnten. Um diese Diskrepanz zu erklären, führt man – ganz im Widerspruch zum Prinzip *Occams Razor* – einen komplizierten Prozess unter Mitwirkung von „exotischer dunkler Materie“ ein. Es spricht aber einiges dafür, dass diese exotische '*Dunkelmaterie* im frühen Kosmos nichts anderes als zahlreiche **black holes** waren oder sind - die nach der Rekombination sofort als Kondensationskeime für die Entstehung von Galaxien dienten. Inwiefern die heutige *Dunkelmaterie* aufgrund anomaler Rotationskurven von Galaxien im späten Kosmos *schwarze Löcher* darstellen, bedarf weiterer Klärung.

Unter Hintergrundstrahlung versteht man die kosmische Mikrowellenstrahlung oder *Cosmic Microwave Background Radiation* (CMBR,

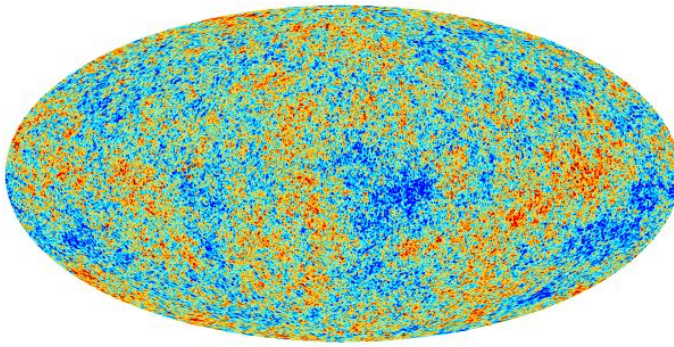


Fig. 4.15: *Die Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung nach den vorläufigen Daten des Planck - Satelliten 2013. Da diese Temperaturfluktuationen bei der Rotverschiebung* $\mathbf{z} \approx 1000$ *nur bei etwa* 5×10^{-5} *liegen, benötigt man eine Dichtekontrastverstärkung von fast* 10^5*, um die heutigen Strukturen im Kosmos zu erklären. In der Standardkosmologie wächst aber der Dichtekonstrast proportional zum Skalenfaktor, so dass eine Diskrepanz von einem Faktor 100 -1000 entsteht. Man postuliert hierzu CDM (Dunkler kalter Materie), welche für die normale baryonische Materie „Potentialmulden" („black holes") zur Verfügung stellen. Alternativ wäre es auch möglich, dass eine gewisse Anzahldichte von „black holes" schon im „big bang" vorhanden war. (Credits: ESA - MPI Konsortium; Mollweide – Babinet Projektion)*

oft auch nur CMB). Sie ist ein starker Beleg für die „Urknalltheorie" (Standardmodell) und stammt aus der Zeit etwa 380.000 Jahre nach dem Urknall. Vor diesem Zeitpunkt standen Strahlung und Materie im thermischen Gleichgewicht. Infolge der Expansion des Universums sanken die Temperatur und die Dichte des gekoppelten Strahlungs – Materie – Gemisches mit der Zeit, bis schließlich bei einer Temperatur von etwa 3000 Kelvin Protonen und Elektronen elektrisch neutralen Wasserstoff bilden konnten. Diesen Zeitpunkt bezeichnet man als *Rekombination*. Das Fehlen freier Elektronen und Protonen führte dazu, dass die Strahlung nicht mehr durch Thomson – Streuung von Photonen mit der Materie wechselwirken konnte – das Universum wurde „durchsichtig". Die weitergehende Expansion des Universums verursachte eine „Dehnung" der Wellenlänge der vorhandenen Photonen, also eine *Rotverschiebung*. Wir beobachten daher diese Photonen heute als kosmische Hintergrundstrahlung im Mikrowellenbereich. Sie ist in jeder Richtung des Himmels auf normalen Skalen fast perfekt gleichförmig und nicht durch Überlagerung einzelner

Quellen entstanden. Die Strahlung hat als Folge des thermischen Gleichgewichts vor der Rekombination das fast perfekte Intensitätsspektrum eines *schwarzen Körpers* mit einer Temperatur von heute

$$T_0 = \mathbf{2.725} \pm \mathbf{0.002}\,[K] \tag{4.174}$$

Die Rotverschiebung **z** der Hintergrundstrahlung beträgt

$$\mathbf{z} = \mathbf{1089} \pm \mathbf{0,1} \tag{4.175}$$

und jeder Kubikzentimeter des freien Weltraums enthält zirka *400 Photonen der Hintergrundstrahlung.*

Messungen der Satelliten COBE wie WMAP haben nun gezeigt, dass die schwarze Körper Temperatur der Hintergrundstrahlung nicht *exakt* gleichförmig über die Himmelskugel verteilt ist, sondern es gibt ein äußerst kleine Temperaturfluktuation der Größenordnung

$$\frac{\Delta T[\mathbf{r}]}{T} \approx \mathbf{10^{-5}}. \tag{4.176}$$

Aufgrund des **Sachs - Wolfe - Effektes** sind diese mit den Frequenzrotverschiebungen in einem Gravitationspotential $\mathbf{\Phi}$ gemäß

$$\frac{\Delta T[\mathbf{r}]}{T} = \frac{\Delta \nu}{\nu} \approx \frac{\mathbf{\Phi}}{c^2} \approx \left(\frac{v_G}{c}\right)^2 \tag{4.177}$$

verbunden. Die mittlere Dispersionsgeschwindigkeit v_G von Galaxien oder Galaxienhaufen untereinander beträgt etwa 1000 km/s.

Die Dichtefluktuationen um die mittlere globale kosmische Dichte $\bar{\varrho}[a,t] \equiv m/a[t]^3$ lässt sich im Falle kleiner Störungen als

$$\delta[\mathbf{r},t] = \bar{\varrho}[a,t]\ (1 + \delta[\mathbf{r},t]) \tag{4.178}$$

schreiben. Die Größe $\delta[\mathbf{r},t]$ kann in eine komplexe Fourierreihe

$$\delta[\mathbf{r},t] = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}}[t]\, e^{\imath\, \mathbf{k} \circ \mathbf{r}} \tag{4.179}$$

mit der Eigenschaft $\delta^{\star}_{\mathbf{k}} = \delta_{-\mathbf{k}}$ entwickelt werden. Im linearen Fall gilt eine Skalenunabhängigkeit des Strukturwachstums, ausgedrückt durch

$$\delta_{\mathbf{k}}[t] = \delta_{\mathbf{k}}\, \psi[t]. \tag{4.180}$$

Jede Mode wächst also in gleicher Weise mit der Zeit an, beschrieben durch die skalare Funktion $\psi[t]$. Im nichtlinearen Bereich gilt dies natürlich nicht mehr exakt, aber eine nichtlineare Entwicklungsgleichung (*Jeans-Gleichung*) kann eine mittlere Tendenz für die „versklavten Moden“ aufzeigen.

mit der Temperaturfluktuation gekoppelt sein. Es gilt

$$\boxed{\boldsymbol{\delta}[\mathbf{r},t] = 3\,\frac{\Delta T[\mathbf{r}]}{T}.} \tag{4.181}$$

Zum Zeitpunkt der Rekombination t_{rec} muss daher der Dichtekontrast ebenfalls in der Größenordnung

$$\boldsymbol{\delta}[\mathbf{r},t_{rec}] \approx \mathbf{3}\cdot\mathbf{10^{-5}} \tag{4.182}$$

gelegen haben. Die zeitliche Entwicklung der wellenartigen Dichteschwankungen geschieht in linearer Näherung nach der Formel

$$\boldsymbol{\delta}[\mathbf{r},t] = \psi[t]\,\boldsymbol{\delta}[\mathbf{r},t_{rec}]. \tag{4.183}$$

$\psi[t]$ ist hier die anwachsende Dichtekontrastfunktion der Dichtestörungen. Differentiation nach der Zeit liefert

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}[\mathbf{r},t] = \dot{\psi}[t]\,\boldsymbol{\delta}[\mathbf{r},t_{rec}]. \tag{4.184}$$

Elimination der Größe $\boldsymbol{\delta}[\mathbf{r},t_{rec}]$ aus beiden Gleichungen führt zu

$$\frac{\dot{\boldsymbol{\delta}}[\mathbf{r},t]}{\boldsymbol{\delta}[\mathbf{r},t]} = \frac{\dot{\psi}[t]}{\psi[t]} \equiv \dot{a}\,\frac{d\,\log[\psi]}{da} \equiv H[a]\,\frac{d\,\log[\psi]}{d\,\log[a]} \equiv H[a]\,\mathbf{f}[a]. \tag{4.185}$$

Dieser Faktor $\mathbf{f}$ hängt mit dem *Power Spektrum* $P[k,\mathbf{z}]$ der Dichtefluktuation im Universum („galaxy clustering“) über die Beziehung

$$P[k,\mathbf{z}] = \left(\frac{\psi[\mathbf{z}]}{\psi[\mathbf{0}]}\right)^2 P[k,0] \tag{4.186}$$

zusammen. Es ist sinnvoll, den Wachstumsfaktor nicht als Funktion der Zeit, sondern hier wegen (3.96) als Funktion der Rotverschiebung $\mathbf{z}$ bzw. des Skalenfactors $\mathbf{a}$ darzustellen.

Nach den obigen Ergebnissen und denen der vorhergehenden Abschnitte gilt für diese Funktion ψ_+ aber die Darstellung

$$\psi_+ \propto t^{-w}. \tag{4.187}$$

Für unsere Abschätzung nehmen wir jetzt an, dass der zweite „Dämpfungsfaktor“ ψ_- zum Zeitpunkt der Rekombination keine große Rolle mehr spielte. Wegen (3.96) und weil kurz nach dem „Urknall“ $a \propto t^{2/3}$ gilt, folgt

$$\boxed{\psi_+[\mathbf{z}] \propto (1+\mathbf{z})^{3\,w/2}.} \tag{4.188}$$

Nimmt man nun $w = -2/3$ an, so gilt für den Wachstumsfaktor $\psi_+[\mathbf{z}] = (1+\mathbf{z})^{-1}$ und speziell zum Zeitpunkt der Rekombination $\psi_+[1000] \approx 10^{-3}$. *Um also den heutigen Dichtekontrast von mindestens 1 oder höher zu erklären, hätte zum Zeitpunkt der Rekombination der Dichtekontrast schon bei etwa* 10^{-3} *oder* 10^{-2} *liegen müssen – im scharfen Widerspruch zur Beobachtung der Hintergrundstrahlung von* 10^{-5}*!*

Wir können diese Abschätzung in unserem Modell auch exakt rechnen. Denn hier folgt der Dichtekontrast als Funktion des Skalenfaktors der exakten Relation (4.159)

$$d\psi = \frac{2\,\zeta_0\,d\zeta}{\sqrt{\zeta_0^4 - \zeta^4}}. \tag{4.189}$$

Nach Integration ergibt sich

$$\psi[\zeta] = 2\,\frac{\zeta}{\zeta_0}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}; \left(\frac{\zeta}{\zeta_0}\right)^4\right] \tag{4.190}$$

Mit (4.153) gilt somit

$$\boxed{\psi[\zeta] = 2\,\zeta\,\sqrt{\frac{1-\Omega_m}{1+\Omega_m}}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}; \left(\tfrac{1-\Omega_m}{1+\Omega_m}\right)^2 \zeta^4\right]} \tag{4.191}$$

Zum Zeitpunkt der Rekombination hatte die Rotverschiebung den Wert $\mathbf{z}_{rec} \approx 1089$. Mit $\zeta = 1/(1+z)$ ergibt sich mit $\Omega_m = \mathbf{0.3}$

$$\psi[1089] = \mathbf{1.34} \times \mathbf{10^{-3}}. \tag{4.192}$$

Der heutige Wert ist dagegen

$$\psi[0] = \mathbf{1.52}. \tag{4.193}$$

Das skalare Feld ψ ist somit seit dem Zeitalter der Rekombination um den Faktor 1000 angestiegen. Dies steht allerdings ebenfalls im Widerspruch zu den Messungen der Temperaturanomalien von etwa $\mathbf{10^{-5}}$, die ja durch die Beziehung (4.181) mit den Dichtefluktuationen zusammenhängen sollen. Ein möglicher Ausweg aus diesem Dilemma ist die Annahme, dass es neben der normalen Materie eine andere „Materie“ gab, die sich schon auf den Dichtekontrast 10^{-3} kurz nach der Rekombination verdichtet hat. Hier liegt eine der Gründe für das fragwürdige $CDM - Modell$ des Universums.

Schwieriger sind die theoretischen Betrachtungen bei **Problem B**, der Lage der *akustischen Peaks im Powerspektrum der kosmischen Hintergrundstrahlung*. Im nächsten Kapitel sollen die Anfangsgründe dieses Problems aufgezeigt werden.

4.11 Die S_8 Anomalie und w= -2/3

Im Standardmodell der heutigen Kosmologie, speziell im ΛCDM Modell mit $w = -1$, sind Strukturwachstum und Expansion völlig entkoppelte dynamische Prozesse. Der expandierende Raum ist hier eine feste Bühne, deren Skala nach einer festen Zeitfunktion expandiert. Die gleichzeitig stattfindende Verklumpung der Galaxienhaufen hat keinen Einfluss auf die Dynamik des Skalenfaktors. Vom physikalischen global - energetischen Standpunkt ist klar, dass dies eine völlig unrealistische Vorstellung ist.

Zunächst ist daher ein Vergleich mit unserem nichtlinearen Kopplungsmodell nicht möglich, da zum Beispiel im Falle $w = -1$ der Skalenfaktor zwar exakt identisch wie im klassischen ΛCDM Modell anwächst, der Dichtekontrast aber in unserem Modell anstatt mit $t^{2/3}$ proportional mit der Zeit t anwächst. Nur der Fall $w = -2/3$ zeigt zumindest im frühen Kosmos konsistentes Verhalten im Wachstum des Skalenfaktors und der Dichtestrukturen. Die Gleichung (4.83) kann somit für Vergleiche der Wachstumsraten von Dichtekontrasten bei unterschiedlichen w-Parameter nicht herangezogen werden. Um Vergleiche mit unseren selbst-konsistenten Modellen zu vollziehen, müssen wir das Strukturwachstum vollständig *von der Expansion entkoppeln* und mit den *Prämissen des klassischen*

Standardmodelles neu berechnen. Die zugrundeliegende *allgemeine lineare* Entwicklungsgleichung (Jeansgleichung) für den Dichtekontrast ψ lautet ohne Rückkopplung zur Expansion (siehe (3.59), (4.16))

$$\ddot{\psi} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\psi} = \frac{4\pi G m}{a^3}\,\psi. \tag{4.194}$$

Sie wurde zum erstenmal von BONNOR im Jahre 1957 genauer studiert ([9]). Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht jetzt - völlig im Einklang mit dem Standardmodell und nicht nur für den speziellen Zustand $w = -2/3$ - immer der gravitative Term $4\pi G m/a^3\,\psi$. Nichtlineare Terme in ψ werden hier nicht betrachtet, da uns nur relative Wachstumstendenzen bei unterschiedlichen Expansionsgesetzen interessieren. Mit der Substitution

$$\tau = H_0\,t; \qquad \zeta = \frac{a}{a_0}; \qquad \Omega_m = \frac{8\pi G m}{3\,H_0^2\,a_0^3}$$

ergibt sich

$$\psi'' + 2\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)\psi' = \frac{3}{2}\,\Omega_m\,\zeta^{-3}\,\psi. \tag{4.195}$$

Die zeitliche Entwicklung des auf heute normierten Skalenfaktors ζ ist im klassischen Standardmodell der Literatur[6] durch die schon bekannte Formel (4.81) und ihre Ableitung

$$\zeta'^{\,2} = \frac{\Omega_m}{\zeta} + (1-\Omega_m)\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{3w+1},$$

$$2\,\zeta'' = -\frac{\Omega_m}{\zeta^2} - (3w+1)(1-\Omega_m)\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{3w+2}$$

gegeben. Der Strahlungsdruck ist nur im sehr frühen Universum wichtig und kann hier zunächst vernachlässigt werden. Im Standardmodell sind diese dynamischen Gleichungen für den Skalenfaktor unabhängig von einer *gleichzeitig stattfindenden Strukturbildung.*

Wir wollen jetzt die *Jeansgleichung* nicht als Funktion der kosmischen Zeit τ, sondern als Funktion des Skalenparameters ζ formulieren. Für die entsprechende Transformation benötigen wir

$$\psi' = \frac{d\psi}{d\zeta}\,\zeta'; \qquad \psi'' = \frac{d^2\psi}{d\zeta^2}\,\zeta'^{\,2} + \frac{d\psi}{d\zeta}\,\zeta''. \tag{4.196}$$

[6] In unserem wCDM-Modell gilt für $\tau \to 0$ $\psi \propto \tau^{-w}$, was im sogenannten wCDM-Modell der heutigen Literatur nicht der Fall ist

Wird dies in die obige Jeansgleichung eingesetzt, so folgt zunächst

$$\boxed{\zeta\,\zeta'^2\,\frac{d^2\psi}{d\zeta^2}+\left\{\zeta\zeta''+2\,\zeta'^2\right\}\,\frac{d\psi}{d\zeta}=\frac{3\,\Omega_m}{2\,\zeta^2}\,\psi.} \tag{4.197}$$

Gibt man in dieser Entwicklungsgleichung *ad hoc* eine bestimmte Expansionsdynamik $\zeta' = \mathbf{f}[\zeta]$ vor, so liefert die obige Schlüsselgleichung die entsprechende Evolutionsgeschichte der sich ausbildenden skaleninvarianten Strukturen ψ als Funktion des Skalenfaktors ζ. Der heutige Hubbleparameter H_0 geht in diese Gleichung nicht ein.

Setzen wir die dynamischen Terme des oben definierten wCDM-Modelles als reine Funktion des Skalenfaktors ζ ein, so folgt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}&\left(\Omega_m+\frac{1-\Omega_m}{\zeta^{3w}}\right)\,\frac{d^2\psi}{d\zeta^2}+\\&\frac{3}{2}\left(\frac{\Omega_m}{\zeta}+(1-w)\frac{1-\Omega_m}{\zeta^{3w+1}}\right)\frac{d\psi}{d\zeta}=\frac{3\,\Omega_m}{2\,\zeta^2}\,\psi.\end{aligned} \tag{4.198}$$

Hier machen wir zweckmäßig für die unabhängige Variable ζ die Substitution

$$u=\left(\frac{1}{\Omega_m}-1\right)\,\zeta^{-3w}. \tag{4.199}$$

Damit transformiert sich (4.198) in die wichtige Wachstumsgleichung

$$\psi+w\,u\,\left\{(1+u-3\,w(2+3\,u))\,\frac{d\psi}{du}-6\,u\,(1+u)\,w\,\frac{d^2\psi}{du^2}\right\}=0. \tag{4.200}$$

Die beiden linear unabhängigen Lösungen dieser Differentialgleichung am Punkte $u \to 0$ lauten mit speziellen hypergeometrischen Funktionen

$$\begin{aligned}\psi=&\,C_1\,u^{-\frac{1}{3w}}\,{}_2\mathbf{F_1}\left[-\tfrac{1}{3w},\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2w},1-\tfrac{5}{6w},-u\right]+\\&C_2\,u^{\frac{1}{2w}}\,{}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3w},\tfrac{1}{2w},1+\tfrac{5}{6w},-u\right].\end{aligned}$$

Die zweite Lösung ist hier kosmologisch nicht relevant und wir setzen $C_2 = 0$ setzen. Übrig bleibt so die wichtige Wachstumsfunktion für den Dichtekontrast $\psi[\zeta]$ gemäß

$$\psi_w[\zeta]=C\,\zeta\,{}_2\mathbf{F_1}\left[-\tfrac{1}{3w},\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2w},1-\tfrac{5}{6w},\left(1-\tfrac{1}{\Omega_m}\right)\,\zeta^{-3w}\right] \tag{4.201}$$

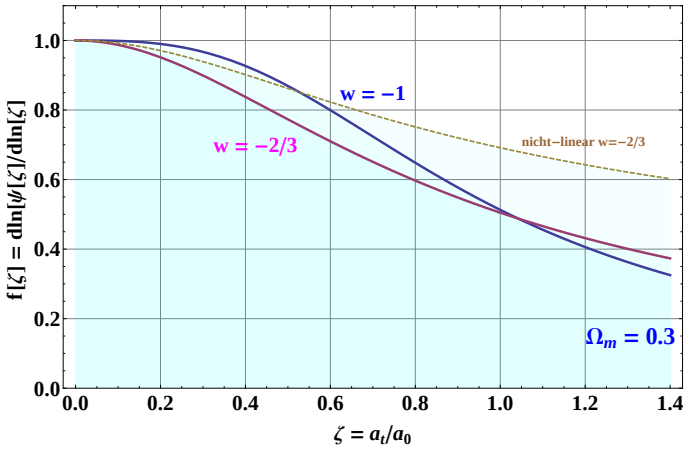


Fig. 4.16: *Die logarithmierte Wachstumsrate des ψ-Feldes (Dichtekontrast) als Funktion des Skalenfaktors ζ. Für die Zustandsgleichungen $w = -1$ und $w = -2/3$ unterscheiden sich die Werte zum heutigen Zeitpunkt $\zeta = 1$ unmerklich. Nur in der Vergangenheit war die Anwachsrate bei $w = -1$ deutlich größer als im Zustand $w = -2/3$. Zum Vergleich ist auch die nicht-lineare Anwachsrate dargestellt, doe sich aus (4.139) ergibt. Diese lässt sich aber nicht mit dem linearisierten Model mit $w = -1$ vergleichen.*

Der Parameter C ist hier eine freie Konstante, da wir in einer linearen Theorie keine Aussagen über absolute Amplituden machen können.

Doch relative Aussagen sind möglich. Zunächst läßt sich die differentielle Wachstumsrate

$$\mathbf{f}_w = \zeta \frac{d \ln[\psi_w]}{d\zeta} \tag{4.202}$$

aus der obigen Lösung für $w = -1$ und $w = -2/3$ berechnen. In Fig. (4.16) sind die Ergebnisse als Funktion des Skalenfaktors $\zeta = a/a_0$ dargestellt. Deutlich ist zu sehen, dass in der Vergangenheit $\zeta < 1$ die Anwachsraten im ΛCDM Modell durchweg größer waren als in unserem bevorzugten Modell $w = -2/3$. Gegenüber dem Standardmodell erwarten wir also mit $w = -2/3$ etwas geringere Dichtekontraste. Dies lässt sich auch durch die Verhältnisse der Dichtekontraste zeigen. Nach dem Standardmodell mit $w = -1$ wächst die Dichtekontrastfunktion im Kosmos nach der

Beziehung

$$\psi_{-1} \propto \zeta \, {}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{3}, 1, \tfrac{11}{6}, \left(1 - \tfrac{1}{\Omega_m}\right) \zeta^3\right] \tag{4.203}$$

an. In dem physikalisch wesentlich wahrscheinlicheren Modell mit $w = -2/3$ wächst dagegen der Dichtekontrast gemäß

$$\psi_{-2/3} \propto \zeta \, {}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}, \tfrac{9}{4}, \left(1 - \tfrac{1}{\Omega_m}\right) \zeta^2\right] \tag{4.204}$$

an. Man sieht, dass in beiden Modellvarianten der Dichtekontrast ψ in erster Näherung mit dem Skalenfaktor ζ linear anwächst. Bei gleichen anfänglichen Dichtefluktuationen werden also die beiden Proportionalen Faktoren gleich sein. Ein absoluter Vergleich ist natürlich nicht möglich, aber wir können das Verhältnis beider Wachstumsfaktoren beim gleichen Skalenfaktor ζ, also auch zum heutigen Zeitpunkt $\zeta = 1$,

$$\frac{\psi_{\{-2/3\}}}{\psi_{\{-1\}}} = \frac{{}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}, \tfrac{9}{4}, 1 - 1/\Omega_m\right]}{{}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{3}, 1, \tfrac{11}{6}, 1 - 1/\Omega_m\right]} \tag{4.205}$$

bilden und somit berechnen. Mit Hilfe der ersten Pfaffschen Transformation für hypergeometrische Funktionen können wir dieses Verhältnis physikalischer in der Form

$$\boxed{\frac{\psi_{\{-2/3\}}}{\psi_{\{-1\}}} = \Omega_m^{1/6} \, \frac{{}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{9}{4}, 1 - \Omega_m\right]}{{}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{5}{6}, \tfrac{11}{6}, 1 - \Omega_m\right]}.} \tag{4.206}$$

schreiben. Das Argument der hypergeometrischen Funktionen ist jetzt $1 - \Omega_m$, also der Anteil der „Dunklen Energie“ im jeweiligen Modell zum heutigen Zeitpunkt. Die Anteile der Strahlungsenergie können wir im materiedominierten Entwicklungsstadium vernachlässigen. Das so abgeleitete Verhältnis hängt hier nur noch vom Massenparameter Ω_m und einem hier *als konstant angenommenen* $w = -2/3$ - Parameter ab. Die Unsicherheit des heutigen Hubble-Parameters H_0 spielt somit keine primäre Rolle.

In Fig. (4.18) sind die Datenpunkte in Relation zu den Zustandsgleichungen $w = -1 = \textit{konstant}$ und $w = -2/3 = \textit{konstant}$ (rote Geraden) graphisch dargestellt. Die senkrechte Gerade mit $w = -2/3$ erreicht der Dichtekontrast zum heutigen Zeitpunkt nur etwa 88% des klassischen ΛCDM Modelles. Dieses Defizit von etwa $\sim 10\%$ wird seit

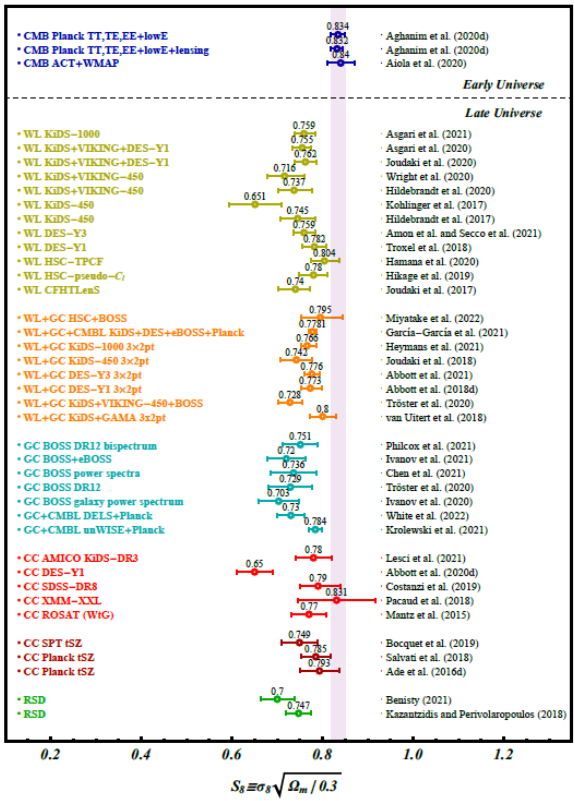


Fig. 4.17: *Der für den Dichtekontrast relevante S_8-Parameter des heutigen Universums im Vergleich zu der „Hochrechnung“ mit den Daten des Plancksatelliten aus den Dichtefluktuationen des frühen Universum auf der Basis eines ΛCDM-Modells ($w = -1$). Die Ergebnisse der unterschiedlichen Gruppen und Methoden führt zu der Erkenntnis, dass das heutige Universum um etwa 10% homogener ist als man es nach dem Standardmodell mit einer kosmologischen Konstanten erwartet. Wenn man sich auf diese Daten verlassen könnte, wäre die Existenz oder die Relevanz einer kosmologischen Konstanten im Universum widerlegt([2]). So zeigen Auswertungen des eROSITA-Röntgensatelliten im Jahre 2023 wiederum kaum Hinweise auf eine “S8’-Anomalie”.*

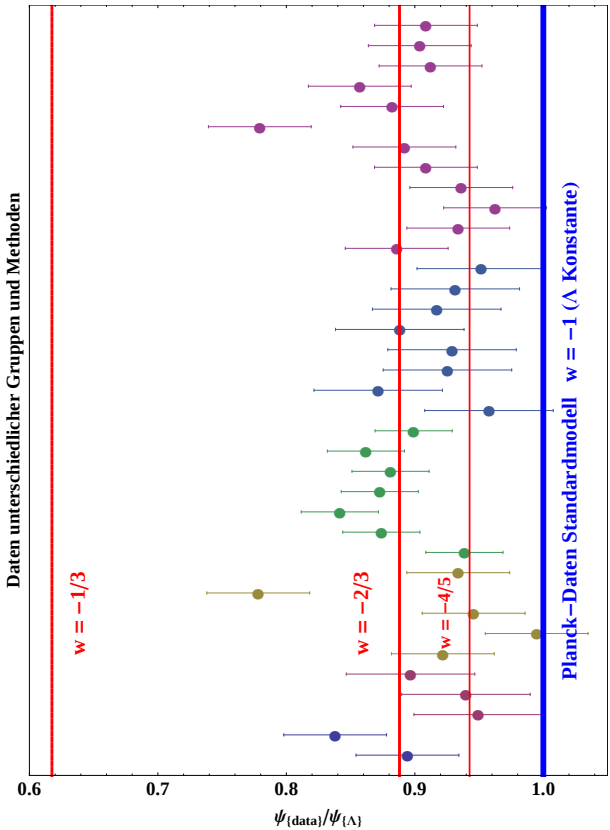


Fig. 4.18: *Ein konstanter w-Parameter von $w = -2/3$ im $wCDM - Modell$ passt wesentlich besser zu den bis zum Jahre 2022 gesammelten Gravitationslinsen - Messungen des Dichtekontrastes als das Standardmodell mit $w = -1$. Aufgetragen sind hier die relevanten Verhältnisse ψ_{data}/ψ_{-1} der einzelnen Gruppen, normiert auf das Standardmodelles $w = -1$ zum heutigen Zeitpunkt $\zeta = 1$, berechnet nach (4.206) mit $\Omega_m = 1/3$. Die Datenpunkte ergeben sich aus der Arbeit von Abdalla et al. (2022)(siehe Fig.(4.17))([2]). Nimmt man aber ein Modell mit einem primordialen Wert von $w = -2/3$, welcher stetig zu dem vielleicht heute gültigen Wert $w \sim -1$ abfällt, so verschwindet die S8-Aomalie fast vollständig.*

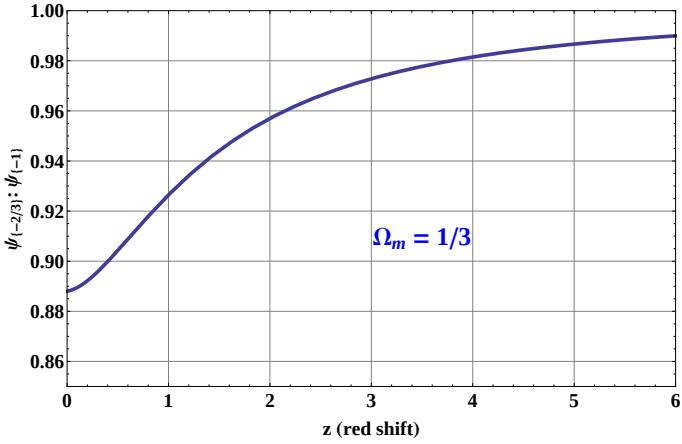


Fig. 4.19: *Die S_8 Anomalie als Funktion der Rotverschiebung z. Deutlich ist zu sehen, dass zum heutigen Zeitpunkt $z = 0$ die Anomalie für den Dichtekontrast scheinbar maximal wird, denn in ferner Zukunft nimmt diese bei konstantem $w = -2/3$ wieder ab. Aus dem Verlauf könnte man irrtümlich schließen, dass erst in jüngster kosmologischer Zeit $z \to 0$ diese Diskrepanz zum Standardmodell erzeugt wird. Nach unserem Modell liegt aber die wahre Ursache für diese Anomalie im sehr frühen Kosmos, wo im Zustand $w = -2/3$ der Skalenfaktor zunächst stärker als im Zustand $w = -1$ (kosmologische Konstante) anwächst und so das Wachstum von Strukturen verzögert..*

2016 durch Beobachtungen und Messungen am realen Universum und seinem Strukturwachstum von verschiedenen Messprojekten tendenziell bestätigt ($S_8 = \sigma_8 \, (\Omega_m/0.3)^{1/2}$ tension). Damit ist es manifest, dass ein Expansionsmodell mit $w = -2/3$ den zum heutigen Zeitpunkt beobachten Dichtekontrast besser erklären könnte als das Standardmodell mit $w = -1$.

Das Resultat macht unser Modell der globalen Rückkopplung von Strukturwachstum und beschleunigter Expansion nicht unwahrscheinlich, obwohl wir einen konstanten w-Parameter angenommen haben. Fast alle „deep-field“ Auswertungen der letzten Jahre bestätigen diese Tendenz schwächerer Verklumpung im realen Kosmos (siehe Fig. 4.17). Denn einerseits hat das *Planck-Team* aus den kleinen Dichtefluktuation des Mikrowellenhintergrundes die heute zu erwartende *mittlere Dichteschwankung* in einem Kugelradius von $\mathbf{8}h^{-1}$ [Mpc] (den sogenannten σ_8 Parame-

ter, der bei einem skaleninvarianten Universum direkt proportional dem Dichtekontrast ψ ist) bei Annahme von $w = -1$ abgeleitet. Dieser Wert ($\sigma_8 \sim \mathbf{0.81}$) stimmt aber nicht mit der Mehrheit von lokalen heutigen Messungen des *Kilo-Degree Survey* **KiDS** überein, welcher einen Wert von etwa $\sigma_8 \sim \mathbf{0.74}$ hat[7]. Auch eine großangelegte Computersimulation (FLAMINGO-Projekt) im Jahre 2023 scheint diese Unstimmigkeit trotz Berücksichtigung galaktischer Winde zu bestätigen.

Andererseits zeigen neuere vorläufige Auswertungen der eROSITA Daten des Röntgensatelliten im Jahre 2024 , dass diese S_8 Anomalie nicht so deutlich ausgeprägt ist, wie die früheren Beobachtungen unterschiedlicher Gruppen angedeutet haben. Sollte sich dies in der Zukunft durch den EUKLID-Satelliten bestätigen, wäre dies im Rahmen unseres Modells durch einen abnehmenden w-Parameter zu erklären. Der primodiale Wert wäre natürlich $w = -2/3$.

Als Ergänzung ist noch zu fragen, wie nach unserem wCDM-Modell sich diese Anomalie zum Standardmodell bei kleineren Skalenfaktoren oder größerer Rotverschiebungen verhält. Mit der Rotverschiebung $\mathbf{z}$ gilt (siehe (3.96))

$$\zeta = \frac{1}{1+\mathbf{z}}.$$

Dann folgt für die Anomalie als Funktion der Rotverschiebung

$$\frac{\psi_{\{w\}}}{\psi_{\{-1\}}} = \frac{{}_2\mathbf{F_1}\left[-\frac{1}{3w}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2w}, 1 - \frac{5}{6w}, \frac{1-1/\Omega_m}{(1+\mathbf{z})^2}\right]}{{}_2\mathbf{F_1}\left[\frac{1}{3}, 1, \frac{11}{6}, \frac{1-1/\Omega_m}{(1+\mathbf{z})^3}\right]}.$$

Der Verlauf dieses Verhälnisses ist in Fig. (4.19) dargestellt. Obwohl die Diskrepanz zum heutigen Zeitpunkt maximal erscheint, ist ihre Ursache im frühen Universum entstanden, da im Zustand $w = -2/3$ der Skalenfaktor kurz nach der Rekombination signifikant schneller expandiert als mit der hypothetischen kosmologischen Konstanten $w = -1$.

Sollte sich diese $\sigma_8 - \textit{tension}$ trotz Gegenresultaten des eROSITA-Satelliten in der Zukunft durch genauere Auswertungen des im Jahre 2023 gestarteten EUKLID-Satelliten bestätigen, so ist mit großer Wahrscheinlichkeit klar, dass im frühen Universum anstatt $w = -1$ eher ein Zustand mit $w = -2/3$ realisiert war. Das wäre dann auch das Ende der

[7] KiDS ist ein „weak gravitational lensing survey“, neben dem „Dark Energy Survey“ in Chile und Japans „Hyper Suprime-Cam“ am Subaru Teleskop in Hawaii.

sogenannten "*Kosmologischen Konstanten*". Paradox erscheint hier, dass nicht eine spät einsetzende Beschleunigung, sondern eine kurz nach der Rekombination gegenüber dem Standardmodell stärkere *Raumexpansion* für diese Diskrepanz verantwortlich ist. Zu späteren Zeitpunkten expandiert das Modell mit $w = -2/3$ nur noch proportional t^2 anstatt - wie im ΛCDM Standardmodell - exponentiel. Nimmt aber der w-Parameter stetig ab, so bleibt das Potenzgesetz offen.

4.12 Akustische Oszillationen

Im Powerspektrum der kosmischen Hintergrundstrahlung müssen Informationen über den frühen Kosmos enthalten sein. Die schwachen Temperaturfluktuationen muss man als Relikt von Dichtewellen oder *baryonischen akustischen Oszillationen* verstehen , die sich im frühen Universum durch das Wechselspiel von Gravitation und Gasdruck in einem heißen Plasmas ausbildetet haben. Ihre Auswirkungen kann man heute in der Verteilung der Galaxien beobachten. Die heutige Vorstellung ist die, dass zum Zeitpunkt der Entkopplung von Strahlung und Materie etwa 380000 Jahre nach dem *„big bang"* die Materie fortan nur noch der Gravitation unterlag, die Photonen aber die Information über die Dichtestruktur der Baryonen an ihrem Entstehungsort zum Zeitpunkt der Entkopplung in Form einer Temperatur gespeichert haben.

Das absolut einfachste Modell zur Beschreibung dieser akustischen Oszillationen ist die Jeansgleichung (4.171). Hier wird das heiße *Baryonen-Photonengas* als eine klassische Einkomponenten Flüssigkeit beschrieben. Für die Schallgeschwindigkeit c_s gilt mit der Lichtgeschwindigkeit c die Einschränkung

$$0 < c_s < \frac{c}{\sqrt{3}}, \tag{4.207}$$

weil $c/\sqrt{3}$ den möglichen Maximalwert einer relativistischen Flüssigkeit darstellt. Die Annahme einer konstanten Schallgeschwindigkeit ist nicht sehr realistisch, aber die realistischere Annahme $c_s^2 \propto a^{-1}$ verletzt bei $a \to 0$ die Bedingung einer oberen nicht zu überschreitenden Grenzgeschwindigkeit. Die relevanten Eigenfunktionen der jeansgleichung werden aber gerade durch das Verhalten bei $a \to 0$ oder $t \to 0$ bestimmt. Da es uns hier mehr auf das *qualitative Verhalten der Schwingungen* als auf einen realistischen genauen Abgleich mit der Beobachtung ankommt, ist

die Annahme einer konstanten effektiven Schallgeschwindigkeit brauchbar. Die relevante idealisierte Newtonsche Modell-Gleichung für sehr kleine Dichtefluktuationen lautet somit[8]

$$\ddot{\psi}_{\mathbf{k}} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\psi}_{\mathbf{k}} + \left(\frac{c_s^2|\mathbf{k}|^2}{a^2} - 4\pi\,\frac{Gm}{a^3}\right)\psi_{\mathbf{k}} = 0. \tag{4.208}$$

Die Größe $\psi_{\mathbf{k}} \equiv \delta\varrho_{\mathbf{k}}/\varrho$ bedeutet die Fourieramplitude (räumliche Fouriertransformierte) einer kleinen Dichtestörung mit der Wellenzahl $\mathbf{k}$. In der Newtonschen Kosmologie haben diese Größen also die räumliche Abhängigkeit

$$\propto \exp\left[\frac{\mathbf{k}\circ\mathbf{r}}{a}\right],$$

wobei $\mathbf{k}$ eine dimensionslose Wellenzahl der Störung bezeichnet. Kurz nach dem „Big Bang“ nehmen wir für den Skalenfaktor in einem flachen Universum die Zeitabhängigkeit

$$a = \left(6\pi\,Gm\,t^2\right)^{1/3} \tag{4.209}$$

an. Dies setzen wir in (4.208) ein und erhalten

$$\ddot{\psi}_{\mathbf{k}} + \frac{4}{3\,t}\,\dot{\psi}_{\mathbf{k}} + \left(\frac{c_s^2|\mathbf{k}|^2}{(6\pi Gm)^{2/3}\,t^{4/3}} - \frac{2}{3\,t^2}\right)\psi_{\mathbf{k}} = 0. \tag{4.210}$$

Um diese idealisierte Modellgleichung zu lösen, führen wir die dimensionslose Zeitvariable

$$\eta = \left(\frac{9\,c_s^3\,t}{2\pi\,Gm}\right)^{1/3} \tag{4.211}$$

ein. Damit erhalten wir die Differentialgleichung

$$\boxed{\eta^2\,\psi_{\mathbf{k}}[\eta]'' + 2\eta\,\psi_{\mathbf{k}}[\eta]' + (\mathbf{k}^2\,\eta^2 - 6)\,\psi_{\mathbf{k}}[\eta] = 0.} \tag{4.212}$$

Diese schöne Gleichung entspricht der radialen Eigenwertgleichung einer *Helmholtzgleichung*. Die allgemeine Lösung sind spezielle sphärische Besselfunktionen der Form

$$\psi_{\mathbf{k}} = C_1\,\mathbf{j}_2[\mathbf{k}\eta] + C_2\,\mathbf{y}_2[\mathbf{k}\eta]. \tag{4.213}$$

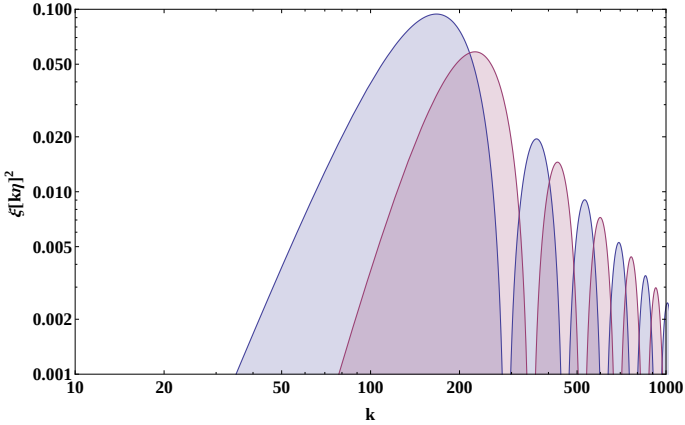


Fig. 4.20: *Betragsquadrat der Funktionen* $\mathbf{j}_2[\mathbf{k}\eta]$ *(blau) und* $\mathbf{j}_3[\mathbf{k}\eta]$ *(rot) als Funktion der Wellenzahl* $\mathbf{k}$. *Die erstere Verlauf entspricht einer normalen Newtonschen Gravitation (w = -2/3), der zweite Verlauf einer anormalen Gravitation mit dem Term* $8\pi G\varrho$ *in der Poissongleichung für die Dichtestörungen (w = -1). Es gilt hier* $\eta = 0.02$.

Die erste Funktion passt zu einem „Big Bang“ Modell, die zweite aufgrund ihrer Singularität bei $\eta \to 0$ eher zu einem „Big Bounce“ Modell. In unserem Fall lautet somit das Betragsquadrat der Dichtestörungen

$$\psi_{\mathbf{k}}[\eta]^2 \propto \frac{\mathbf{J}_{5/2}[|\mathbf{k}|\eta]^2}{\pi|\mathbf{k}|\eta}. \tag{4.214}$$

Der Verlauf dieser Funktion als Funktion von $|\mathbf{k}|$ bei eingefrorenem η (Zeit) kann in nullter Näherung mit dem Leistungsspektrum der anisotropen Hintergrundstrahlung als Funktion der Multipolmomente ℓ verglichen werden. Die ungeradzahligen Peaks entsprechen den Verdichtungen, die geradzahligen den Verdünnungen oder Geschwindigkeitsmaxima. Allerdings hängt die Amplitudenabnahme der Oszillationen in unserem Modell nicht mit der *Silk-Dämpfung* (siehe [212]) in einem Baryonen-Photonen Plasma, sondern mit der Annahme einer konstanten Schallgeschwindigkeit während der Expansion zusammen.

[8] Die Annahme ist hier w = -2/3, darum der Faktor -4π im gravitativen Term

Nehmen wir anomale Newtonsche Gravitation (w = -1) an, so lautet anstatt (4.208) die modifizierte Jeansgleichung

$$\ddot{\psi}_{\mathbf{k}} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)\dot{\psi}_{\mathbf{k}} + \left(\frac{c_s^2|\mathbf{k}|^2}{a^2} - 8\pi\,\frac{Gm}{a^3}\right)\psi_{\mathbf{k}} = 0. \qquad (4.215)$$

mit der dazugehörigen Eigengleichung

$$\eta^2\,\psi_{\mathbf{k}}[\eta]'' + 2\eta\,\psi_{\mathbf{k}}[\eta]' + (\mathbf{k}^2\,\eta^2 - 12)\,\psi_{\mathbf{k}}[\eta] = 0. \qquad (4.216)$$

Ihre allgemeine Lösung lautet jetzt

$$\psi_{\mathbf{k}} = C_1\,\mathbf{j}_3[\mathbf{k}\eta] + C_2\,\mathbf{y}_3[\mathbf{k}\eta]. \qquad (4.217)$$

Das Betragsquadrat beider relevanten Lösungen ist in der Figur (4.20) für den fall $\eta = \mathbf{0.02}$ dargestellt. Wie zu erwarten verschiebt sich bei gleicher Zeitmarke der erste Peak der akustischen Oszillation zu höheren Wellenzahlen. Bei der $\mathbf{j}_2$ Funktion liegt der erste Peak bei $\mathbf{k}\eta \approx \mathbf{3.34}$, bei der $\mathbf{j}_3$ Funktion bei etwa $\mathbf{k}\eta \approx \mathbf{4.51}$. Nimmt man zum Zeitpunkt der Rekombination bei $t = \mathbf{380000}$ Jahren eine Schallgeschwindigkeit von $c_s \approx \mathbf{3000}m/s$ an, so ergibt sich mit (4.211) eine typische Masse m von etwa $m \sim \mathbf{10^8 - 10^9}$ Sonnenmassen. Dies liegt im Bereich Supermassiver Schwarzer Löcher in Zentren von Galaxien. Es drängt sich hier die Frage auf, wann oder wie früh eigentlich diese massiven Objekte im expandierenden Universum entstanden sind. Entstanden diese Objekte etwa schon sehr kurz nach dem „Bing Bang“?

4.13 Dunkle Materie, das Virialtheorem und Fritz Zwicky

> *...ich hatte einen wunderschönen Schneefall von Ideen...*
>
> F. Zwicky, Tagebucheintrag der 1930er Jahre

F. Zwicky (1898 – 1974)[9] wurde als Sohn eines in Bulgarien tätigen

[9] Der vollständige Tagebucheintrag in den 1930er Jahren lautete: *„Ich hatte ich einen wunderschönen Schneefall von Ideen. Sie breiteten sich über die Felder aus und hüllten sie in strahlendes Weiß. Und dann kamen die schmutzigen Kerle wie Oppenheimer und verwüsteten Alles. Und noch später kamen die übrigen Gesellen wie Sandage und leerten ihren schmutzigen Unrat über den weißen Schnee aus“*.([138])

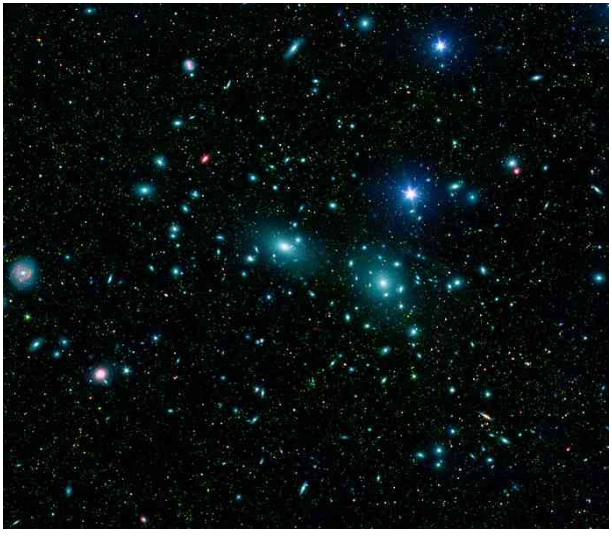


Fig. 4.21: *Der Galaxienhaufen im Sternbild „Haar der Berenike“ (Coma Berenices; Coma Haufen oder auch* ***Abell 1656****). Schon 1933 leitete F. Zwicky aus den Dispersionen der beobachteten Radialgeschwindigkeiten und dem Virialtheorem Massenwerte für diesen Haufen ab, die um das 500 fache größer waren als die aus der Leuchtkraft abgeleiteten Massen. Dies war die Geburtsstunde der „****Dunklen Materie****“ (dark matter). Heutzutage liegt der aktuelle Wert von Masse zu Leuchtkraftmasse bei etwa 10:1, weil Zwicky damals die Entfernung des Coma Haufens zu 12 Mpc ansetzte, der heutige Wert aber bei 95 Mpc liegt. (Bildquelle: NASA/wikipedia)*

Schweizer Baumwollhändlers in Warna (Bulgarien) geboren. Zwischen den Jahren 1933 und 1937 veröffentlichte er Ideen und Abschätzungen zur Dynamik und Massenbestimmung von Galaxienhaufen, die aus heutiger Sicht *genial* und *weitsichtig* zu bezeichnen sind. Wir wollen die Gedankengänge von F. Zwicky wiederholen, jetzt aber im Lichte der Layzer - Irvine Gleichung. Unser „Galaxienhaufen“ ist jetzt das „Oktett“ im kubisch primitiven Gitter, welches dynamisch einen Kollaps erleidet. Auf dieses sehr spezielle System kann der verallgemeinerte Virialsatz (3.48) angewendet werden. Mit den Abkürzungen (Faktor 3 aufgrund der drei Freiheitsgrade kann hier weggelassen werden)

$$E_{kin} = \frac{1}{2} a^2 \, \dot{\psi}^2,$$

$$E_{pot} = -\frac{4\pi G m}{3\,a}\,\mathbf{V}[\psi] \tag{4.218}$$

gilt bekanntlich

$$\frac{d}{dt}\,[E_{kin} + E_{pot}] + \frac{\dot{a}}{a}\,[2\,E_{kin} + E_{pot}] = 0. \tag{4.219}$$

Uns interessiert nun die „Gesamtenergie“ $E_{kin} + E_{pot}$ und das Virial $2\,E_{kin} + E_{pot}$ während der Oktettfusion. Im Falle $w = -1$ und $\mathbf{V}[\psi] = 3\,\psi^2 + \ldots$ gilt

$$a^2\,\dot{\psi}^2 - \frac{4\pi\,G m}{a}\,\psi^2 \approx \frac{4}{9}\,\omega_\Lambda^2\,a^2. \tag{4.220}$$

Also folgt

$$2\,E_{kin} + E_{pot} \approx \frac{1}{3}\,\Lambda\,a^2. \tag{4.221}$$

Hier sieht man, dass wir es im expandierenden Kosmos mit *Nichtgleichgewichts – Thermodynamik* zu tun haben, da auf der rechten Seite der obigen Bilanz nicht Null steht. Bemerkenswert ist, dass ZWICKY diesen Umstand in seiner zweiten Untersuchung von 1937 zumindest qualitativ als Ursache einer möglichen fehlerhaften Abschätzung seiner „Virialmasse“ eines Galaxienhaufens diskutiert hat ([229]).

Die *baryonische* Masse besteht hier aus der „leuchtenden“ baryonischen Materie (Sterne) und aus der „nicht leuchtenden“ baryonischen Materie (Planeten, braune Zwerge, kaltes interstellares Gas). Zwicky setzt aber 1933 im obigen Ausdruck die linke Seite proportional einer „Newton'schen Virialmasse“. Durch „naive“ Anwendung der Newton'schen Mechanik und einer „statistischen Gleichgewichtsbedingung“ (Virialsatz) erhält man mit der obigen Gleichung effektive Massenwerte, die etwa das zweifache des *baryonischen* Massenwertes sind. Dies reicht noch nicht für eine Erklärung für die beobachteten hohen Streugeschwindigkeiten in Galaxienhaufen, geht aber in die richtige Richtung. Will man hier nicht **Dunkle Materie** postulieren, muss im Universum für lokale Objekte ein anderer Limes aus den Einsteinschen Gleichungen als die Newtonsche Mechanik geben. Bemerkenswert ist, das F. ZWICKY schon 1933 und 1937 diesen Sachverhalt weitblickend durchschaut hat. So schreibt er 1933, nachdem er eine erhebliche Diskrepanz zwischen der „leuchtenden“ Materie und der Virialmasse im Comahaufen festgestellt hatte, *...Falls sich dies bewahrheiten sollte, würde sich also das überraschende Resultat*

ergeben, dass dunkle Materie in sehr viel größerer Dichte vorhanden ist als leuchtende Materie. Und etwas später: *... dass die große Streuung der Geschwindigkeiten im Comasystem (und in anderen dichten Nebelhaufen) ein noch nicht geklärtes Problem in sich birgt*([228]).

1937 wird F. ZWICKY noch deutlicher. Zunächst erhält er wieder die gleiche Diskrepanz zwischen scheinbarer Virialmasse und der „leuchtenden" Materie. Er bleibt skeptisch und überlegt, ob die Ursache durch ein Ungleichgewicht des Systems hervorgerufen wird, so dass der Virialsatz nur mit Zusatzterm gültig wäre (*„thermodynamisches Ungleichgewicht"*). Genau dies wird ja durch die erst 1961 formulierte LAYZER - IRVINE Gleichung nahegelegt. Doch man gewinnt bestenfalls einen Faktor zwei. Schließlich schreibt er 1937 die bemerkenswerten Sätze ([229]):

> *„It should also be noticed that the virial theorem as applied to clusters of nebulae provides for a test of the validity of the inverse square law of gravitational forces. This is of fundamental interests because of the enormous distances which separate the gravitating bodies whose motions are investigated. Since clusters of nebulae are the largest known aggregations of matter, the study of their mechanical behavior forms the last stepping – stone before we approach the investigation of the universe as a whole."*

Für F. ZWICKY war es also schon 1937 nicht auszuschließen, dass auch die *Newton*'sche Gravitation in Galaxienhaufen nicht zwingend gültig sein muss. Die viel kompliziertere tensorielle *Einstein*'sche Theorie könnte vielleicht auch *ohne dunkle Materie* die anomale Dynamik erklären. Dies ist bis heute ein ungelöstes Problem des *rekursiven Lösungsschema der Einsteinschen Gleichungen* geblieben.

Die Newton'sche Gravitation ist stark abhängig von äußeren Randbedingungen, da die Poisson'sche Gleichung elliptisch, nicht aber hyperbolisch wie die Einstein'schen Feldgleichung ist. Das Newton'sche System der Bewegungsgleichungen ist somit ein schlecht definiertes Anfangswertproblem. *Der Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten und schwacher Felder in der Einstein'schen Gravitation bedeutet nicht zwingend eine Newton'sche Gravitation*, wie es durch die Existenz von Newton'schen Lösungen bewiesen wird, die in keiner Weise als Grenzfall einer allgemein relativistischen Lösung angesehen werden können ([31]).

In diesem Zusammenhang darf auch das Problem der *anomalen flachen*

Rotationskurven von Galaxien nicht unerwähnt bleiben. Auch hier liegt der Verdacht nahe, dass die lokale Metrik in der Umgebung einer Galaxie durch die gesamte Massenverteilung im Universum bestimmt wird. Hier könnte der Fall eintreten, dass in der Umgebung einer Galaxie keineswegs die „weak field“ Näherung der Einstein'schen Gravitation gültig ist - welches ja die Newton'sche Gravitation wäre. Eine erste klassische Arbeit zu diesem Problem ist die von D.W. Sciama *On the origin of inertia* aus dem Jahre 1953 ([181]).

5 Das wCDM - Universum

Cosmologists are often in error but never in doubt.
Lew Landau (1908 – 1968)

Mit den Differentialgleichungen für a und ψ lassen sich idealisierte strukturbildende Expansionsmodelle berechnen. Die Ergebnisse müssen aber in der Sprache der heutigen kosmologischen Theorien ausgedrückt werden. Das klassische parametrisierte ΛCDM Modell mit einem konstanten w = -1 ist nach den obigen physikalischen Diskussionen die einfachste Modellvorstellung. Zudem scheint sie momentan die beste Annäherung an die Wirklichkeit zu sein. Allerdings ist im Rahmen unserer Modellvorstellungen das ΛCDM Modell **inkonsistent**, da mit einer Zustandsgleichung $w = -1$ die Dichtekontraste linear mit der zeit anwachsen müssten, was aber der Jeansgleichung widerspricht. Nach unserem Modell (siehe Gleichung (4.155)) muss der EoS-Parameter zu Beginn der kosmologischen Expansion bei $w = -2/3$ gelegen haben. Die Zustandsgleichung $w = -1$ kann somit eigentlich nur ein vorübergehender Zustand im heutigen Universum sein, weil der w – Parameter sehr wahrscheinlich immer weiter abnimmt und damit die „Dunkle Energie“ wohl immer stärker wird. Trotzdem wollen wir im Folgenden das klassische Standardmodell diskutieren.

5.1 Die Annahmen des ΛCDM – Modelles

Im ΛCDM Modell muss im rahmen unserer Modellvorstellungen angenommen werden, dass in der fundamentalen Lagrangefunktion die Potentialfunktion $\mathbf{V}[\psi]$ die Eigenschaft $\mathbf{V}''[0] = 6$ hat. Nur das garantiert für alle Entwicklungszustände die Zustandsgleichung w = -1[1]. Daher

[1] Der Dichtekontrast wächst aber dann *linear* mit der Zeit an, was mit der Jeansgleichung im Widerspruch steht.

haben wir für den Skalenfaktor a die Bewegungsgleichung

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G m}{3\,a^2} + \frac{1}{3}\Lambda\, a. \tag{5.1}$$

Die konstante Masse m bezeichnet eine zunächst freie Eichmasse an den sc – Gitterplätzen. Durch Multiplikation mit $\dot{a}$ und anschließender Integration folgt

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G m}{3\,a^3} + \frac{1}{3}\Lambda. \tag{5.2}$$

Eine hier noch auftauchende Integrationskonstante $\mathcal{K}$ setzen wir null, da wir ein „Null-Energie Universum“ mit Euklidischer Geometrie betrachten wollen. Der *Hubbleparameter* H ist definiert durch

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \tag{5.3}$$

Damit führen wir zunächst den wichtigen dimensionslosen Massenparameter[2]

$$\boxed{\Omega_m = \frac{8\pi\, G m}{3\, H_0^2\, a_0^3}} \tag{5.4}$$

ein, in dem H_0 nun den Hubble-Lemaître Parameter zum heutigen Zeitpunkt T ($T : Weltalter$) bezeichnet. a_0 ist die letztendlich willkürliche „Gitterkonstante“ zum heutigen Zeitpunkt. Den Dichteparameter Ω_m kann man auch in der Form

$$\Omega_m = \frac{8\pi G m}{3\, H_0^2\, a_0^3} \equiv \frac{\varrho_0}{\varrho_{crit}} \tag{5.5}$$

schreiben, wobei ϱ_0 die mittlere heutige Dichte im Universum und

$$\begin{aligned} \varrho_{crit} = \frac{3\, H_0^2}{8\pi\, G} &\approx \mathbf{1.88 \cdot 10^{-29}}\, h^2\, g\, cm^{-3} \\ &\approx \mathbf{2.80 \cdot 10^{11}}\, h^2\, M_\odot/Mpc^3 \\ &\approx \mathbf{11}\, h^2\ Protonen/m^3 \end{aligned} \tag{5.6}$$

[2]In der Astrophysik treten ähnliche Größen wie zum Beispiel der Toomre-Parameter auf, bei dem das H_0 durch eine charakteristische Rotationsfrequenz ω des Systems ersetzt wird.

ist. Die Größe h ist der *reduzierte Hubbleparameter* $H/100$, normiert auf **100** km/s/Mpc.

Es muss hier aber betont werden, dass der Begriff „**kritische Dichte**“ *nur in der Standardkosmologie sinnvoll ist, in der Strukturbildung keinen Einfluss auf die Expansionsrate hat.* Nach den Formeln (4.53) ist die physikalische Bedeutung von Ω_m und Ω_Λ jetzt durch die neue Darstellung

$$\Omega_m = \frac{1-3w}{\beta-3w}; \qquad \Omega_\Lambda = \frac{\beta-1}{\beta-3w} \tag{5.7}$$

zu ersetzen, bei der neben dem konstanten Zustandsparameter w nur noch das Verhältnis β der aktuellen gravitativen Energiedichte $E_{grav}[\psi_T]$ zum strukturlosen Grundzustandswert $E_{grav}[0]$ eine Rolle spielt. Eine „kritische Dichte“ im Hinblick auf eine bestimmte „parabolische“ Expansionsrate macht hier keinen Sinn mehr.

Anstatt der kosmologischen Konstanten Λ führen wir jetzt die wichtige dimensionslose Zahl

$$\boxed{1-\Omega_m \equiv \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \equiv \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{\psi}}{H_0}\right)^2 \equiv \frac{4}{9}\left(\frac{\omega_\Lambda}{H_0}\right)^2} \tag{5.8}$$

ein, wobei jetzt

$$\dot{\psi} = \sqrt{\Lambda} \equiv \frac{2\omega_\Lambda}{\sqrt{3}}, \qquad \psi = \frac{2\omega_\Lambda}{\sqrt{3}}\, t \tag{5.9}$$

die wegen $w=-1$ konstante Wachstumsrate des Strukturparameters ψ bezeichnet. Die obige Definition von Ω_Λ hat somit nichts mehr mit einer *„Vakuumenergie“* gemein. Mit alledem ergibt sich

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda. \tag{5.10}$$

Mit Hilfe der Rotverschiebung (3.96) gilt alternativ

$$\boxed{\left(\frac{H[\mathbf{z}]}{H[0]}\right)^2 = \Omega_m\,(1+\mathbf{z})^3 + \Omega_\Lambda.} \tag{5.11}$$

Setzt man in dieser sogenannten *Hubblefunktion* $t=T$ oder $\mathbf{z}=0$, so erhält man für die heutigen kosmologischen Parameter die Randbedingung

$$\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1. \tag{5.12}$$

Wir können also in unserem „euklidischen“ Modell $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$ setzen. Ein noch eventuell vorhandener Parameter Ω_k, der von der Nicht – Euklidizität der Metrik herrührt, wird hier als verschwindend vorausgesetzt („ *flat universe*“). Die Größe $\dot{\psi} \equiv 2\omega_\Lambda/\sqrt{3}$ ist bei der angenommenen Zustandsgleichung $w = -1$ konstant. Die kinetische Energie der Punktmassen relativ zum expandierenden Gitter wirken wie eine „negativen Druckspannung“ oder ein „antigravitatives Zentrifugalfeld“. Die alte Idee von C. HUYGENS aus dem 17. Jahrhundert, dass „Zentrifugalfelder“ und „Gravitationsfelder“ nicht zu unterscheiden sind, manifestiert sich hier wie schon früher in der Ringdynamik sehr deutlich. Mit „Vakuumenergie“ im quantentheoretischen Sinne hat also das Λ und damit die beschleunigte Expansion des Universums überhaupt nichts zu tun.

Die endgültige Lösung für a im **LEdS** - Modell lautet jetzt (siehe (4.117))

$$\boxed{a^3 = 6\pi\, G\, m \left[\frac{\sinh\left[\omega_\Lambda\, t\right]}{\omega_\Lambda}\right]^2 .} \tag{5.13}$$

Man könnte hier für die Masse m eine beliebige Masse einsetzen; zum Beispiel auch die Planckmasse m_{Planck}. Alternativ gilt wegen der obigen Definitionen auch

$$\frac{a[t]}{a_0} = \left(\sqrt{\frac{\Omega_M}{1-\Omega_m}}\, \sinh\left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\Omega_m}\, H_0\, t\right]\right)^{2/3} \tag{5.14}$$

Folglich gilt für das „theoretische Weltalter“ mit $a[t] = a_0$ und dem heutigen Hubble-Lemaître Parameter H_0

$$T = \frac{1}{3\, H_0\, \sqrt{1-\Omega_m}}\, \ln\left[\frac{1+\sqrt{1-\Omega_m}}{1-\sqrt{1-\Omega_m}}\right]. \tag{5.15}$$

Es ist in der Kosmologie günstiger, den Zeitpunkt $t = 0$ auf Heute zu verlegen. In (5.14) machen wir also die Translation

$$t \to t + \frac{1}{3\, H_0\, \sqrt{1-\Omega_m}}\, \ln\left[\frac{1+\sqrt{1-\Omega_m}}{1-\sqrt{1-\Omega_m}}\right]. \tag{5.16}$$

Jetzt gilt mit $\tau = H_0\,(t - T)$ für den Skalenfaktor

$$\boxed{\frac{a[\tau]}{a[0]} = \left(\cosh\left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\Omega_m}\,\tau\right] + \frac{\sinh\left[\frac{3}{2}\sqrt{1-\Omega_m}\,\tau\right]}{\sqrt{1-\Omega_m}}\right)^{2/3}} \tag{5.17}$$

In der Figur (5.1) ist diese wichtige Funktion für einige Parameter anschaulich dargestellt. Für den Hubble-Lemaître Parameter $H = \dot{a}/a$ folgt wieder in der „Big Bang“ Zeitskala

$$H = \frac{2}{3}\,\omega_\Lambda\,\coth[\omega_\Lambda\,t] \tag{5.18}$$

und für den *Bremsparameter* $q \equiv -q_2$

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \equiv \frac{1}{2}\left(1 - 3\tanh^2[\omega_\Lambda\,t]\right) \tag{5.19}$$

Für den Massenparameter Ω_m gilt wegen (5.5)

$$\Omega_m = \frac{8\pi G m}{3\,H^2\,a^3} \equiv \operatorname{sech}^2[\omega_\Lambda\,t] \tag{5.20}$$

und somit auch

$$\Omega_\Lambda = \tanh^2[\omega_\Lambda\,t]. \tag{5.21}$$

Man kann alle zeitabhängigen Parameter der Kosmologie auch als Funktion des Ordnungsparameters ψ oder auch als Funktion der Rotverschiebung $\mathbf{z}$ darstellen. Um die kosmische Entwicklung als Funktion der beobachtbaren Rotverschiebung $\mathbf{z}$ darzustellen, schreibt man die Formel für den Skalenfaktor um in

$$\sinh^2[\omega_\Lambda\,t] = \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{M,0}\,(1+\mathbf{z})^3}. \tag{5.22}$$

Daraus folgt sofort ($\Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$)

$$\begin{aligned}
\tanh^2[\omega_\Lambda\,t] &= \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{M,0}\,(1+\mathbf{z})^3}, \\
\operatorname{sech}^2[\omega_\Lambda\,t] &= \frac{\Omega_{M,0}\,(1+\mathbf{z})^3}{\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{M,0}\,(1+\mathbf{z})^3}.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Für den Parameter q ergibt sich so mit (5.19) für das **LEdS** – Modell die Relation

$$q[\mathbf{z}] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3\,\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{M,0}\,(1+\mathbf{z})^3}\right). \tag{5.24}$$

Der Bremsparameter wird Null bei der kritischen Rotverschiebung

$$\mathbf{z}_c = -1 + \left(\frac{2\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{M,0}}\right)^{1/3}. \tag{5.25}$$

Mit $\Omega_{\Lambda,0} \approx \mathbf{0.73}$ ergibt sich so $\mathbf{z}_c \approx \mathbf{0.76}$. Galaxien mit einer Rotverschiebung von $z < 0.76$ werden also beschleunigt, während Galaxien mit $z > 0.76$ noch eine normale abbremsende Expansion erleben. Die beschleunigte Expansion setzte im Universum also erst „kürzlich“ ein.

Das Weltalter $T[\mathbf{z}]$ als Funktion der Rotverschiebung folgt sowohl aus (5.18) oder (5.14) im Spezialfall $t = T$. Mit (5.23) und (5.8) erhält man ($\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$)

$$\boxed{T[\mathbf{z}] = \frac{1}{3\,H_0\,\sqrt{\Omega_\Lambda}}\,\ln\left[\frac{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m\,(1+\mathbf{z})^3} + \sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m\,(1+\mathbf{z})^3} - \sqrt{\Omega_\Lambda}}\right].} \tag{5.26}$$

Das heutige Weltalter T ist identisch mit $T(\mathbf{z})$ an der Stelle $\mathbf{z} = 0$. Folglich gilt

$$T\,H_0 = \frac{1}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}}\,\ln\left[\frac{1+\sqrt{\Omega_\Lambda}}{1-\sqrt{\Omega_\Lambda}}\right]. \tag{5.27}$$

Mit $\Omega_{\Lambda,0} = 0.75$ und $H_0 = 72$ km/s/Mpc erhält man so ein Weltalter **14,08** Milliarden Jahren[3]. Eine Reihenentwicklung der obigen Formel ergibt

$$T = \frac{2}{3\,H_0}\,\left(1 + \frac{1}{3}\,\Omega_\Lambda + \frac{1}{5}\,\Omega_\Lambda^2 + \ldots\right) \tag{5.28}$$

Liegt für das Weltalter T aus anderen Messungen (Kugelsternhaufen) eine *untere Grenze* fest, so darf in einem Modell mit $\Omega_\Lambda \equiv 0$ der Hubbleparameter H_0 nicht zu groß sein. Anfang 1990 war klar, dass für $H_0 > 50 km/s/Mpc$ ein Modell ohne kosmologischer Konstante nicht mehr möglich ist.

Bei großen Rotverschiebungen $\mathbf{z} >> 1$ gilt asymptotisch für das „kosmogenetische Alter“ der beobachteten Galaxie

$$T[\mathbf{z}] = \frac{2}{3\,H_0\,\sqrt{\Omega_m\,(1+\mathbf{z})^3}} + \ldots \qquad (\mathbf{z} \to \infty) \tag{5.29}$$

[3]Der Begriff „Weltalter“ bedeutet hier nur die Zeit, die nach der „Singularität“ verflossen ist, wo rein formal in unserem klassischen Modell (keine Quantengravitation) der Skalenparameter Null ist. Philosophisch nehmen wir hier indirekt an, dass im Universum der „Energieinhalt“ Null ist, also Begriffe wie „erschaffen“ und „unzerstörbar“ letztendlich sinnlos sind. Kosmologie und Mythologie kommen hier sehr nahe.

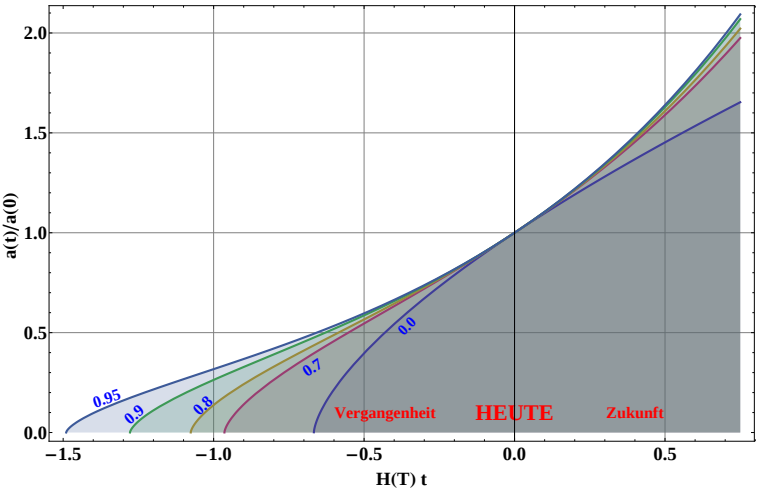


Fig. 5.1: *Der normierte Skalenfaktor $a(\tau)/a[0]$ nach (5.17) als Funktion der skalierten Zeit $\tau = tH_0$ für unterschiedliche Werte von Ω_Λ (blaue Zahlen). Die Zeit $t = 0$ entspricht dem heutigen Zeitpunkt. Die dimensionslose Zeit ist in Einheiten des heutigen Hubbleparameters H.*

In dieser Näherung $\mathbf{z} >> 1$ spielt der Parameter Ω_Λ noch keine wichtige Rolle, wie es für den frühen Entwicklungsstand des Universums ja auch zu erwarten ist. Für ein **EdS** - Modell gilt $\Omega_m = 1$ und folglich streng

$$T[\mathbf{z}] = \frac{2}{3\,H_0\,\sqrt{(1+\mathbf{z})^3}}; \qquad (Einstein - deSitter) \tag{5.30}$$

Wie für das Weltalter $T[\mathbf{z}]$ lässt sich auch für den Ordnungsparameter oder Strukturparameter $\psi[\mathbf{z}]$ eine analytische Beziehung aufstellen. Mit (5.27) und (5.8) gilt die wichtige Relation

$$\boxed{\psi[\mathbf{z}] = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\ln\left[\frac{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m\,(1+\mathbf{z})^3} + \sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m\,(1+\mathbf{z})^3} - \sqrt{\Omega_\Lambda}}\right].} \tag{5.31}$$

Asymptotisch gilt für große $\mathbf{z}$

$$\psi[\mathbf{z}] = \frac{2\,\sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{3\,\Omega_m\,(1+\mathbf{z})^3}} + \ldots \qquad (\mathbf{z} \to \infty) \tag{5.32}$$

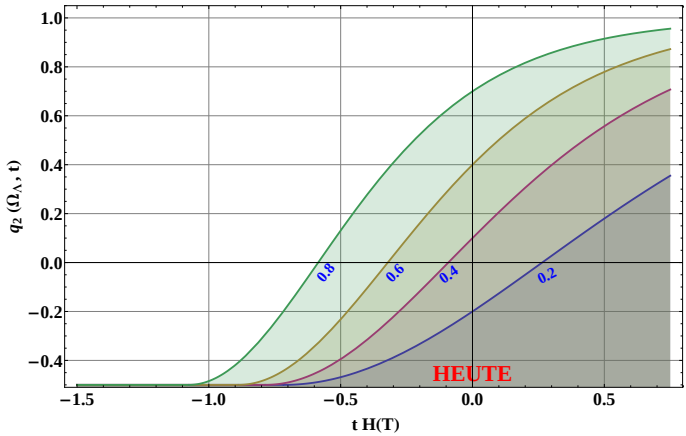


Fig. 5.2: *Der normierte Beschleunigungsparameter $q_2(t+T)$ nach (5.19) als Funktion der skalierten Zeit tH für 4 Werte von Ω_Λ von 0.2 bis 0.8 (heutiger Wert 0.75) ($t=0$ bedeutet „Heute“). Je nach dem heutigen Wert des Parameters Ω_Λ setzte in der Vergangenheit eine beschleunigte Expansion des Universums ein ($q_2 > 0$).*

Im Falle des *Einstein - deSitter* Modelles mit $\Omega_m \to 1$ gilt für alle $\mathbf{z}$ einfach $\psi(\mathbf{z}) \equiv 0$. Das *Einstein - deSitter* Universum besteht somit aus einem homogenen strukturlosem Materiesubstrat ohne beschleunigte Expansion. Nimmt man für die Parameter $\Omega_m = 0.3$ und $\Omega_\Lambda = 0.7$ an, so folgt im Modell mit $w = -1 \equiv konstant$

$$\psi[0] \approx \mathbf{1.4} \qquad \psi[1000] \approx \mathbf{5.5 \cdot 10^{-5}} \tag{5.33}$$

Da im Modell mit $w = -1$ $\psi[1000]$ in etwa die gleiche Größenordnung wie die Temperaturfluktuationen des **3Kelvin**- Himmelshintergrundes hat, ist dieses Ergebnis in scheinbar guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Doch das Strukturwachstum im Falle $w = -1$ widerspricht der Jeansgleichung, die im frühen Universum die Zustandsgleichung $w = -2/3$ fordert. Zum Vergleich ist es nützlich, auch die Entwicklung in unserem alternativen Modell mit (4.191) zu betrachten. Es gilt

$$\psi_A[z] = \frac{2}{1+z}\sqrt{\frac{1-\Omega_m}{1+\Omega_m}}\,{}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}; \left(\tfrac{1-\Omega_m}{1+\Omega_m}\right)^2 (1+z)^{-4}\right] \tag{5.34}$$

Beide Fälle des Dichtewachstums sind in der Figur (5.3) dargestellt. Ob

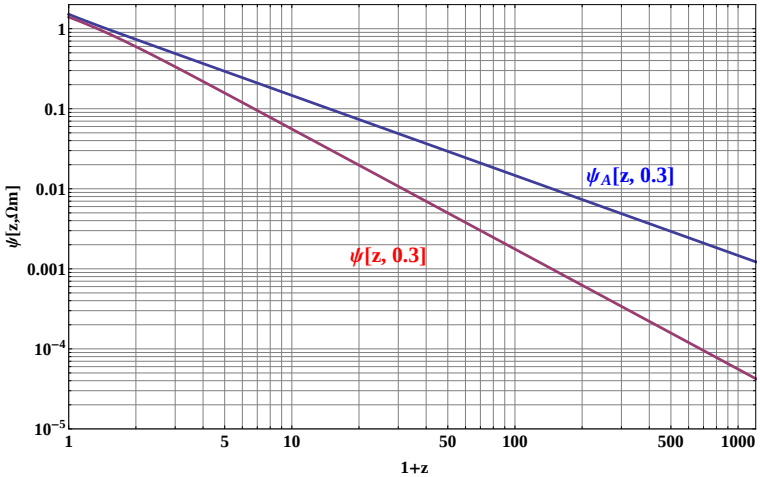


Fig. 5.3: *Der Strukturparameter* $\psi[\mathbf{z}] \propto D_+[\mathbf{z}]$ *(5.31) im Falle* $w = -1$ *und im alternativen Modell (4.191) als Funktion der Rotverschiebung* $\mathbf{z}$ *für den Parameter* $\Omega_m = 0.3$ *und* $w = -1$*. Das Modell mit* $w = -1$ *könnte erklären, weshalb aus einigen* 10^{-5} *bei etwa* $\mathbf{z} \approx 1000$ *(siehe Gleichung (4.181); Zeitpunkt der Rekombination; 3Kelvin Hintergrundstrahlung) der heutige Dichtekontrast von über Eins entstehen konnte. Das Modell widerspricht aber der Jeansgleichung. Unser Modell* $\psi_A[\mathbf{z}]$*, welches zu Beginn* $w = -2/3$ *befolgt, hat das gleiche Problem wie das klassische Standardmodell, da es zum Zeitpunkt der Rekombination schon einen Dichtekontrast von etwa* 10^{-3} *prognostiziert, während in Wirklichkeit nur Temperaturfluktuationen von etwa* 10^{-5} *beobachtet werden.*

diese Diskrepanz mit „Dunkler Materie“ erklärt werden kann, bleibt sehr umstritten.

5.2 Ein Vergleich mit der „timescape cosmology“

Interessant ist zweifellos eine Gegenüberstellung des ΛCDM Modelles in der hier vorgelegten Version zur Ursache der beschleunigten Expansion des Universums mit derjenigen der „timescape cosmology“ von D.L. Wiltshire, welcher die beschleunigte Expansion des Universums als einen relativistischen „Scheineffekt“ interpretiert und sich zum Teil auf

die Gleichungen von BUCHERT bezieht. Hierzu sollen einfach die Formeln für die Energieanteile Ω_m und Ω_Λ als Funktion des Ordnungsparameters angegeben werden. Es folgt wegen $w = -1$ und der Beziehung (5.9) die Entwicklungen

$$\Omega_\Lambda[\psi] = \tanh^2[\sqrt{3}\,\psi/2] \equiv \left(\frac{e^{\sqrt{3}\,\psi} - 1}{e^{\sqrt{3}\,\psi} + 1}\right)^2. \tag{5.35}$$

Hier zeigt sich wieder deutlich, dass die *sogenannte dunkle Energie*, ausgedrückt durch den Parameter Ω_Λ, direkt mit der Strukturbildung gekoppelt ist und daher mit „Vakuumenergie“ im Sinne der Quantenfeldtheorie nichts zu tun haben kann.

Für den Parameter Ω_m ergibt sich im *euklidischer Fall* wegen $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$

$$\Omega_m[\psi] = \operatorname{sech}^2[\sqrt{3}\,\psi/2] \equiv \frac{4\,e^{\sqrt{3}\,\psi}}{\left(e^{\sqrt{3}\,\psi} + 1\right)^2}. \tag{5.36}$$

Für den Bremsparameter oder Beschleunigungsparameter ergibt sich dagegen wegen (5.19)

$$\begin{aligned} q[\psi] &= \frac{1}{2}\,\left(1 - 3\,\tanh^2[\sqrt{3}\,\psi/2)\right] \\ &\equiv \frac{4\,e^{\sqrt{3}\,\psi} - e^{2\sqrt{3}\,\psi} - 1}{\left(e^{\sqrt{3}\,\psi} + 1\right)^2}. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Hier wird nebenbei deutlich, dass der Umschlag von einer abbremsenden zu einer beschleunigten Expansion einen *nichtlinearen Effekt* des Ordnungsparameters ψ darstellt. Linearisierte Theorien für das Dichtewachstum im Universum können diese Rückkopplung zwischen Strukturbildung und Expansion also nicht beschreiben!

Anstatt durch den Ordnungsparameter (Dichtekontrast) ψ lassen sich die kosmologischen Parameter viel allgemeiner durch die Formeln (4.53) darstellen. Im Spezialfall $w = -1$ („kosmologische Konstante“) gilt zum Beispiel

$$\Omega_m = \frac{4}{\beta + 4};\ \Omega_\Lambda = \frac{\beta}{\beta + 4};\ q = \frac{2 - \beta}{4 + \beta}, \tag{5.38}$$

wo β den Kontrast der gravitativen Bindungsenergie darstellt.

Die Formeln (5.37), (5.36) und (5.35), besonders aber (5.38), zeigen ähnliche algebraische Strukturen wie die entsprechenden Ergebnisse von D.L. WILTSHIRE in seiner „timescape cosmology“. Der Energieparameter $\beta \in [1, \infty)$ erscheint bei D.L. WILTSHIRE als ein Parameter $f_v \in [0, 1]$, der den Bruchteil der Leerräume im Universum beschreibt. Die einzige Formel, die direkt verglichen werden kann, ist diejenige für Ω_m. Nach D.L.WILTSHIRE gilt

$$\Omega_m = \frac{4(1 - f_v)}{(2 + f_v)^2}. \tag{5.39}$$

Für die „scheinbare“ Beschleunigung leitet er zwei Formeln ab; eine Formel q_{global} für den volumengemittelten Beobachter und eine andere Formel q_{lokal} für einen Beobachter an den Materiewänden des „schaumartig“ strukturierten Universums. Bei D.L.WILTSHIRE steht für den Parameter $q \equiv -q_2$ dann

$$\begin{aligned} q_{global} &= \frac{2(1 - f_v)^2}{(2 + f_v)^2}, \\ q_{lokal} &= -\frac{(1 - f_v)(8f_v^3 + 39f_v^2 - 12f_v - 8)}{(4 + f_v + 4f_v^2)^2}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

In diesen etwas *kryptischen Formeln* ist aber der globale „Bremsparameter“ q_{global} immer positiv; und selbst der lokale Wert q_{lokal} geht im Limes $f_v \to 1$ gegen Null. Dies ist im Gegensatz zu der Beziehung (5.37) oder (5.38), wo im Falle $\psi \to \infty$ oder $\beta \to \infty$ der Parameter $q = -q_2$ den maximalen Beschleunigungswert -1 annimmt. Letztendlich ist die *„timescape cosmology“* keine wirkliche *Mechanik des Universums*, keine echte dynamische Theorie, welche die beschleunigte Expansion des Universums als einen *realen physikalischen Prozess* beschreibt. Das Modell von D.L. WILTSHIRE interpretiert die gemessenen Daten letztendlich als eine komplizierte *„Fata Morgana“* von nicht - synchronisierten Uhren.

5.3 Die Botschaft der SNe-Ia Supernovae

Im Folgenden sollen jetzt mit unterschiedlichen Modellannahmen die Daten der SNe-Ia Supernovae bis 2012 ausgewertet und mit der neusten Analyse von 2023 verglichen werden. Der Bereich der Rotverschiebungen ist relativ beschränkt und betrifft den Bereich $0 < z < 1.4$.

Für die Leuchkraftdistanz $d_L(\mathbf{z})$ gilt in der Kosmologie (S. Weinberg ([211])) für ein flaches Universum (euklidische Geometrie mit $\Omega_k = 0$)

$$d_L[\mathbf{z}] = c\,(1+\mathbf{z}) \int_0^{\mathbf{z}} \frac{dz'}{H[z']}. \tag{5.41}$$

Einsetzen der Hubblefunktion (5.11) führt zu

$$\boxed{d_L(\mathbf{z}) = \frac{c}{H_0}(1+\mathbf{z}) \int_0^{\mathbf{z}} \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m (1+z')^3}}.} \tag{5.42}$$

Hier gilt natürlich die Randbedingung $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$. Das Integral in (5.42) ist ein unvollständiges elliptisches Integral und könnte umständlich durch die *Weierstraß'sche elliptische Funktion* ausgedrückt werden. Einfacher ist eine Darstellung durch *Gaußsche hypergeometrische Funktionen*. Mit der Substitution $u = 1 + z'$ folgt wegen $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$

$$\begin{aligned} d_L[\mathbf{z}] &= \frac{c}{H_0}(1+\mathbf{z}) \int_1^{1+\mathbf{z}} \frac{du}{\sqrt{1-\Omega_m+\Omega_m\,u^3}} \\ &= \frac{c}{H_0}(1+\mathbf{z}) \left(\int_0^{1+\mathbf{z}} \frac{du}{\sqrt{1-\Omega_m+\Omega_m\,u^3}} \right. \\ &\qquad \left. - \int_0^{1} \frac{du}{\sqrt{1-\Omega_m+\Omega_m\,u^3}} \right). \end{aligned} \tag{5.43}$$

Damit erhalten wir die Darstellung

$$\boxed{d_L[\mathbf{z}] = \frac{c}{H_0}(1+\mathbf{z})\,\{\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{z};\Omega_m) - \boldsymbol{\zeta}(0;\Omega_m)\}} \tag{5.44}$$

mit der speziellen hypergeometrischen Funktion

$$\boldsymbol{\zeta}[\mathbf{z};\Omega_m] = \frac{1+\mathbf{z}}{\sqrt{1-\Omega_m}}\,{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\tfrac{4}{3},-\tfrac{\Omega_m}{1-\Omega_m}(1+\mathbf{z})^3\right]. \tag{5.45}$$

Die Länge c/H_0 wird HUBBLE – Radius genannt und es gilt mit dem *reduzierten Hubbleparameter* h

$$\boxed{\frac{c}{H_0} \equiv \frac{3000}{h}\,[Mpc].} \tag{5.46}$$

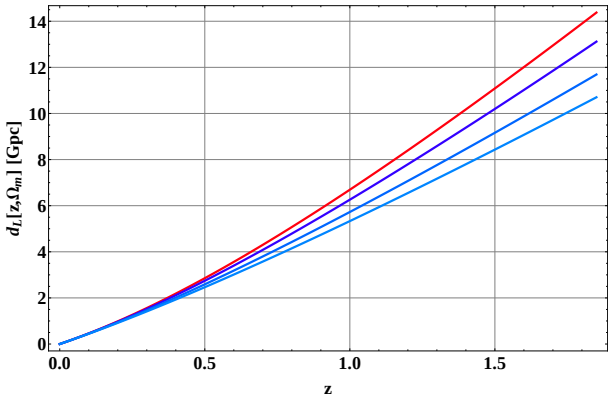


Fig. 5.4: *Die Leuchtkraftdistanz in Gigaparsec als Funktion der Rotverschiebung für vier verschiedene Werte von Ω_m bzw. $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$ (Formeln (5.44) oder (5.51)). Der reduzierte Hubbleparameter ist hier $h = 0.73$. Die dicke rote Linie entspricht dem Wert $\Omega_\Lambda = 0.75$. Die nächste darunter liegende Kurve hat $\Omega_\Lambda = 0.6$, dann $\Omega_\Lambda = 0.4$ und die unterste blaue mit $\Omega_\Lambda = 0.2$. Bei konstanter Rotverschiebung* $\mathbf{z}$ *erscheinen „Standardkerzen" weiter weg, je größer die kosmologische Konstante ist.*

Der Grenzfall $\Omega_m \to 0$ führt hier direkt zu der Leuchtkraftdistanz des DE SITTER – Universums

$$d_L[\mathbf{z}] = \frac{c}{H_0}\,\mathbf{z}\,(1+\mathbf{z}) \tag{5.47}$$

Für den anderen Grenzfall $\Omega_m \to 1$ ist die obige Darstellung mit der Funktion $\boldsymbol{\zeta}[\mathbf{z};\Omega_m]$ nicht zweckmäßig. Wir benutzen eine lineare Transformation der hypergeometrischen Funktionen und erhalten zunächst mit der neuen Funktion[4]

$$\boldsymbol{\eta}[\mathbf{z};\Omega_m] = \frac{2}{\sqrt{\Omega_m\,(1+\mathbf{z})}}\;{}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{6},\tfrac{7}{6},-\tfrac{1-\Omega_m}{\Omega_m\,(1+\mathbf{z})^3}\right] \tag{5.48}$$

die bemerkenswerte Relation

$$\boldsymbol{\zeta}[\mathbf{z};\Omega_m] + \boldsymbol{\eta}[\mathbf{z};\Omega_m] = \frac{4\pi\,\Omega_m^{-1/3}(1-\Omega_m)^{-1/6}}{3^{3/4}\,\mathbf{M}\left[2,\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]}. \tag{5.49}$$

[4] In der Literatur gibt es für die Funktion $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{z};\Omega_m)$ eine approximative numerische Formel, die aber mathematisch so hässlich ist, dass wir sie hier nicht angeben möchten.

Die Funktion $\mathbf{M}[a,b]$ bezeichnet das Arithmetisch – Geometrische Mittel der Zahlen a und b und macht klar, dass die beiden Funktionen $\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{z},\Omega_m)$ und $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{z},\Omega_m)$ unvollständige elliptische Integrale sind (*Analogie zur Legendre - Relation*). Denn es gilt

$$\int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{1+y^3}} = \frac{4\pi}{3^{3/4}\,\mathbf{M}\left[2,\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]}. \tag{5.50}$$

Anstatt (5.44) erhält man so alternativ für die Leuchtkraftdistanz die Formel

$$d_L[\mathbf{z}] = \frac{c}{H_0}(1+\mathbf{z})\ \{\boldsymbol{\eta}(0;\Omega_m) - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{z};\Omega_m)\} \tag{5.51}$$

Wie man sieht, haben sich gegenüber (5.44) die Differenzen der entsprechenden Funktionen umgekehrt. Im Grenzfall $\Omega_m \to 1$ (altes CDM – Modell des Universums) erhält man jetzt den Spezialfall des *Einstein - deSitter Kosmos*

$$d_L[\mathbf{z}] = \frac{2\,c}{H_0}\,(1+\mathbf{z}-\sqrt{1+\mathbf{z}}). \tag{5.52}$$

Diese Relation entspricht der MATTIG[5] – Formel von 1958 mit dem Bremsparameter $q = 1/2$.

Die obige Formel (5.51) gilt für ein flaches euklidisches Universum mit dem **EoS** - Parameter $w = -1$, also für den Fall einer klassischen *kosmologischen Konstanten*. Physikalisch ist es aber sehr wichtig, eine genäherte Beziehung auch für den Fall zu haben, wo die Zustandsgleichung w zwar noch *konstant*, aber nicht exakt gleich -1 angenommen wird. Aufgrund der Energiegleichung gilt dann für diesen allgemeineren euklidischen Fall

$$d_L[\mathbf{z}] = \frac{c}{H_0}(1+\mathbf{z}) \int_1^{1+\mathbf{z}} \frac{du}{\sqrt{(1-\Omega_m)\,u^{3(1+w)} + \Omega_m\,u^3}}. \tag{5.53}$$

Mit der erweiterten hypergeometrischen Funktion ($\Omega_x + \Omega_m = 1$)

$$\boldsymbol{\eta}[\mathbf{z};\Omega_x;w] = \frac{2}{\sqrt{\Omega_m\,(1+\mathbf{z})}}\ {}_2\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{6w},1-\tfrac{1}{6w},-\tfrac{\Omega_x}{1-\Omega_x}\,(1+\mathbf{z})^{3w}\right] \tag{5.54}$$

[5] WOLFGANG MATTIG (1931-2018). Arbeitete in Potsdam und schließlich am Kiepenheuer-Institut (Leibniz-Institut für Sonnenphysik) in Freiburg.

gilt dann allgemeiner

$$\boxed{d_L[\mathbf{z};\Omega_x;w] = \frac{c}{H_0}(1+\mathbf{z})\ \{\boldsymbol{\eta}[0;\Omega_x;w] - \boldsymbol{\eta}[\mathbf{z};\Omega_x;w]\}\,.} \tag{5.55}$$

Um die abstrakten Zusammenhänge noch besser zu verstehen, ist es zweckmäßig, die Leuchtkraftdistanz als Taylorreihe nach der Rotverschiebung $\mathbf{z}$ darzustellen. Man erhält bis zur dritten Ordnung

$$\begin{aligned} d_L[\mathbf{z};\Omega_x;w] = \frac{c}{H_0}\Bigg\{\mathbf{z} + \frac{1}{4}(1-3\,w\,\Omega_x)\,\mathbf{z}^2 - \\ \frac{1}{8}\left(1-2\,w\,\Omega_x+3\,w^2\,\Omega_x(2-3\,\Omega_x)\right)\,\mathbf{z}^3 + O|\mathbf{z}^4|\Bigg\} \end{aligned} \tag{5.56}$$

Der Term vierter Ordnung in $\mathbf{z}$ ist schon sehr klein und kann vernachlässigt werden, weil einerseits die Reihe für $\mathbf{z} > 1$ nicht konvergiert und andererseits hier w noch als zeitlich konstant angenommen wird. Im Falle der „kosmologischen Konstanten“ gilt natürlich $w = -1$ und $\Omega_x \equiv \Omega_\Lambda$.

Anstatt mit den Parametern Ω_x und w kann man die Koeffizienten der Taylorentwicklung der Leuchtkraftdistanz (oder ihrer *Pade-Approximation*) auch als Funktion der Beschleunigungen des Skalenfaktors a zum heutigen Zeitpunkt darstellen. Nach den Definitionen der Taylor - Entwicklung des Skalenfaktors a um $t = t_0$

$$a = a[t_0]\left(1 + H_0\,(t-t_0) + \frac{1}{2!}\,q_2\,H_0^2\,(t-t_0)^2 + \frac{1}{3!}\,q_3\,H_0^3\,(t-t_0)^3 + \ldots\right) \tag{5.57}$$

gilt dann im *euklidischen Fall*

$$d_L(\mathbf{z}) = \frac{c}{H}\left\{\mathbf{z} + \frac{1}{2}\,(1+q_2)\ \mathbf{z}^2 - \frac{1}{6}\left(1+q_2-3q_2^2+q_3\right)\ \mathbf{z}^3 + O|\mathbf{z}^4|\right\} \tag{5.58}$$

Dabei gilt allgemein für alle $n \geq 1$

$$q_n = \frac{[a[t_0]]^{n-1}\,a^{(n)}[t_0]}{[a'[t_0]]^n}. \tag{5.59}$$

Der neue Parameter q_2 hängt mit dem alten „Bremsparameter“ q (5.19) durch $q_2 = -q$ zusammen. Der „Bremsparameter“ q taucht noch so

im Buch *Cosmology* von S. WEINBERG aus dem Jahre 1972 auf. Die Größe q_3 wird in der englischsprachigen Literatur auch als „**jerk**“ („*Ruckparameter*“), der Parameter q_4 auch als „**snap**“, der Parameter q_5 als „**lerk**“ bezeichnet. Will man n Beschleunigungsparameter q_n bestimmen, so müssen genau auch n Koeffizienten der obigen Reihe bestimmt werden. Dies gilt allerdings nur im euklidischen Fall!

Zwischen beiden Parametersätzen existieren im Falle $w = konstant$ bis einschließlich dritter Ordnung in $\mathbf{z}$ die eineindeutigen Beziehungen

$$\mathbf{q}_2 = -\frac{1}{2}(1 + 3\,w\,(1 - \Omega_m),$$

$$\mathbf{q}_3 = 1 + \frac{9}{2}\,w\,(1 + w)\,(1 - \Omega_m).$$

Es gilt so umgekehrt

$$w = -\frac{1}{3}\,\left(\frac{1 + 6\,q_2 + 2\,q_3}{1 + 2\,q_2}\right);$$

$$\Omega_x = 1 - \Omega_m = \frac{(1 + 2\,q_2)^2}{1 + 6\,q_2 + 2\,q_3}.$$

Im Falle der kosmologischen Konstanten gilt $q_3 = 1$. Ist $q_3 > 1$, so muss $w < -1$ gelten. Der Parameter q_4 („snap“) macht schon Aussagen über die zeitliche Veränderung von w. Doch dieser Parameter ist nur mit Beobachtungen bei sehr hohen Rotverschiebungen $z > 2$ zu bestimmen.

Die Dynamik des Universums in seiner Vergangenheit kann nun mit Hilfe der Beziehung zwischen der scheinbaren bolometrischen Helligkeit $m_B[\mathbf{z}]$ von sehr entfernten Supernovae mit bekannter *absoluter* bolometrischen Helligkeit M_B und ihrer Rotverschiebung $\mathbf{z}$ genau vermessen werden. Aus der klassischen Stellarastronomie folgt zunächst für den Entfernungsmodul $\mu(r)$

$$\mu[r] \equiv m_B[r] - M_B = 5\,\log_{10}(r[pc]) - 5. \tag{5.60}$$

Da Entfernungen in der Kosmologie zweckmäßig in der Einheit $[Mpc]$ angegeben werden, folgt für den Entfernungsmodul $\mu(\mathbf{z}) = m_B(\mathbf{z}) - M_B$

$$\boxed{\mu[\mathbf{z}] = 5\,\log_{10}[d_L(\mathbf{z}; \Omega_x; w)] + 25} \tag{5.61}$$

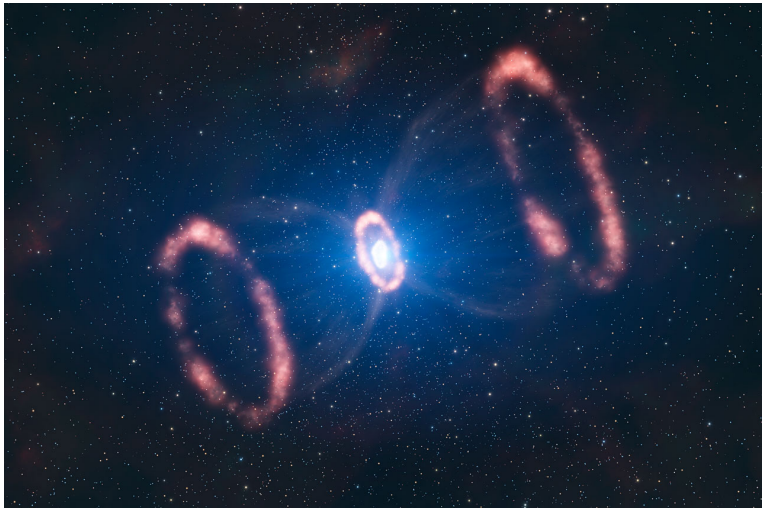


Fig. 5.5: *Die Überreste der Supernova 1987A genau 20 Jahre nach ihrer Explosion in der kleinen Magellanschen Wolke. Deutlich ist ein innerer Ring mit „Knoten“ und zwei schwache äußere Ringe zu erkennen. Supernovae vom Typ Ia (Doppelsystem, wobei ein Stern ein weißer Zwerg ist) eignen sich relativ gut als „Standardkerzen“, obwohl natürlich „typologische Identitäten“ im Makrokosmos nicht existieren können. (Bild: NASA/ESO/HST)*

oder mit (5.55)

$$d_L[\mathbf{z}] = \frac{3000}{h}(1+\mathbf{z})\,\left[\boldsymbol{\eta}(0;\Omega_m;w) - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{z};\Omega_m;w)\right]. \qquad (5.62)$$

Die Größe h ist hier der *reduzierte Hubbleparameter*, gemessen in Einheiten von 100 km/s/Mpc (siehe (5.46)).

Die Beziehung (5.53) gilt nur im Spezialfall $w = konstant$. Ganz allgemein gilt wegen (3.78) für die Leuchtkraftdistanz im *euklidischen Fall*

$$d_L[\mathbf{z}] = \frac{c\,(1+\mathbf{z})}{H} \times \int_0^{\mathbf{z}} \frac{dz'}{\sqrt{(1+z')^3\left(\Omega_x \exp\left[3\int_0^{z'} \frac{w(z'')\,dz''}{1+z''}\right] + (1-\Omega_x)\right)}}. \qquad (5.63)$$

Da man über den Parameter w als Funktion der Rotverschiebung $\mathbf{z}$ nichts weiß, muss man sich im obigen Integral auf theoretische Überlegungen stützen. Wir erwarten zu Beginn der Strukturbildung einen konstanten Grenzwert (z.B. $w = -1$), der im Laufe der kosmischen Entwicklung zu negativeren Werten driften könnte. Da im frühen Universum genähert $\psi^2 \propto a^3$ gelten sollte, machen wir hier den asymptotischen Ansatz

$$w[\mathbf{z}] = w_0 + \frac{w_3}{(1+\mathbf{z})^3} + \dots \tag{5.64}$$

Das Zahlenpaar $\{w_0, w_3\} \equiv \{-1, 0\}$ entspräche wieder *rein formal* dem Modell einer *kosmologischen Konstanten* mit $w = -1$. Weiter unten werden wir aus 580 Supernovae - Daten (Stand 2011) Aussagen zu dem Parameter w_3 machen können.

Bis jetzt haben wir aus Tradition heraus die kosmologischen Parameter Ω_m oder Ω_x zur Darstellung der Rotverschiebung benutzt. Da nach unseren theoretischen Untersuchungen die beschleunigte Expansion durch Strukturbildung und damit durch das Überschreiten eines kritischen Schwellwertes der *gravitativen Bindungsenergie* ausgelöst wird, ist es physikalisch sinnvoller, mit dem Parametersatz (h, β, w) zu arbeiten. Aufgrund der Ergebnisse (4.53) gilt dann

$$d_L[\mathbf{z}] = \frac{c}{H}(1+\mathbf{z}) \int_1^{1+\mathbf{z}} \frac{\sqrt{\beta + 1 - 3w}\, du}{\sqrt{\beta\, u^{3(1+w)} + (1-3w)\, u^3}}. \tag{5.65}$$

Mit Hilfe der Beziehungen (5.61), (5.56) und (5.65) soll ein eigener „Fit“ an die insgesamt 580 Supernovae – Daten von 2008-2011 (union 2.1), zusammengestellt von Kowalski et al. und Amanullah et al. , vorgenommen werden (siehe Figur (5.6). Der Datensatz besteht aus 580 Objekten, die sorgfältig auf systematische Effekte korrigiert wurden. Mit Hilfe der Software *Wolfram Mathematica 9.0* und dem Paket *NonlinearModelFit* erhalten wir zunächst mit den entsprechenden Gewichten der heterogenen Datensätze die Ergebnisse:

$$h = \mathbf{0.7006 \pm 0.0046} \tag{5.66}$$

Der wahrscheinlichste Wert des heutigen Hubbleparameters liegt also bei

$$H_0 = \mathbf{70.06 \pm 0.46}[km/s/Mpc]. \tag{5.67}$$

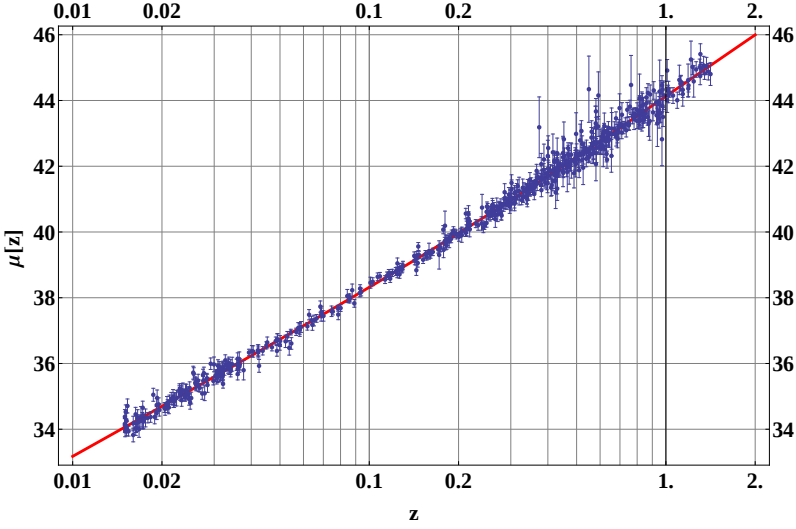


Fig. 5.6: *Eigene Auswertung der Daten von 580 Supernovae vom Typ Ia nach der Arbeit von Kowalski et al. ApJ* ***686****, Issue 2, pp. 749-778 (2008) und Amanullah et al. (The Supernova Cosmology Project), Ap.J.* ***716****, Issue 1, pp. 712-738, (2010). Dargestellt ist der Entfernungsmodul als Funktion der Rotverschiebung z zum besten Fit nach Gleichung (5.61) und (5.55) für ein euklidisches Universum. Die Meßpunkte setzen sich aus Datensätzen unterschiedlicher Qualität zusammen. Die starke Streuung lässt Zweifel über die „Qualität" der SNe-Ia „Standardkerzen" aufkommen. Die durchgezogene rote Linie entspricht dem wahrscheinlichsten Modell mit dem Parametersatz* $(h, \Omega_\Lambda, w) = (0.700, 0.718, -1.010)$.

Der nur im ΛCDM Modellen sinnvolle Parameter Ω_x liegt bei

$$\Omega_x = \mathbf{0.72 \pm 0.07} \tag{5.68}$$

Der Wert ist etwas niedriger als die um das Jahr 2000 veröffentlichten Zahlen. Schließlich ergibt sich der wichtige Zustandsparameter zu

$$w = \mathbf{-1.01 \pm 0.20} \tag{5.69}$$

Das naive Modell einer „Kosmologischen Konstanten" ist erstaunlich gut erfüllt, obwohl die Fehlertoleranz immer noch recht groß ist. Die Ergebnisse der 580 Datenpunkte ist in Figur (5.6) und (5.7) dargestellt.

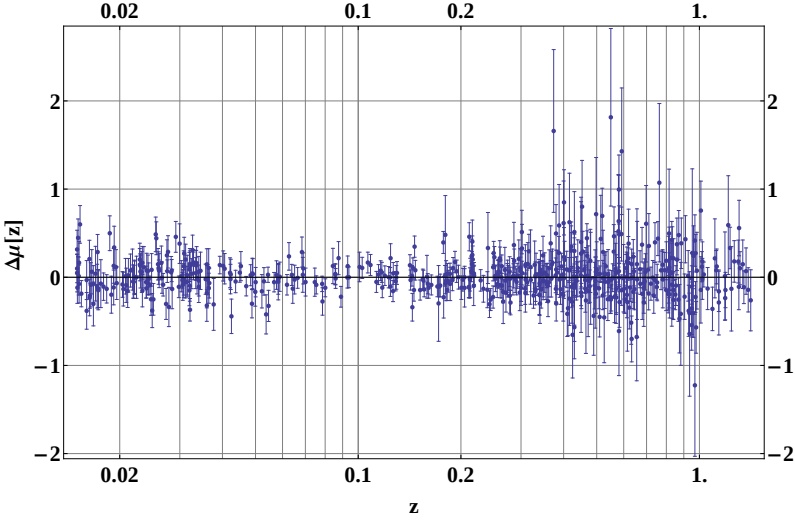


Fig. 5.7: *Die Residuen der 580 Supernovae Ia - Daten zum Standard-fit mit dem Parametersatz* $(h, \Omega_\Lambda, w) = (0.700, 0.718, -1.010)$. *(The Supernova Cosmology Project, 2008-2011). Dargestellt ist die Abweichung der einzelnen Entfernungsmodule vom idealisierten Modell. Die Streuung der Daten deutet auf „individuelle nicht – typologische Eigenschaften" der Supernovae Ia Ausbrüche und auch unterschiedliche Nähe zu Nachbargalaxien hin.*

Der Nachteil der obigen Auswertung ist die Annahme eines konstanten w Parameters. Mit (5.64) und (5.63) ergibt ein analoger Datenabgleich die folgenden neuen Resultate:

$$h = \mathbf{0.70046 \pm 0.00632} \tag{5.70}$$

Der Wert des heutigen Hubbleparameters wäre demnach

$$H_0 = \mathbf{70.0 \pm 0.6}[km/s/Mpc]. \tag{5.71}$$

Der Anteil der „Dunklen Energie" nach dem Standardmodell liegt jetzt bei

$$\Omega_x = 1 - \Omega_m = \mathbf{0.71 \pm 0.20} \tag{5.72}$$

Hier fällt sofort die große Standardabweichung auf. Das wird noch augenfälliger bei den w_0 und w_3 Parametern. Denn wir erhalten

$$w_0 = \mathbf{-1.08 \pm 1.50}, \qquad w_3 = \mathbf{0.076 \pm 1.48} \tag{5.73}$$

Die statistischen Fehler der Originaldaten sind einfach zu groß, um definitiven Schlüsse über die Veränderlichkeit des **EoS** Parameters über kosmologischen Zeiträume machen zu können. Aus physikalischer Sicht es es aber schon erstaunlich, wie *konstant* dieser w - Parameter über einen weiten Bereich des Dichtekontrastes $\boldsymbol{\psi}$ zu sein scheint. Wie im Ringkosmos erwarten wir eigentlich bei zunehmenden Dichtekontrast eine langsame Abnahme dieses Parameters zu noch negativeren Werten als $w = -1$.

Zuletzt werten wir die Daten mit den neuen physikalischen Parametern H, w und β, dem gravitativen Zugewinn an Energie durch Strukturbildung, aus. Nach den Definitionen (4.53) gilt

$$\Omega_m = \frac{1}{1 + \beta/(1 - 3\,w)}; \;\; \Omega_x = \frac{1}{1 + (1 - 3\,w)/\beta}. \tag{5.74}$$

Wird der Datensatz von 580 Beobachtungspunkten mit diesen Modellannahmen ausgewertet, so erhält man die Resultate

$$\beta = \mathbf{10.3 \pm 2.3},$$
$$H_0 = \mathbf{70.06 \pm 0.50}[km/s/Mpc];$$

Der w - Parameter ergibt sich zu

$$w = \mathbf{-1.01 \pm 0.20}$$

Man erhält so das erstaunliche Resultat, dass durch **Strukturbildung** im *heutigen Universum sich der Betrag der negativen gravitativen Energiedichte (Bindungsenergie) auf das etwa zehnfache der homogenen strukturlose Grundzustandsdichte erhöht hat!*. Man darf so von einem *extrem heterogenen heutigem Universum* sprechen. Die sogenannte „Dunkle Energie“ ist in dieser Interpretation natürlich nichts anderes als durch Strukturbildung erzeugte zusätzliche **Gravitationsenergie**, die durch Rückkopplung die beschleunigte Expansion des Raumes bewirkt. Raum, Zeit und Materie sind hier *komplementäre* Manifestationen der gleichen Realität geworden.

5.4 Die S_8 Anomalie und das xCDM-Modell

Bei der Diskussion der Strukturbildung im Zusammenhang mit der sogenannten S_8 Anomalie zeigte sich, dass *eine mögliche Deutung* dieser Diskrepanz daran besteht, im frühen Universum für die Zustandsgleichung $w = -2/3$ anzunehmen. Die Unsicherheit des Hubble-Parameters H_0 spielte hier keine Rolle. Wertet man aber die Entfernungsmodule der S-IIa- Standardkerzen mit der Hypothese $w = -2/3$ aus, so erhält man zwar einen Hubble-Parameter H_0 von etwa **70** km/s/Mpc, aber der Massenparameter liegt nur bei etwa $\Omega_m \sim \mathbf{0.1}$. Wir kommen auf dieses Problem später zurück.

Alternativ legen wir jetzt als Grundlage für die Datenauswertung die *hypothetische* bzw. *spekulative* Gleichung (4.154)

$$\zeta'^2 = \frac{\Omega_m}{\zeta}\,\frac{1+\zeta^2/\zeta_0^2}{1-\zeta^2/\zeta_0^2}. \tag{5.75}$$

zugrunde. Hier ist zu Beginn des Universums die Zustandsgleichung exakt $w = -2/3$, die dann aber bei zunehmender Verdichtung der Strukturen immer weiter abnimmt und in ferner Zukunft in einer spontanen Endsingularität endet. Mit (4.153) können wir dies auch

$$\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^2 = \frac{\zeta_0^2-1}{\zeta_0^2+1}\,\frac{1}{\zeta^3}\,\frac{\zeta_0^2+\zeta^2}{\zeta_0^2-\zeta^2}. \tag{5.76}$$

schreiben. Führen wir wieder die Rotverschiebung z gemäß $\zeta = 1/(1+z)$ ein, so folgt

$$H[z] = H_0\sqrt{\frac{\zeta_0^2-1}{\zeta_0^2+1}\,\frac{\zeta_0^2\,(1+z)^2+1}{\zeta_0^2\,(1+z)^2-1}\,(1+z)^3}. \tag{5.77}$$

Bemerkenswert ist jetzt, dass die Expansionsdynamik nur noch von dem Endskalenfaktor $\zeta_0 > 1$ und dem heutigen Hubbleparameter H_0 abhängt. Damit gilt für die Leuchtkraftdistanz

$$d_L[z] = \frac{c}{H_0}\,(1+z)\sqrt{\frac{\zeta_0^2+1}{\zeta_0^2-1}}\int_0^z\sqrt{\frac{\zeta_0^2\,(1+z)^2-1}{\zeta_0^2\,(1+z)^2+1}}\,\frac{dz}{(1+z)^{3/2}}. \tag{5.78}$$

oder

$$\boxed{d_L[z] = \frac{c}{H_0}\,(1+z)\sqrt{\frac{\zeta_0^2+1}{\zeta_0^2-1}}\int_1^{1+z}\sqrt{\frac{\zeta_0^2\,u^2-1}{\zeta_0^2\,u^2+1}}\,\frac{du}{u^{3/2}}.} \tag{5.79}$$

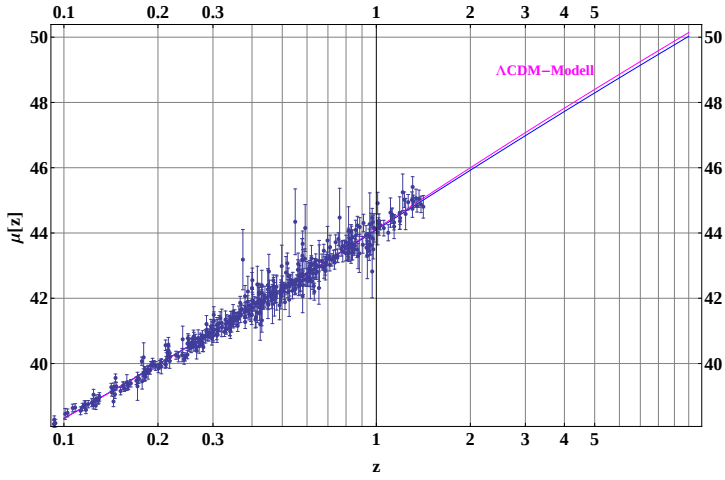


Fig. 5.8: *Analoge Auswertung der Daten von 580 Supernovae vom Typ Ia nach der Arbeit von Kowalski et al. ApJ* ***686****, Issue 2, pp. 749-778 (2008) und Amanullah et al. (The Supernova Cosmology Project), Ap.J.* ***716****, Issue 1, pp. 712-738, (2010) mit der Modellfunktion (5.79) . Dargestellt ist der Entfernungsmodul als Funktion der Rotverschiebung zum besten Fit nach Gleichung (5.79) und (5.80) für ein euklidisches Universum (Null-Energie Universum). Zum Vergleich ist das klassische ΛCDM Modell als rosa Kurve oberhalb dargestellt. Die leicht unterhalb liegende blaue Linie entspricht dem wahrscheinlichsten Modell mit dem Parametersatz* $(h, \zeta_0) = (\mathbf{0.708}, \mathbf{1.38})$*. Wie man sieht, sind die Unterschiede mit den Daten von 2011 kaum merklich. Entfernte Galaxien erscheinen aber etwas heller als man nach dem Standardmodell erwartet.*

Im Grenzfall $\zeta_0 \to \infty$ geht diese Relation in die MATTIG-Formel (5.52) aus dem Jahre 1958 mit $\Omega_m = 1$ über ([121]).

Analog wie im vorhergehenden Kapitel wollen wir nun die Daten aus dem Jahre 2010 und 2011 mit der neuen Modellfunktion (siehe (5.61))

$$\mu[\mathbf{z}] = 5\ \log_{10}[d_L[H_0; \zeta_0; \mathbf{z}]] + 25 \tag{5.80}$$

interpretieren und insbesondere H_0 und die maximale Ausdehnungsskala ζ_0[6] bestimmen.

Wir benutzen jetzt wieder den gleichen „alten“ Datensatz aus 580 Objekten, wie sie im Jahre 2011 vorlagen. Mit dem Paket *Nonlinear-*

[6] Zum heutigen Zeitpunkt gilt $\zeta = 1$.

ModelFit erhalten wir zunächst mit den entsprechenden Gewichten der heterogenen Datensätze die Ergebnisse:

$$h = \mathbf{0.7078 \pm 0.0042} \tag{5.81}$$

Der wahrscheinlichste Wert des heutigen Hubbleparameters liegt also wieder bei

$$H_0 = \mathbf{70.8 \pm 0.4}[km/s/Mpc]. \tag{5.82}$$

Die maximale Expansionsskala ζ_0 ergibt sich zu

$$\zeta_0 = \mathbf{1.38 \pm 0.02}. \tag{5.83}$$

Der dazu gehörige Massenparameter erfolgt mit (4.153) zu

$$\Omega_m = \mathbf{0.31 \pm 0.01} \tag{5.84}$$

Der Werte des Hubbleparameters und die des Massenparameters liegen tendenziell etwas höher als beim reinen ΛCDM Modell. Dabei ist die Fehlertoleranz gleich wenn nicht weniger geworden. Die Ergebnisse zeigen, dass in der Interpretation der Daten im Bereich der Rotverschiebungen von $0 < z < 1.5$ einige Freiheiten bestehen. Insbesondere muss man bedenken, dass im neuen Modell der w - Parameter von $w = -2/3$ auf unter $w = -1$ fällt, also in keiner Weise mehr konstant ist.

Doch das obige spekulative Modell mit einer spontanene Endsingularität hat eine Besonderheit. Die umstrittene S_8 Anomalie in der Entwicklung des Dichtekontrastes bezüglich des ΛCDM Modelles verschwindet jetzt fast vollständig, da die Expansionsdynamik des Skalenfaktors praktisch der des ΛCDM Modelles gleicht. Anstatt (4.205) gilt jetzt für das Dichteverhältnis

$$\frac{\psi_{\{G\}}}{\psi_{\{-1\}}} = \frac{\mathbf{HeunG}\left[-1, \frac{5}{4}, \frac{1}{8}(5 - \imath\sqrt{23}), \frac{1}{8}(5 + \imath\sqrt{23}), \frac{9}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1-\Omega_m}{1+\Omega_m}\right]}{{}_2\mathbf{F_1}\left[\frac{1}{3}, 1, \frac{11}{6}, 1 - \frac{1}{\Omega_m}\right]}. \tag{5.85}$$

Für die Funktion $\mathbf{G}[x] \equiv \mathbf{HeunG}[x]$ gilt die Differentialgleichung

$$2\,x\,(1 - x^4)\,\mathbf{G}'' + (7 + 4\,x^2 - 7\,x^4)\,\mathbf{G}' + 2\,x\,(5 - 3\,x^2)\,\mathbf{G} = 0,$$

die mit der Anfangsbedingung $\mathbf{G}[0] = 1$ und $\mathbf{G}'[0] = 0$ gelöst werden muss. Man kann an der Abb. (5.9) sofort erkennen, dass nur eine 2%-ige

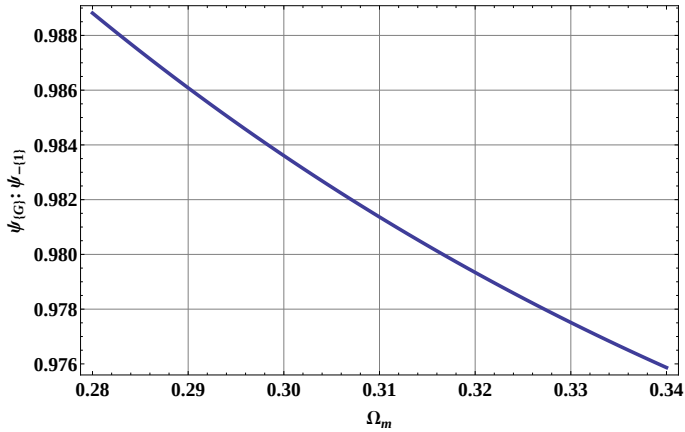


Fig. 5.9: *Das Dichteverhältnis (5.85), wie es nach der Dynamik von (4.81) im Vergleich zu dem Standardmodell zu erwarten ist. Deutlich ist zu sehen, dass für einen Massenparameter von $\Omega_m = 0.3$ die Diskrepanz nur noch etwa 2% beträgt - viel zu wenig gegenüber der beobachtenden Anomalie von etwa 10%. Ein Modell mit $w = -2/3 \equiv$ konstant kann die Daten der Strukturbildung offensichtlich besser erklären.*

Anomalie im Dichteverhältnis bei $\Omega_m \sim 0.3$ erklärbar ist - nicht aber etwa 10%, wie die Daten des *Kilo-Degree Survey* (**KiDS**) sagen. Das xCDM-Modell mit einer nahen Endsingularität unterscheidet sich im Strukturwachstum so kaum vom klassischen ΛCDM Modell.

5.5 Quasare und die H_0-Anomalie

Wir kehren wieder zu unserem physikalischen Modell mit $w = -2/3$ zurück. Auf den ersten Blick hatten wir ja ein Problem, mit der Annahme $w = -2/3$ das Hubble-Diagramm der SN-Ia - Supernovae im Entfernungsmodul als Funktion der kosmischen Rotverschiebungen zu deuten. Doch hier kommt der Verdacht auf, dass die bei den Supernovae verwendeten Rotverschiebungen im Bereich $0 < z < 1.4$ einfach zu gering sind, um genauere Einsichten in die Dynamik des frühen Universums zu erhalten.

Die Autoren E. Lusso und G. Risaliti versuchen aber seit dem Jahre 2015 wohl zum erstenmal, mit Hilfe von weit entfernten Quasaren mit Rotverschiebungen $2 < z < 6$ das klassische Hubble-Lemaître- Diagramm

auf wesentlich frühere Entwicklungsstufen des Universums - also auf größere Rotverschiebungen - zu erweitern. ([167],[168]). Ihre Studie benutzt Röntgendaten der Satelliten Chandra (NASA) und XMM Newton (ESA) zusammen mit den UV-Daten des Sloan Digital Sky Survey (SDSS). Unter der gewagten Voraussetzung, dass es mit der Rotverschiebung keine nennenswerte Entwicklungseffekte gibt, können sie mit einer Korrelation zwischen Röntgen - und UV-Emissionen der beteiligten Akkretionsscheibe des Quasars die Distanz desselben recht genau abschätzen. In wieweit

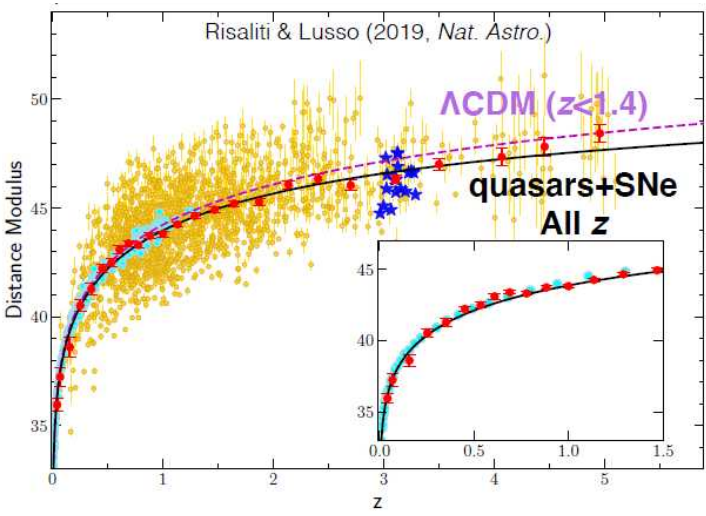
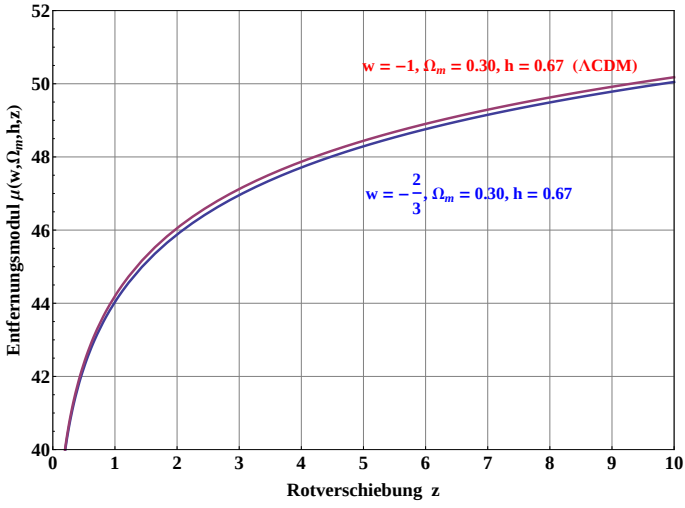


Fig. 5.10: *Das Hubble Diagramm aus Daten von etwa 1600 Quasaren, mit denen die Autoren Risaliti & Lusso ([167]) versuchen, die Dynamik des frühen Universums zu verstehen. Es ist noch unsicher, inwieweit die Kalibrierung der Quasare als mögliche „Standardkerzen" so sicher ist, dass man sichere Aussagen zur Dynamik des frühen Universums machen kann. Die gelben Punkte sind die Originaldaten, die roten sind gemittelte Daten. Tendenziell liegen die neuen Daten unterhalb der Standardkurve des ΛCDM Modelles.*

ihre Kalibrierung der Quasarenhelligkeit von systematischen Entwicklungseffekten und systematischen Fehlern frei ist, muss hier offen bleiben. Zur Diskussion könnte man hier die Abb. (5.10) heranziehen, welche zeigt, dass bei den Quasaren die Magnituden des Entfernungsmodul im Bereich $2 < z < 5$ tendenziell unterhalb der Standardkurve des ΛCDM



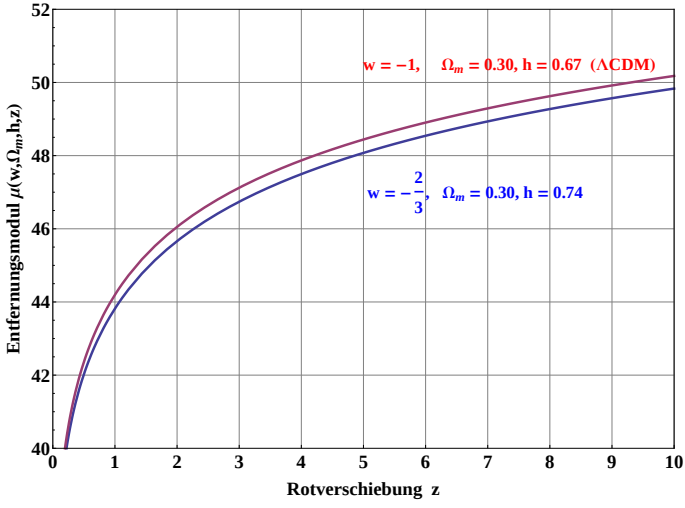


Fig. 5.11: *Das „Schisma“ des frühen und des späten Universums anhand der Werte des Hubble-Lemaître Parameters H_0 und des w-Parameters in dem Verlauf des Entfernungsmodul als Funktion der Rotverschiebung z. Die höheren Leuchtstärken von Quasaren im Bereich $z > 2$ lassen sich primär durch einen größeren Hubbleparameter H_0 und nur sekundär durch den geänderten w Parameter $-2/3$ anstatt -1 des Standardmodelles beschreiben.*

Modelles liegen. Daraus kann man aber keine sichere Aussage zu einem modifizierten w - Parameter machen. Man kann auch nicht schließen, dass die sogenannte „Dunkle Energie“ immer stärker wird, also der Wert von w unter -1 fällt. Die Daten der entfernten Quasare lassen sich am wahrscheinlichsten durch eine höhere Hubble-Lemaître Konstante H_0 deuten. Diesen Schluss kann mit zwei Abbildungen untermauert werden.

In Abb. (5.11) ist deutlich zu erkennen, dass ein Modell mit $h = 0.67$[7] und $w = -2/3$ sich kaum von einem Modell mit $h = 0.67$ und $w = -1$ unterscheidet, obwohl der geänderte w - Parameter von $w = -1$ zu $w = -2/3$ schon den Trend zu einer erhöhten Helligkeiten im Bereich $z > 3$ aufzeigt. Einen deutlich größeren Effekt erzielt man aber durch einen höheren Hubbleparameter wie zum Beispiel $h = 0.74$, wie es neuste Messungen im späten Universum übereinstimmend zeigen. In der unteren Abbildung von (5.11) ist dieser Effekt deutlich zu sehen. Im Prinzip werden so die neueren lokalen Bestimmungen von H_0 im Bereich $h \approx 0.74$ unterstützt ([222]). Die hochgerechneten Werte von $h \approx 0.67$ aus den Messungen der Hintergrundstrahlung des Planck-Kooperation unter Annahme eines gültigen ΛCDM Modelles werden so immer unglaubwürdiger. Doch es entsteht nun ein neues Problem: *Das Alter des Universums*. Nach (4.87) gilt im wCDM-Modell für das Alter des Universums

$$T_A = \frac{2}{3\,H_0}\ {}_2\mathbf{F_1}\left[\tfrac{1}{2}, 1, 1 - \tfrac{1}{2w}, 1 - \Omega_m\right]$$

Nun gilt mit den zwei divergenten Werten

$$H_0 = \mathbf{67.4}\,km/s/Mpc \qquad 1/H_0 = \mathbf{14.5}\,10^9\,Jahre$$
$$H_0 = \mathbf{74.0}\,km/s/Mpc \qquad 1/H_0 = \mathbf{13.2}\,10^9\,Jahre.$$

Mit $\Omega_m = 0.3$ ergibt sich mit dem ersten Wert und $w = -1$ das Weltalter zu $T_A \sim \mathbf{14}$ Milliarden Jahre. Setzt man dagegen $w = -2/3$ und nimmt den zweiten Wert für H_0, so kommt man nur auf $T_A \sim \mathbf{12}$ Milliarden Jahre. Das neue Alter ist also etwa 2 Milliarden Jahre jünger. Wie passt dies zu den ältesten Kugelhaufen? Hier scheinen einige Prämissen im Modell nicht sauber erfüllt zu sein.

[7] entspricht $H_0 = 67$ km/s/Mpc

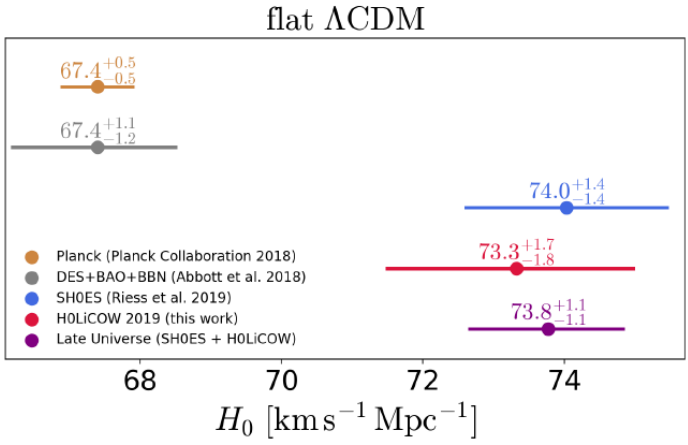


Fig. 5.12: *Das „Schisma“ des frühen und des späten Universums anhand der Werte des Hubble-Lemaitre Parameters H_0. Auch unabhängige Messungen an mehrfachen Gravitationslinsenbildern und ihren Zeitverzögerungen bei zeitveränderlichen Phänomenen (HOLiCOW) führt zu einem Hubbleparameter von* **73.3** *Km/s/Mpc. Das steht im Widerspruch zu den Hochrechnungen der CMB-Hintergrundstrahlung des sehr frühen Kosmos ([222]).*

5.6 Neuere Auswertungen der Supernova Daten

Im Jahre 2024 erschien etwa 10 Jahre nach den obigen Datensätzen eine neue Veröffentlichung von weiteren Supernovae Beobachtungen mit einem Umfang von etwa mehr als 1500 Objekten. Durchgeführt wurde diese umfangreiche Analyse von der 2005 gegründeten *Dark Energy Survey Collaboration*([1]). Wir wollen hier nur die Resultate vorstellen. Benutzt man nur die SN-Daten allein einschließlich gewisser systematischer Fehler, so findet die Forschergruppe für das flache ΛCDM Modell den Wert

$$\Omega_m = \mathbf{0.352 \pm 0.017}.$$

Bei Annahme eines flachen $wCDM$ Modelles ergeben sich die Werte

$$\Omega_m = \mathbf{0.264 \pm 0.085}, \qquad w = \mathbf{-0.8 \pm 0.15}.$$

Werden auch noch die Daten von Planck CMB, SDSS BAO berücksichtigt, so ergeben sich die Werte

$$\Omega_m = \mathbf{0.321 \pm 0.007}, \qquad w = \mathbf{-0.941 \pm 0.026}.$$

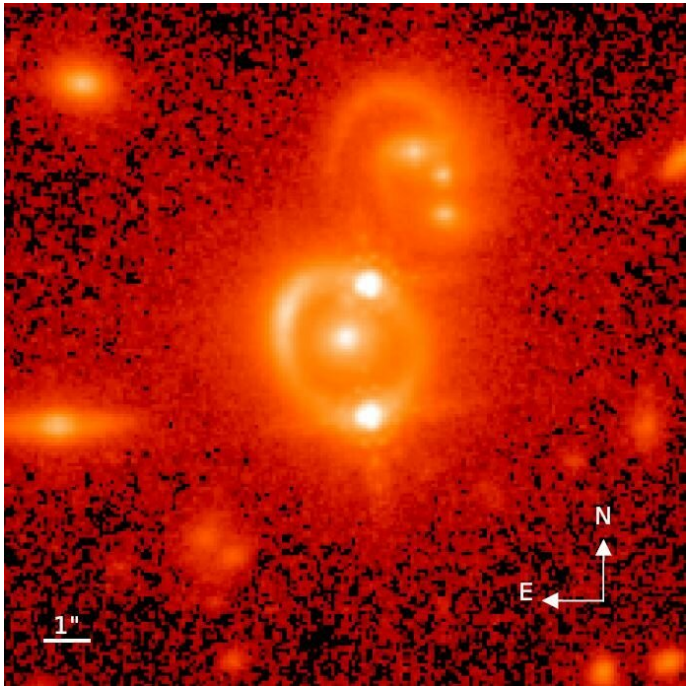


Fig. 5.13: *Das Doppelbild des Quasars SDSS J1206+4332 mit Lichtring, geformt durch das Gravitationsfeld einer Vordergrundgalaxie, kann zur Bestimmung des Hubble-Lemaître Parameters benutzt werden, wenn zeitlich variable Prozesse im Quasar vorgehen, die zu unterschiedlichen Zeiten (Wochen) bei den Doppelbildern oder Mehrfachbildern in Erscheinung treten.(Projekt HOLiCOW).*

Die Autoren bemerken, dass diese Daten innerhalb der 2σ Grenze mit $w = -1$ konsistent seien. Doch mit derselben Überzeugung könnte man dies auch für $w = \mathbf{-2/3} \sim \mathbf{-0.67}$ sagen. Der letztere Wert scheint sogar besser zu diesen neusten Daten zu passen. Die kosmologische Konstante als Deutung der beschleunigten Expansion wird somit unwahrscheinlicher. Man muss auf weitere Auswertungen wie diejenigen des EUKLID-Satelliten warten, um mehr Klarheit zu bekommen. Wünschenswert wären natürlich Daten für Rotverschiebungen im Bereich $1 < z < 4$.

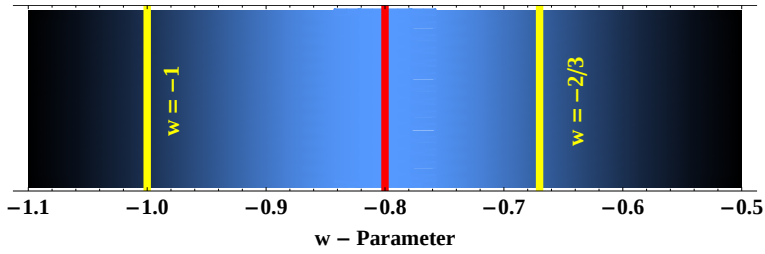


Fig. 5.14: *Graphische Darstellung des wahrscheinlichsten w-Parameters* -0.8 *und seiner Streuung* ± 0.15 *nur aus über 1500 neuen Supernovae Daten im Spannungsfeld des Parameters* $w = -1$ *(Kosmologische Konstante) und dem in diesem Buch postulierten primodialen Wert* $w = -2/3$*. Man sieht, dass der letztere Wert im Rahmen der Streuung schon besser zu den Beobachtungsergebnissen passt als der klassische Wert* $w = -1$*. Unklar bleibt aber die zeitliche Konstanz dieses wichtigen Parameters über die kosmische Lebenszeit.([1])*

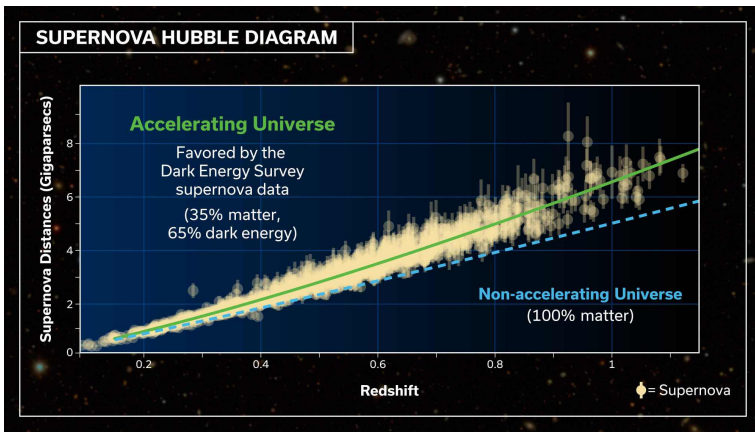


Fig. 5.15: *Anschauliche Zusammenfassung der im Jahre 2023 von dem Consortium Supernova Survey erzielten Ergebnisse über die Expansion des Universums. Die beschleunigte Expansion wird eindeutig bestätigt, doch der EOS-Parameter w scheint mit* $w \sim$ *-0.8 doch etwas größer als der klassische Werte w=-1 (kosmologische Konstante) zu sein. (Bild:[1])*

6 Schlussfolgerungen

> *The truth may be puzzling. It may take some work to grapple with. It may be counterintuitive. It may contradict deeply held prejudices. It may not be consonant with what we desperately want to be true. But our preferences do not determine what's true.*
>
> Carl Sagan (1934-1996)

Fassen wir also zusammen: Seit dem Jahre 1998 ist es durch Präzisionsmessungen an Supernovae vom „Typ" SNe-Ia in fernen Galaxien und auch durch Vermessung der Mikrowellenhintergrundstrahlung sehr wahrscheinlich geworden, dass die Expansion des Universums nicht abbremst, sondern sich seit etwa 5 Milliarden Jahren beschleunigt. Im konservativen Standardmodell wird dies bis heute (2020) auf eine Konstante Λ oder eine zeitlich konstante „dunkle Energie" zurückgeführt. Eine Deutung als „Vakuumenergie" ist letztendlich gescheitert, da die zu erwartenden theoretischen Werte und der gemessene Wert um 120 Größenordnungen auseinanderliegen. Zudem ist der *Casimir-Effekt* kein Beleg für die „Realität" der „Nullpunktsenergie des Vakuums" (siehe Jaffe ([86])). Auch die Deutung durch eine „relativistische Flüssigkeit" mit Kopplung eines „Quantenfeldes" (*Quintessenz*) in den erweiterten Friedmann Gleichungen ist rein spekulativ und führt auf Widersprüche. Eine Deutung der beschleunigten Expansion als *reine* „optische Illusion" erscheint unwahrscheinlich, obwohl starke Inhomogenitäten der Materie und Metrik die Lichtausbreitung und ihre Rotverschiebung systematisch beeinflussen können. Die hier durchgeführten Modellbetrachtungen und Berechnungen deuten stark darauf hin, dass die beschleunigte Expansion im Universum *dynamisch real* und direkt oder indirekt eine Folge der fortschreitenden Strukturierungsprozesse durch eine *aktive gravitative Rückkopplungen* bei globaler Energieerhaltung ist. ***Die klassischen Friedmann-Lemaître Gleichungen für einen homogenen Kosmos sind für die Be-***

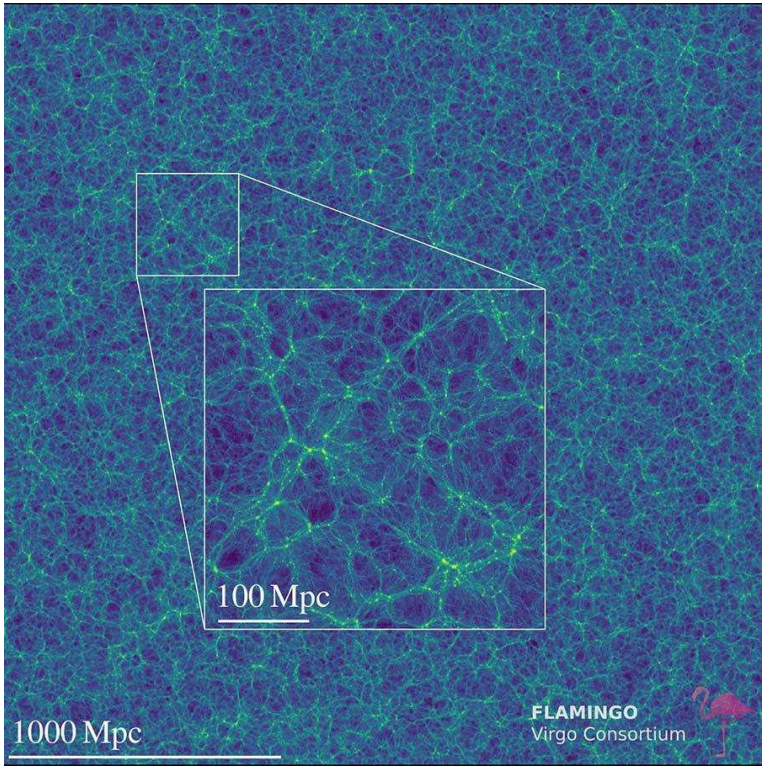


Fig. 6.1: *Eine neue Computersimulation aus dem Jahre 2023 für die Bildung eines verzweigten Netzes von kosmischen Strukturen wie Galaxienhaufen und Galaxien im expandierenden Kosmos. Gerechnet wird in einem mitgeführten Koordinatensystem. Bei der Simulation wird nicht nur eine „Dunkle Materie" angenommen, sondern auch die weniger massereiche baryonische Materie mit galaktischen Winden in dichten Galaxienhaufen wird voll berücksichtigt. Die Hoffnungen, dadurch die* (S_8, σ_8) *Anomalie der Strukturbildung genauer erklären zu können, sind aber gescheitert. Dies ist ein starker Hinweis auf eine Zustandsgleichung* $p = w\,\varrho\,c^2$ *mit* $w = \mathbf{-2/3}$ *anstatt* $w = -1$ *(Kosmologische Konstante). (Quelle:* ***Flamingo project****. Universiteit Leiden, Durham University (Institute for Computational Cosmology), Liverpool John Moores University)(Schahe et al., Kugel et al. 2023)*

schreibung der Dynamik eines stark heterogenen Kosmos nicht mehr gültig oder ausreichend. Es gibt eine starke Rückkopplung der Strukturbildung auf die Expansionsrate. Strukturbildung

und beschleunigte Expansion bedingen sich gegenseitig. Fassen wir die wesentlichen Punkte unserer Modellvorstellungen in diesem Buch noch einmal zusammen:

- **Euklidischer Raum**: Wir vertreten die Hypothese, dass das Universum als Ganzes im Mittel eine *exakte euklidische Geometrie* aufweist. Topologisch heißt das aber nicht , dass der Raum notwendig unendlich ausgedehnt ist, wie es immer wieder behauptet wird; sondern der Raum kann nach den drei orthogonalen Richtungen periodischen Randbedingungen unterliegen (Cliffordsch - Kleinschen Raumformen; ([92],[119]) Analogie : Euklidische Oberfläche eines Zylinders). Die Materieverteilung ist durch induzierte Pekuliarbewegungen gegenüber dem expandierenden "Hubble-Fluss" weder homogen noch perfekt isotrop.

- **Null-Energie**: In diesem Buch wird die „klassische Newtonsche Energie-Analogie" vertreten, dass als Folge einer exakten euklidischen Geometrie das Universum ein physikalisches System mit Gesamtenergie Null darstellt. Dies ist auch im Bild der "Einsteinschen Gravitation" verständlich: Wenn global die Gesamtenergie verschwindet, kann es auch keine globale metrische Krümmung geben. Das Universum muss also großräumig *euklidisch flach* sein. Positive wie negative Ladungen gleichen sich aus. Die kinetischen Massenenergien und die negativen Gravitationsenergien gleichen sich aus. Die allgemeine Relativitätstheorie - da eine *lokale Theorie* - kann die Energiefrage und die Topologiefrage des Universums nicht eindeutig beantworten. Metaphysisch gesprochen ist das Universum somit eine „Schöpfung" aus dem ***absoluten Nichts*** in das ***gegensätzliche Etwas*** von *"Plus"* und *"Minus"*. Die Existenz des Universums ist somit eine Singularität des „Seins". Mathematik ist der Schlüssel zum Verständnis oder der Beschreibung, wie aus dem absoluten Nichts etwas komplex Gegensätzliches entstehen kann; und sie ist der Faden, aus dem das Gewebe der Realität gewebt wird ([6]). Mit dem „Urknall" hat das Universum nur scheinbar einen Anfang - in der Eigenzeit der allgemeinen Relativitätstheorie verschiebt sich aufgrund extrem starker Gravitationsfelder im „Feuerball" der zeitliche Beginn der „Schöpfung" nach $t = -\infty$. Die Lebensdauer des Universums wäre demnach in diesem Zeitmaß unbegrenzt.

- **Dunkle Energie**: Das Wechselspiel zwischen den beiden fundamentalen Zeitfunktionen der Kosmologie – dem Skalenfaktor $a[t]$ und der Dichtekontrastfunktion D_+ (nichtlinearer Zusammenhang mit dem Ordnungsparameter $\psi[t]$)– führt zu einem stark inhomogenen „filamentären" Universum, in dem durch Rückkopplung kinetische Energie, die bei der Strukturbildung im expandierenden Koordinatensystem verloren geht („kosmische Reibung"oder *„cosmic drag"*), direkt in eine beschleunigte Expansion des Universums überführt wird. „***Dunkle Energie ist somit negative Gravitationsenergie der Strukturbildung***" . Der kinetische *metrische* Druck ist aber immer *positiv* ($\propto \dot{\psi}^2$) und einfach proportional dem Quadrat der Geschwindigkeitsdispersion (Impulsstrom) der "schwarzen" Galaxienkerne gegenüber dem Hubble-Fluss. Der wichtigste Messparameter der beschleunigten Expansion ist $w \equiv p/\varrho$, der aufgrund von Messungen augenblicklich (2018) sehr nahe bei $w \approx -1$ liegt. Die in dieser Arbeit betrachtete Kopplungstheorie zwischen Expansion und Strukturbildung ergibt aber einen exakten *primordialen* Wert von $w = \mathbf{-2/3}$. Es ist aber möglich oder wahrscheinlich, dass der w - Parameter, der kurz nach dem „Urknall" bei $w = -2/3$ war, im Laufe der Strukturbildung langsam abnahm. Rein zufällig könnte er heute bei etwa $w \approx -1$ liegen. Unsicherheiten in den Supernovae-Daten als „Standardkerzen" bleiben aber bestehen. Die Tatsache, dass das heutige Universum sich im Dichtekrontrast vielleicht um etwa 10% homogener darstellt als wir es nach dem ΛCDM Modell aus den Planck-Daten und einer Hochrechnung erwarten ($\mathbf{S_8}$-Anomalie), spräche eher für einen Zustand $w \sim \mathbf{-2/3}$ und nicht für $w = -1$ (Standardmodell). Die Probleme der Hubblekonstanten könnten durch eine Anisotropie und globale der kosmischen Umgebung hervorgerufen werden (kinematischer Dipol von Quasaren und Radiogalaxien stimmen mit dem CMB Dipol nicht genau überein !).

- **Dunkle Materie**: Die Ergebnisse unserer Betrachtungen machen es wahrscheinlich, dass die Existenz sogenannter „**Dunkler Materie**" im Universum wohl notwendig ist, wenn man bei der *Einstein-Newton* Theorie bleiben will. Die wahrscheinlichsten Kandidaten sind wohl **black holes**. Sie existieren mit Sicherheit in den Kernen von Galaxien (auch Zwerggalaxien) und müssen auch schon

im **primordialen Feuerball** vorhanden gewesen sein. Nach der Rekombination waren sie dann sofort Kondensationskeime für die zukünftigen Galaxien und Galaxiengruppen. Das Suchen nach exotischen Elementarteilchen wie „Axionen“ oder „WIMPS“ ist bis heute erfolglos geblieben. Auf einer Tagung von „Astroteilchenphysiker“ in München im September 2011 wurde diese Situation überdeutlich. So hat das Experiment „Cresst“ im Gran-Sasso – Tunnel angeblich schwache – sehr schwache – Hinweise auf „WIMPS“ gefunden, doch andere Experimente wie CDMS in den Vereinigten Staaten, Edelweiss in Frankreich oder XENON in Italien sehen nur „Nullresultate“. Das bis jetzt empfindlichste Experiment LUX (*Large Underground Xenon dark matter detector*) in Sanford/South Dakota in USA konnte in einer ersten Phase Ende Oktober 2013 absolut keine WIMPs - Teilchen feststellen, die angeblich einen großen Teil der angeblich existierenden Dunklen Materie ausmachen sollen. *Alle früheren angeblichen Nachweise sind somit fehlerhaft gewesen!* Vielleicht handelt sich bei der „Dunkler Materie“ um heutige Galaxien um ein exotisches Massenspektrum von „*black holes*“, die als „Asche des Urknalls“ das Halo dieser Galaxien ausfüllen. Das Problem ist hier der Nachweis solcher kompakten unsichtbaren Objekte durch „Gravitationslinsen“. Sind der Beobachter, die Linse (MACHO) und eine Lichtquelle in gerader Linie, der Winkelradius des entstehenden *Einstein-Ringes* ist durch die Formel

$$\Theta = \sqrt{\frac{4\,G\,M}{c^2}\,\frac{r_A}{r_B\,r_C}} \tag{6.1}$$

gegeben. r_A bedeutet hier die Distanz von der Linse zur Quelle, r_B die Distanz vom Beobachter zur Linse und d_C die Distanz vom Beobachter zur Lichtquelle. Über das Massenspektrum M lässt sich bis heute nur wenig sagen. Entscheidend für die Zukunft ist, ob der effektive Wirkungsquerschnitt $\pi\,\Theta^2$, integriert über ein Sichtvolumen, einen nachweisbaren Effekt ergeben kann. Denn schon Laplace hat 1799 über Objekte im Universum spekuliert, die aufgrund ihrer starken Gravitation selbst Licht nicht aussenden können.

- **Schisma**: Das „Schisma“ des Hubbleparameters H_0 im frühen und späten Universum ist zunächst nur eine Tatsache, die darauf

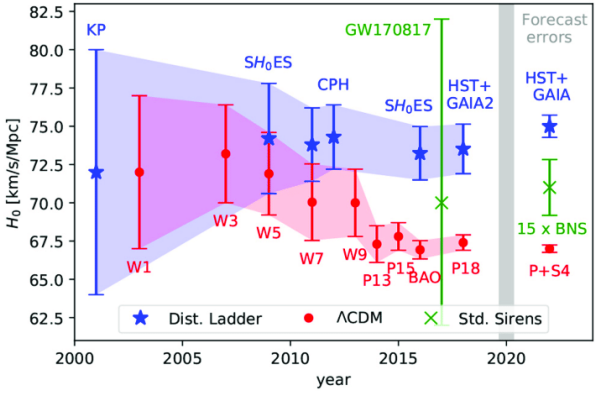


Fig. 6.2: *Das ganze Dilemma („Schisma“)der heutigen Standardkosmologie zeigt sich in dieser Graphik zur Bestimmung des heutigen Hubble-Parameters H_0. Seit dem Jahre 2010 divergieren die klassischen lokalen Bestimmungen aus den Supernova Daten (blau) und die „Hochrechnungen“ aus den Auswertungen aus der kosmischen Hintergrundstrahlung (rot) mit Hilfe der Standardmodelle des frühen Universums auf den heutigen Zeitpunkt immer weiter auseinander und passen nicht mehr zusammen. Es kommt hier der Verdacht auf, dass ein grundsätzlich falsches Verständnis der Dynamik des Universums dafür die Ursache ist. EIN wahrscheinlicher Grund dürfte darin liegen, dass das Universum in unserer näherer Umgebung nicht exakt isotropisch ist und so lokale Messungen für globale Aussagen quantitativ unzulänglich sind. ([182]) (Graphik: Beaton - Freedman 2017-2018)*

hindeutet, dass wir die Dynamik des Universums und seine Struktur insgesamt nur unzureichend verstehen. Wahrscheinlich ist auch dies ein Hinweis auf eine modifizierte Dynamik in der frühen Epoche des Universums.

Die beschleunigte Expansion des Universums kann im Rahmen unserer Prämissen also *ohne* exotische Physik (Quintessenzen), *ohne* Annahme einer exotischen „Dunklen Energie“ erklärlich werden. Auch das sogenannte *Koinzidenz - Problem*, also warum Strukturbildung und beschleunigte Expansion fast gleichzeitig eingesetzt haben, ist durch unser Modell trivial geworden. In Modellen mit „exotischer Physik“ (z.B. *Kosmonfeld*) ist dieses Faktum nur sehr gekünstelt erklärbar (*Occam's raser*).

Die Existenz einer „Kosmologischen Konstante“ ist somit eine unfruchtbare Hypothese und falsch! Für A. Einstein stand Λ immer auf der

Fig. 6.3: *Die Cartwheel - Galaxie (Wagenrad-Galaxie), so wie sie das James Webb Teleskop sieht. Nach der Kollision mit einer kleineren Galaxie bildete sich eine ringförmige Schockwelle in der Größeren, wodurch eine gigantische Geburtenrate junger Sternhaufen und Sterne ausgelöst wurde. (Quelle: James Webb-Teleskop, NASA)*

linken Seite der Tensorgleichung; also nicht auf der rechten Seite, wie es schon der junge E. SCHRÖDINGER im Jahre 1917 vorgeschlagen hatte.

Im Gegensatz zu EINSTEIN hielten A. EDDINGTON als auch G. LEMAÎTRE zeit ihres Lebens an einer kosmologischen Konstanten in der Feldgleichungen fest. S. CHANDRASEKHAR berichtet in seinem Buch „*Truth and Beauty*“ von einem Gespräch mit G. LEMAÎTRE Ende der 1950er Jahre, indem zu Sprache kam, was denn wohl die bedeutendste Umwälzung der *ART* in den Grundprinzipien der Physik gewesen wäre? Die unmittelbare Antwort des Abbé LEMAÎTRE war:

„Die Einführung der kosmologischen Konstante!“

Am Ende hatten wohl sowohl EINSTEIN als auch LEMAÎTRE das richtige

Gefühl: Die Einführung einer kosmologischen Konstanten auf der *linken Seite der Feldgleichung* ist ein hässliches mathematisch - physikalisches *„Gespenst“* - eingeführt aufgrund von Vorurteilen über den Kosmos . Doch irgendwie brauchen wir andererseits auf der rechten Seite der Feldgleichung einen zusätzlichen physikalischen Prozess, welcher die Expansion gegen die Gravitation antreibt. Und die liegt in der Strukturbildung, die LEMAÎTRE erst in Ansätzen verstanden hatte. Die eigentliche Tragik für LEMAÎTRE war aber, dass EINSTEIN die Notwendigkeit einer Modifikation auf der *rechten* Seite seiner Feldgleichungen nie in Betracht gezogen hat - also die modifizierte Form des Energie-Impulstensors bei Anwesenheit von Strukturbildung. Hier herrschte für EINSTEIN ein wildes Gestrüpp von Hypothesen. SCHRÖDINGER hat diesen Perspektivenwechsel - völlig unspektakulär - schon Ende 1917 in einem Gedankenblitz skizziert, aber nicht konsequent durch einen geistigen Modellbau - insbesondere mit Strukturbildung - vollendet.

In den letzten Jahren gab es von Beobachtungsseite immer wieder Stimmen, die an der beschleunigten Expansion zweifeln. Kritik an den „Standardkerzen“ ist sicherlich gerechtfertigt. Aber die Beobachter sollten sich an die Weisheit: „*Theorie ohne Praxis ist leer, Praxis ohne Theorie ist blind*“ erinnern. Wunderschön ist auch ein Aphorismus von EINSTEIN:

> *Erst die Theorie entscheidet darüber , was man beobachten kann.*

Und unsere Theorie in diesem Buch sagt eindeutig: $w = \mathbf{-2/3}$; also die Expansion des Universums beschleunigt sich doch! Schaut man sich aber die wilden inflationären Spekulationen über „Quintessenz - Modelle“ insbesondere an Universitäten in den USA an (finanziert von privaten Stiftungen) , so fällt einem nur noch *Goethes Faust* ein:

> *Grau, treuer Freund, ist alle Theorie und grün des Lebens goldener Baum.*

7 Philosophische Gedanken

Gott ist eine unendliche Sphäre, deren Mittelpunkt überall und deren Umkreis nirgends ist.

Liber XXIV philosophorum (Buch der 24 Philosophen), vor dem 12. Jahrhundert ([56])

Welch Schauspiel! Aber ach! ein Schauspiel nur!
Wo fass ich Dich, unendliche Natur?
Faust I; Verse 453-454 J.W. von Goethe

Die in diesem Buch diskutierten Möglichkeiten eines „*Big Bang*“ oder eines „*Urblitzes*“ führen zwingend zu der philosophischen Frage nach der zeitlich endlichen oder zeitlich unendlichen Existenz des Universums. Welche Rolle spielt dann noch in den monotheistischen Mythologien ein Schöpfergott, wenn das Universum sich in seiner Evolution selbst organisiert und möglicherweise seit ewigen Zeiten existiert und existieren wird?

Vom philosophischen Standpunkt aus - hier ontologisch - ist die Welt ein Nichts. Das äußert sich physikalisch darin, dass wir *hypothetisch* die Gesamtenergie des Universums als „Null“ annehmen. Geometrisch folgt daraus die Flachheit des Raumes. Topologisch kann dieser Raum durch periodische Randbedingungen trotzdem endlich sein. Im Rahmen der Quantentheorie wäre die Existenz der Welt dann eine „Nullpunktschwankung“ der Energie. Anfang und Ende der Welt sind gleich - entweder sie existieren oder es gibt sie gar nicht. Dies äußerst sich durch die Forderung der Selbstähnlichkeit der Anfangs - und Endsingularität. Die Gleichung (4.168) des erweiterten xCDM - Modelles könnte so eine mögliche Lebensdauer des Kosmos, wie wir ihn kennen, bestimmen. Allerdings zeigen heutige Beobachtungen, dass die kritische „Endskala“ wohl nicht bei $\zeta_0 \sim 1.4$, sondern wohl doch viel größer sein muss. Aber wird nicht die

„Eigenzeit“ des Universums in der Nähe des „Urblitzes“ bei den extrem hohen Dichten immer weiter gestreckt, so dass man den Beginn des Universums nach $t \to -\infty$ schieben kann? Und expandiert dann nicht das Universum immer weiter ohne Ende? Mit dem deutschen (?) Sprichwort können wir dann sagen:

> *Wenn wir schon einen Anfang konstatieren, kann daraus nur ein Ende folgen. Wenn da ein Anfang ist, so ist da auch ein Ende. Und gibt es ein Ende, so muss da ein Anfang gewesen sein. Alles andere wäre Ewige Asymmetrie. Gibt es aber keinen Anfang, so gibt es auch kein Ende.*

Daher tat sich Einstein in den 1920er Jahren schwer, ein dynamisch expandierendes Universum zu akzeptieren, welches aus einem „singulären Anfangszustand“ sich entwickelt hat. Für Einstein existierte das Universum aus philosophischen Gründen in der Zeitkoordinate ohne Anfang und ohne Ende. Darum favorisierte er bis 1931 durch Einführung einer künstlichen Λ Konstanten einen „quasi - stationären Kosmos“, in dem das Problem einer „Schöpfung aus dem Nichts“ gar nicht auftritt. Als seinen „Gegenspieler“ kann man hier seit 1928 den Priester G. Lemaître mit seinem im Jahre 1946 erschienen Buch *L'HypothÜse de l'atome primitif* ansehen. Er sah eher mehr die Entwicklung des Universums aus einem „Uratom“ als wissenschaftliche Arbeitshypothese an ([115]). Zustände davor bleiben dem empirisch beobachtenden Menschen verborgen.

Zu diesen letzten naturwissenschaftlichen Fragen, die leicht in *übernatürliche Erklärungen abgleiten könnten*, möchte ich hier einige Gedanken des Philosophen und Humanisten Joachim Kahl mit seinen Arbeitsschwerpunkten Religionskritik, Ethik und Ästhetik zitieren. Er argumentiert mit einer *Metaphysik*, die nicht in eine *"höhere Welt"* entschwindet, sondern denkt, was nicht sinnlich fassbar, aber dennoch denknotwendig ist: *die Welt als Gesamtzusammenhang, als Verschränkung von Teil und Ganzem, von Relativem und Absolutem.* Der in einer monotheistischen Mythologie vorgetragene Glaube, daß ein Gott die Welt in einem singulären Ereignis erschaffen hat, lässt sich durch zwei Überlegungen von innen her entkräften:

- Als erstes ist mit Augustinus[1] zu fragen: Was tat Gott vor der Erschaffung der Raum-Zeit-Welt, wenn die Schöpfertätigkeit zu

[1] Augustinus von Hippo (354-430) war einer der vier lateinischen Kirchenlehrer der

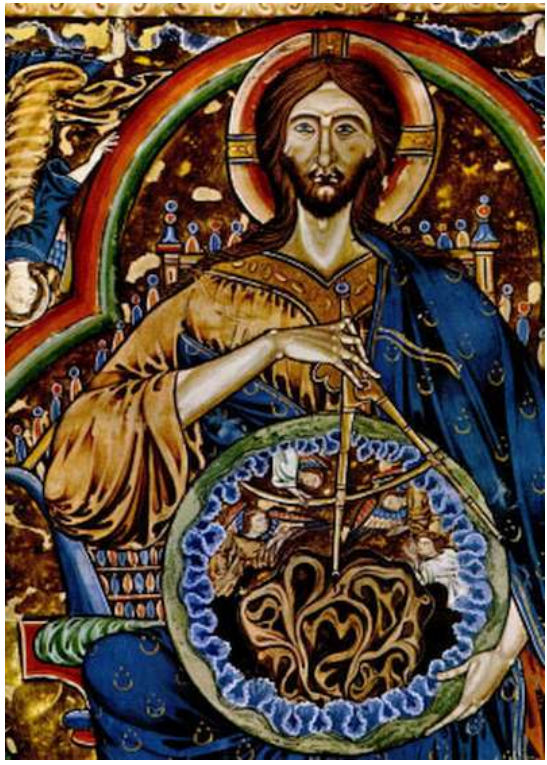


Fig. 7.1: *Gott als Geometer (Mathematiker) und Architekt des Universums. Aus: Bibel Ferdinand III. von Kastilien und LeÜn (1199-1252), geschenkt von Ludwig IX von Frankreich (1214-1270), Ile de France, Mitte 13. Jahrhundert*

seinen ewigen und unveräußerlichen Wesensmerkmalen zählen soll? Lag seine Schöpferkraft vorher brach? Weshalb wurde sie auf einmal tätig? Offenbar hat sich Gott gewandelt, obwohl doch die Unwandelbarkeit zu seinen klassischen Attributen gehört. Wenn er sich aber gewandelt hat, ist er der Zeit unterworfen. Es gab also eine Phase, in der Gott noch nicht der Schöpfer war. Der Gedanke eines ewigen Schöpfers, der irgendwann eine zeitlich begrenzte Welt geschaffen

Spätantike und ein wichtiger Philosoph an der Epochenschwelle zwischen Antike und Mittelalter.

haben soll, ist logisch nicht widerspruchsfrei zu denken. Das hat den Philosophen J. G. Fichte zu der schroffen Bemerkung veranlaßt: „die Annahme einer Schöpfung“ sei „der absolute Grundirrtum aller falschen Metaphysik“. Durch sie werde „das Denken in ein träumendes Phantasieren verwandelt“[2].

- Der zweite Kritikpunkt erwächst aus der Frage: Warum hat Gott überhaupt die Welt geschaffen, obwohl er doch ein in sich selbst vollkommenes Wesen sein soll, das in seiner Majestät keines anderen bedarf? Die biblische Antwort - Gott schuf sich die Welt als sein Gegenüber und den Menschen als sein Ebenbild - provoziert unvermeidlich den Einwand: Da Gott nichts Sinnloses tut, muss ihm vorher etwas gefehlt haben. Wenn er aber ein Gegenüber brauchte, weil er einen Mangel litt, war er nicht in sich vollkommen. Schöpfertum und Vollkommenheit schließen sich aus. Das ergibt sich auch aus dem religiös - liturgischen Dauerappell, die Geschöpfe sollten ihren Schöpfer lobpreisen, verherrlichen, anbeten, ihm danken und vor ihm auf die Knie fallen.

Joachim Kahl formuliert dann die wichtige Aussage:

> *Um sich als Schöpfer zu beweisen, bedarf Gott der Welt; die Welt bedarf Gottes nicht. Sie besteht aus sich selber, ungeworden und unvergänglich, freilich auch völlig gleichgültig gegenüber dem Wohl und Wehe ihrer Geschöpfe, für die das Prinzip der Anpassung und Auslese gilt.*

Der mythologische Schöpfungsglaube will so auch einen „*Sinn*“ hinter dem Geschehen erklären. Denn hinter dem Wort Sinn steht immer ein „*Zweck*“, dahinter eine „*Absicht*“ und dahinter eben ein *Schöpfer*. Das Universum und damit auch die Menschheit existiert für irgendeinen „*Zweck*“, hinter den Strukturen im Kosmos und somit auch hinter dem Dasein von Individuen steckt ein „*Ziel*“ (Teleologie). [3]

In einem naturwissenschaftlichen Weltbild steht eher die Auffassung, dass die Zufälle der kosmischen Evolution und nicht die Absichten eines

[2] J.G. Fichte (1762-1814) *Die Anweisung zum seligen Leben oder auch die Religionslehre (EA Berlin 1806)* , Sechste Vorlesung

[3] Siehe das Buch des Biologen E.O. Wilson: Der Sinn des menschlichen Lebens. C.H. Beck Verlag oHG, München 2015

Schöpfers den eigentlichen *„Sinn“* ausmachen. Es gibt keine Planung, sondern nur sich überlappende Netzwerke von physikalischen Ursachen und Wirkungen. Jedes Ereignis für sich ist zufällig, beeinflusst aber die Wahrscheinlichkeit, mit der spätere Ereignisse auftreten. Die Entwicklung der Geschichte des Kosmos als Ganzes folgt dabei allgemeinen asymptotischen Gesetzen.

Der Kosmos als Ganzes könnte somit auch „*seit Ewigkeiten und in Ewigkeiten*“ existieren; seine Teile aber sind ständigem evolutionären Wandel in Form von Werden und Vergehen, von beschleunigter Expansion und gebremster Kontraktion unterworfen. Möglich wäre insbesondere ein „oszillatorisches Verhalten“, wie es unser erweitertes Modell mit einem finalen Strukturkollaps nahelegt. Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Einheit von *Raum - Zeit - Materie.* Weder „*Materie*“ noch die „*Raum - Zeit*“ können aus dem „*Nichts*“ entstehen - wie dies manchmal im Denkmodell des „Big Bang“ behauptet oder aufgrund quantenmechanischer Interpretation stillschweigend angenommen wird. Materie (Energie) und „Raum - Zeit“ bedingen sich gegenseitig und haben als physikalisch objektive Realität im Prinzip kein Anfang und kein Ende. Im Falle eines „Nullenergie - Universums“ wäre der gesamte Kosmos das „Nichts“, welches einer wie immer gearteten Oszillation unterliegt. Die Aussage: *Entstehung aus dem Nichts* macht dann keinen Sinn. Inwiefern hier Quantentheorie und die geometrische Gravitationstheorie zusammenkommen, bleibt unklar.

Schon in der frühesten abendländischen Philosophie gab es Spekulationen über einen *pulsierenden Kosmos* in Form des damals bekannten Erdkreises. Entworfen hat es der vorsokratische Philosoph Heraklit (?520 - ?460) aus dem ionischen Ephesos. In dem berühmten Fragment B 30 aus der nicht vollständig erhaltenen Schrift „*Über die Natur*“ heißt es:[4]

> *Unsere Welt hier, die für alle gleich ist, schuf weder der Götter einer, noch der Mensch einer. Vielmehr war sie schon immer und ist und wird immer sein, ewiges lebendiges Feuer, nach Maßen aufbrennend, nach Maßen verlöschend.*

Ähnliche Vorstellungen wurden auch etwa 400 Jahre später im berühmten Lehrgedicht *De rerum natura* (*Über die Natur der Dinge* oder *Vom Wesen*

[4] Hans Georg Gadamer: Philosophisches Lesebuch 1, Fischer Taschenbuch 612, 1965, Seite 27

des Weltalls) des römischen Dichters, Philosophen und Epikuräers TITUS LUCRETIUS CARUS, genannt LUKREZ (?99 - ?53), ausgeführt. Im Geiste von EPIKUR handelt es von der Stellung des Menschen in einem von den Göttern nicht beeinflussten Universum.

Man kommt hier zum Abschluss nicht umhin, an eine zentrale Idee der Philosophie von F. NIETZSCHE (1844-1900) zu erinnern, welche die „*ewige Wiederkunft*“ als zentrales Thema hatte. NIETZSCHE selbst war von der Ewigkeit der Welt überzeugt, glaubte aber, dass sich in bestimmten Zyklen alle Ereignisse unendlich oft wiederholen. Im Rahmen der theoretischen Thermodynamik war dies gegen Ende des 19. Jahrhunderts eine aktuelle physikalisch - kosmologische Spekulation (*Poincarescher Wiederkehrsatz*).[5]. Der Mathematiker und Philosoph F. HAUSDORFF (1868-1942) schrieb im Jahre 1898 unter dem Pseudonym PAUL MONGRÉ das Essay *Das Chaos in kosmischer Auslese*([72]). HAUSDORFF ging es in seiner Schrift um eine Kritik an der metaphysischen Vorstellung einer *Ewigen Wiederkunft* und schließlich auch darum, jede Art von Metaphysik endgültig zu destruieren. Sinngemäß schreibt HAUSDORFF 1898: *Von der Welt an sich, vom transzendenten Weltkern wissen wir nichts und können wir nichts wissen. Wir müssen die Welt an sich als unbestimmt und unbestimmbar, als bloßes Chaos voraussetzen. Die Welt unserer Erfahrung, unser Kosmos, ist das Ergebnis der Auslese, der Selektion, die wir nach unseren Möglichkeiten der Erkenntnis unwillkürlich schon immer vorgenommen haben und weiter vornehmen. Von jenem Chaos aus gesehen wären auch beliebige andere Ordnungen, andere Kosmoi, denkbar. Jedenfalls kann man von der Welt unseres Kosmos her keinen Schluss auf eine transzendente Welt ziehen.*

Das unbewusst vorherrschende Weltbild bis Mitte des 19. Jahrhunderts war das eines *Laplaceschen Dämons*, der aus den Anfangsbedingungen aller Teilchen des Universums zu einem bestimmten Zeitpunkt alle Zustände der Vergangenheit und Zukunft überblickt. Dieses *„Auge Gottes“* war somit *„allmächtig“* und *„allwissend“*. Die abstrakte *„Information“* im Universum war somit eine Konstante. LAYZER und seit 1973 auch PENROSE argumentieren jedoch, dass das Universum bei einer sehr niedrigen Entropie (*Information*) seine Expansion begonnen hat. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik garantierte dann die Zunahme der Entro-

[5] Siehe auch JORGE LUIS BORGES: *Geschichte der Ewigkeit*, besonders die Essays: *Die Lehre von den Zyklen* und *Die kreisförmige Zeit*; Niedertracht und Ewigkeit. Fischer Taschenbuch, Frankfurt am Main 2003

pie und die Bildung von komplexen *„dissipativen Strukturen“* wie zum Beispiel hydrodynamische Wirbel und komplexes biologisches Leben (*„negative Entropie“*, siehe ([109])). Nach einer gewissen Zeit erreicht aber das System das thermodynamische Gleichgewicht und alle Strukturen verschwinden - sie sterben den *„Entropietod“*. Dies ist das klassische hydrodynamische Bild des Universums, wie es im 19. Jahrhundert von H. Helmholtz („Hitzetod“) nach einer Arbeit von W. Thomson (Lord Kelvin) ([203]) diskutiert wurde. Doch dieses Bild gilt eben nicht für beliebig lange Zeiten. Geht man von einer maximal erreichbaren Entropie **S** des Universums aus, so wird auf Zeitskalen von ([29])

$$T \sim \exp[\mathbf{S}] \tag{7.1}$$

ein *Poincarescher Wiederkehrzyklus* eintreten. Es können dann auch Phänomene wie die Abnahme der Entropie stattfinden. Das Universum könnte so kollabieren und alles fängt mit leicht unterschiedlichen Anfangsbedingungen wieder von „vorne“ an. Und dieser Vorgang könnte sich dann zeitlich von *Ewigkeit zu Ewigkeit* erstrecken ([29]). Allerdings ist es wenig wahrscheinlich, dass ein *streng zyklisches Universum ohne Anfang* aufgrund des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik wirklich existieren kann. Jeder Zyklus müßte mit einem leicht gestreckten Skalenfaktor beginnen, um die gestiegene Entropie wieder zu senken ([199]). Dies bedeutet letztendlich eine wiederholte exponentielle Expansion des Systems. Die Autoren Mithani, Vilenkin und Susskind kommen im Jahr 2012 zu dem Schluss, dass unser Universum wahrscheinlich einen *„Anfang“* gehabt hat, der aber zeitlich effektiv in der unendlichen Vergangenheit bei $T \to -\infty$ liegen muss ([132],[201]). Neue Einsichten in diese zum Teil zu Paradoxien führenden Fragen der Kosmologie sind in der Zukunft nur durch exakte Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen für extrem heterogene expandierende Weltmodelle zu erwarten, in denen sich unzählige *„Kerrmetriken“* in einer nichtlinearen Wechselbeziehung mit Strahlungsverlusten zueinander entwickeln. Vielleicht strebt das Universum durch seine beschleunigt - beschleunigte Expansion in naher Zukunft einer „Endsingularität“ entgegen, und die kosmische Geschichte beginnt sich im neuen Glanz von neuem zu entwickeln.

Das Schlusswort möchte ich hier C. F. von Weizsäcker überlassen, der in der Festschrift zum 200 jährigen Bestehen der Göttinger Akademie im Jahre 1951([213]) schrieb:

... In den mythischen Kosmologien aller Völker kann man Vorstufen einiger heutiger Auffassungen finden. Aber sie sind von der modernen Kosmologie dadurch getrennt, daß in ihnen, wie überall im Mythos, die Scheidungen von „Außen“ und „Innen“, von „Gegenstand“ und „Bedeutung“, von „Objekt“ und „Subjekt“, nicht oder doch nicht scharf vollzogen sind. Solange die Gestirne göttlich sind und der Kosmos zu uns redet wie ein menschliches Gesicht oder wie eine Schrift in vielleicht unverständlichen Zeichen, fehlt die methodische Geschlossenheit, die der neuzeitlichen Naturwissenschaft die Ausdauer im Stellen einer eingeschränkteren Art von Fragen verleiht. Die naturwissenschaftliche Kosmologie beginnt mit einem Verzicht. Der „Kosmos“ der neuzeitlichen Kosmologie ist eben nicht das Ganze der Wirklichkeit. Er ist nicht Gott und er ist nicht Seele; oder zum mindesten betrachtet die 'Wissenschaft ihn so als wäre er beides nicht. Gerade die räumlichen und zeitlichen Grenzen unserer Kenntnis sind aber die Stellen, an denen diese Scheidung am schwersten vollzogen wird. An ihnen erscheint es am zweifelhaftesten, ob dieser Kosmos aus sich selbst heraus verstanden werden kann, und die Meinungen über sie sind oft inmitten eines naturwissenschaftlichen Denksystems noch bewusst theologisch oder philosophisch oder unbewusst mythisch.

Anhang

A.1 Fragment eines Interviews mit George Lemaitre

Am Sonntag, dem 23. Juni 1963, hielt Georges Lemaître in Namur (Belgien) auf einer Konferenz mit dem Titel: *Leuven bei der Arbeit: wissenschaftliche Forschung der letzten Jahre*, die von einem Verein der Freunde von Leuven organisiert wurde, einen öffentlichen Vortrag mit dem Titel *Universum & Atom* . Die Ergebnisse dieser Konferenz wurden einem der Organisatoren übergeben, der den Inhalt damals aber für zu technisch hielt, um ihn zu veröffentlichen. Im Jahr 2007 übergab die Familie des Veranstalters die Namur-Proceedings an den Wissenschaftsphilosophen Dominique Lambert, der diese dann veröffentlichte[1]. Aufgrund der verfügbaren historischen Aufzeichnungen gilt dies als der letzte öffentliche Vortrag, den Georges Lemaître gehalten hat. Allerdings lässt sich nicht mit letzter Sicherheit sagen, dass es sich dabei um die Konferenz in Namur (Belgien) handelt, auf die sich Georges Lemaître im folgenden VRT-Interview bezieht.

Man ging kürzlich noch davon aus, dass dieses 19 Minuten und 47 Sekunden lange Interview nach seiner Ausstrahlung am Freitag, dem 14. Februar 1964, verloren gegangen war und nur ein etwa dreiminütiger Ausschnitt erhalten geblieben ist. Glücklicherweise wurde es kürzlich vom VRT wiederhergestellt, da das Video tatsächlich falsch beschriftet und daher falsch eingeordnet worden war. Unseres Wissens ist es das einzige existierende Videointerview von Georges Lemaître. Es geschah etwa zwei Jahre vor seinem Tod. Der Journalist Jerome Verhaeghe (hier abgekürzt mit JV) führte das Interview und gab am Tag der Ausstrahlung die Einführung in die Sendung. Der Anfang fehlt...

[1] Lemaître, G.: *Univers & Atome* in Lambert D. L'itineraire spirituel de George Lemaître, Bruxelles, Lessius,2007, pp. 199-216

Beginn des VRT Interviews:

...

GLM: Es ist nicht ganz einfach, Ihre Frage zu beantworten, da es viele Aspekte gibt, welche wir weiterentwickeln können. Vielleicht könnten wir zur Einordnung der Frage damit beginnen, uns an einen Text zu erinnern, den der große französische Mathematiker E. J. CARTAN[2] zu Beginn einer bemerkenswerten Konferenz über die Gruppentheorie und Geometrie im Jahr 1927 verwendete. CARTAN spielte auf die allgemeine Tendenz der modernen Physik an, die, wie er sagte, im Widerspruch zu der Idee stehe, Gesetze in der Physik zu haben , die in jeder Region des Raums den Raum als Ganzes einbeziehen würden. Und genau das ist es, was eine einfache Anwendung der Relativitätstheorie auf die Theorie von FRED HOYLE charakterisiert und in gewisser Weise im Widerspruch hierzu steht. Es ist so, dass FRED HOYLE bei der Darstellung seiner *Steady-State-Theorie* impliziert, dass das gesamte Universum eine Gruppe darstellt, eine ganz bestimmte Gruppe, welche den Raum als Ganzes einnimmt.

Vielleicht könnte es klarer erklärt werden, weil ich sehe, dass es nicht sehr klar ist. Man könnte es besser veranschaulichen, indem man Folgendes sagt: Vor sehr langer Zeit, vor der Idee einer Theorie der Expansion des Universums (vor etwa 40 Jahren), erwarteten wir, dass das Universum statisch sein muss. Wir haben erwartet, dass sich nichts ändern würde. Es war eine apriorische Idee, die auf das gesamte Universum angewendet wurde ...

[unterbrochen von **JV**]...

JV: ...das stimmte mit dem Experiment (empirischer Evidenz) überein...

[unterbrochen von **GLM**]

GLM: Nein, überhaupt nicht. Gar nicht! Es war eine *Apriori-Idee*, wofür es aber keine gesicherte Erfahrung gab. Und die Tatsachen im Zusammenhang mit der Expansion des Universums machten diese Hypo-

[2]Elie Joseph Cartan (1869-1951). Französischer Mathematiker, Beiträge zu Lie-Gruppen, mathematische Physik und Differentialgeometrie. Einstein-Cartan-Theorie (ECT).

these unzulässig. Also wurde uns klar, dass wir Veränderungen zulassen mussten. Aber diejenigen, die wollten, dass es keine Veränderung gibt, wollten diese Veränderung minimieren. In gewisser Weise sagten sie: *Obwohl wir zugeben müssen, dass es sich ändert, sollte es sich so wenig wie möglich sein.*

Lassen Sie das Universum sich nur im Skalenfaktor (Maßstab) ändern, so dass sich alles in einem größerem Maßstab abspielt, aber auf die gleiche Weise. Und das ist es, was zuerst von E. A. MILNE[130][3] unter dem Namen *kosmologisches Prinzip* und später unter dem Namen *perfektes kosmologisches Prinzip* und dann durch die eigentliche Idee der *Steady - State-Theorie* eingeführt wurde . Das ist es, was man in seinen Briefen findet, denn er sagt: *Wenn Sie versuchen würden zu sagen, dass es irgendeinen gleichbleibenden Plan im Universum gibt, so würde ich diesem zustimmen.*

Es ist also die Idee, dass es einen Plan gibt. Es geht nicht um die Idee, dass das Universum Gesetze hat und dass diese Gesetze etwas mehr oder weniger Kohärentes bilden. Aber es ist die Forderung, dass es einen Plan gibt. Offensichtlich ist es eine Art Leibniz- Idee[4] , dass das Universum so gut wie möglich geschaffen ist, wahrscheinlich eine pantheistische Art von Leibniz-Idee.

Wir können das doch an den persönlichen Ideen von MILNE erkennen , nicht wahr? Aus wissenschaftlicher Sicht ist es jedenfalls die Idee, dass es einen Gesamtplan gibt. Während die allgemeine Idee der Physik, wie CARTAN es ausdrückte, darin besteht, dass die Gesetze lokal und differenziell sind und dass die gesamte Mannigfaltigkeit eben nicht sehr regelmäßig sein kann. Zumindest nicht so regelmäßig, wie HOYLE es erwartet hatte ...

JV: ... es muss nicht unbedingt so regelmäßig sein?

GLM: Es muss nicht regelmäßig sein, und das sollte auch nicht erwartet werden. Und das ist es, was HOYLE spürt. Und es fällt ihm schwer, es zuzugeben. Sie erinnern sich, er dachte, als er mit seiner Theorie

[3] EDWARD ARTHUR MILNE (1896-1950). Englischer Mathematiker und Astrophysiker. 1933 formulierte er das kosmologische Prinzip, wobei er nur die spezielle Relativitätstheorie für den Kosmos als Ganzes zuließ.

[4] GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646-1716). Philosoph, Mathematiker, Jurist, Historiker und politischer Berater. Berühmt ist sein Satz der Theodizee: Wir leben in der besten aller möglichen Welten

Fig. A.1: *Fred Hoyle, der Vater der „Steady State“ Theorie und Georges Lemaître, der Vater der „Big Bang“ Theorie, in den späten 1950er Jahren. (Master and Fellow of St. John's College, Cambridge). Bildquelle: ([136])*

begann, dass er sie zurückweisen müsse. Er drückte es so aus: „Nun ja, es passiert nicht viel, es passiert nicht viel [...], weil es, wie er sagte, eine *Schöpfung* geben sollte. Was bedeutet das...Schöpfung? Dieses Wort, Schöpfung, bringt eine ganze philosophische oder religiöse Resonanz mit sich, die nichts mit der Frage an sich zu tun hat. Was steckt hinter diesem Wort Schöpfung? Da ist einfach die Erscheinung von Wasserstoff, wie Hoyle annimmt, etwas ganz Fantastisches und Unerwartetes. Deshalb verwendete er das Wort Schöpfung. Es ist etwas gänzlich Unerwartetes.

Und wenn ich eine andere Bildsprache verwenden müsste, um dasselbe auszudrücken, würde ich sagen, dass dieser Wasserstoff auf völlig unerwartete Weise wie ein Geist erscheinen muss (*dramatische Betonung des Wortes Geist*). Es ist eine Art *Geist*, wie er in Burgen in Schottland auftauchen würde. Die Einführung einer Art geisterhaften Wasserstoffs auf diese Weise würde die Schwierigkeit vermeiden, dass das Prinzip des *Steady State* im Widerspruch zum Prinzip der Energieerhaltung steht. Im Gegensatz zum Grundprinzip der sichersten und solidesten Sache der Physik (dh. dem *Energieerhaltungsprinzip*). Um das alles aufrechtzuerhalten, lässt man eine... geisterhafte Produktion von Wasserstoff zu. Und was können wir davon erwarten, dass Wasserstoff ohne physikalischen

Grund und ohne normale Verbindung auftritt? Man könnte erwarten, dass es auf die gleiche Weise verschwindet, wie es aufgetaucht ist. So stellt sich diese Theorie von HOYLE dar.

Als Theorie, die eine dem *Apriori* analoge Annahme auferlegt, dass man nach einer statischen Lösung suchen sollte ... [unklar] , dass man nach einer Lösung mit einem Minimum an Änderungen sucht. Ich für meinen Teil und auch andere sind gegen (diese statische Lösung) in dem Sinne, dass ich nicht glaube, dass es die Tendenz der modernen Physik ist, dass es globale Gesetze im Universum gibt, absolute Gesetze, Gesetze, die in HOYLE'S Ausdruck einen Entwurf, einen Plan implizieren würden. Ich kann mir nicht vorstellen, dass es so läuft.

JV: Sie sind einer der Schöpfer einer Theorie, die, wenn Sie so wollen, Teil dessen ist, was HOYLE die *„Urknalltheorien“* nennt; die Theorien der großen Explosion. Was ist Ihre Theorie und – wenn überhaupt möglich –, Monsignore, könnten Sie diese in wenigen Worten erklären?

GLM: Hören Sie, das würde ich nicht wollen ... die Frage ist dafür zu weit gefasst. Tatsächlich erkennt HOYLE an, dass es viele Theorien gibt, die er *„Urknalltheorie“* nennt, richtig.

Ich weiß nicht, inwieweit die Pfeile, die er gegen diese Theorien schießt, tatsächlich ins Schwarze treffen. Aber was die älteste dieser Theorien, die ich 1931 unter dem Namen ***atome primitif*** Hypothese aufgestellt habe, betrifft, so habe Ich den Eindruck, dass seine Pfeile mich überhaupt nicht erreichen. Es wundert mich sogar ein wenig, dass ihm das nicht auffällt, denn wir, HOYLE und ich, hatten so oft die Gelegenheit, uns auf die freundschaftlichste Art und Weise zu unterhalten. Wenn Sie so wollen, habe ich den Eindruck, dass es ihm vor allem darum ging, wie er sich die Theorie vorstellte, und nicht darum, was sie ist. Besonders hier der Aspekt, den ich entwickelt habe. Ich denke also, dass meine Theorie seinen Pfeilen entgeht... [unverständlich] ... doch wenn Sie möchten, kann ich es versuchen... [unverständlich] ...

Ich kann nicht die ganze Theorie entwickeln, aber ich werde sagen, wie sie *„Hoyles Pfeilen“* entgeht. Er sagt im Grunde, dass seiner Theorie zufolge ... Ich würde gerne seinen genauen Text finden...

[**GLM** wühlt sich durch seine Blätter]:

Und ziemlich früh im Spiel sollten sich alle Galaxien gebildet haben und sollten dann da sein.. und so weiter...

So habe ich mir die Theorie des *atome primitif* aber überhaupt nicht vorgestellt. Es gibt einen Anfang ... wir können irgendwann auf andere Aspekte eingehen ... es gibt einen Anfang, der sich sehr vom gegenwärtigen Zustand der Welt unterscheidet, einen Anfang in der Vielfalt, der dadurch beschrieben werden kann, dass er in der Form des Zerfalls aller existierenden Materie in ein Atom beschrieben werden kann . Das erste Ergebnis dieses Zerfalls wird, soweit wir der Theorie folgen können, tatsächlich ein Universum sein, ein expandierender Raum, der mit einem Plasma und sehr energiereichen Strahlen gefüllt ist, die in alle Richtungen gehen. Etwas, das überhaupt nicht wie ein homogenes Gas aussieht. Durch einen Prozess, den wir uns nur vage vorstellen können, den man leider nicht in allen Einzelheiten nachvollziehen kann, müssen sich lokale Gase gebildet haben; Gaswolken bewegen sich mit großer Geschwindigkeit...

[unterbrochen durch **JV**]

JV: Kondensationen ?

GLM: Nein, es handelt sich nicht um eine Kondensation. Gas. Nicht gerade Kondensationen, denn das gesamte Universum war... ja, das gesamte *Plasma* war quasi homogen. Es muss Orte gegeben haben, an denen sich Gaswolken bildeten und so die Strahlen stoppten; und bei diesem Prozess der Absorption der Strahlen (was auch immer der Prozess ist, mit dem dies geschieht) ist es offensichtlich, dass die sehr schweren Kerne aufgebrochen sein müssen und so viel Wasserstoff erzeugt haben müssen. Aus der Sicht der astronomischen Entwicklung des gesamten Universums haben wir es also mit ausgeprägten Gaswolken zu tun, die fast ausschließlich aus Wasserstoff bestehen.

Das ist nun genau der Kernpunkt von Hoyle's Theorie: Alles beginnt mit Wasserstoff. Der wesentliche Unterschied besteht darin, ob dieser Wasserstoff auf natürliche Weise durch einen vernünftigen physikalischen Prozess erzeugt wird oder ob es sich im Gegenteil um eine Art *Phantom-Wasserstoff* handelt, der mit genau der richtigen Menge Wasserstoff auftritt, um ein apriorisches Gesetz zu bestätigen. Offensichtlich können wir davon ausgehen, dass ein Teil dieser Strahlen diesem Kondensationsprozess entgangen ist.

Und hier haben wir es mit einem anderen Element zu tun, vielleicht in der Theorie des *atome primitif*: Es ist so, dass ohne Wasserstoff ein Teil der Strahlen fast ohne Verlust entkommen ist und dass diese Strahlen heute noch gefunden werden können ... wir können hoffen, dass sie in den kosmischen Strahlen gefunden werden[5]. Dies ist eine Theorie, die nicht nur von mir, sondern vor langer Zeit von E.R.A. Regener[6] aufgestellt wurde , der die kosmische Strahlung als *fossile Strahlung* bezeichnete, in dem Sinne, dass sie ein Zeugnis der allerersten Zeitalter der Welt ist ([161]).

Und ich für meinen Teil würde sie lieber die Strahlen des urzeitlichen Feuerwerks nennen, die in dem bemerkenswert leeren Raum konserviert sind und uns erreichen... und uns ein Zeugnis der ersten Zeitalter der Welt geben... offensichtlich ist hier ein bisschen mehr Poesie enthalten.

Ohnehin. Der Ausgangspunkt bleibt derselbe, es ist Wasserstoff, unabhängig davon, ob er aus Wasserstoff erzeugt wird oder aus anderen Dingen stammt. Bondi[7] versichert uns, dass seine Arbeit von der Steady-State-Theorie inspiriert wurde und dass diese möglicherweise nicht entstanden wäre, wenn Hoyle nicht die Steady-State-Theorie erfunden hätte. Ich erkenne, dass dies sicherlich eine sehr gute Entschuldigung für diese *Steady-State-Theorie* ist, denn ich habe die größte Bewunderung für Hoyle's Arbeit. Es brachte etwas ganz Erstklassiges, sehr Solides... die Art und Weise, wie er und seine Mitarbeiter zeigen konnten, wie sich aus Wasserstoff in den Sternen verschiedene Körper bilden konnten; Es ist ein erstklassiges Ergebnis. Und ich würde sagen, ein Ergebnis, das fast auf einem viel solideren Niveau ist als alles, was wir als kosmogonische Theorie tun können. Wenn es also wirklich die Idee der *Steady-State-Theorie* ist, die dies möglich gemacht hat, dann würde ich mich darüber freuen. Was ich jedoch sagen muss, ist, dass ich für meinen Teil es genauso einfach finde, dieses großartige Ergebnis im Rahmen einer Theorie zu sehen, in der Wasserstoff natürlicher Wasserstoff ist, als es in einer Theorie zu sehen, in der Wasserstoff *Phantom-Wasserstoff* wäre. Ich sehe keinen

[5] 1965 wurden diese Strahlung als Photonen-Hintergrundstrahlung durch Zufall entdeckt. Die eigentliche kosmische Strahlung (durchdringende Höhenstrahlung) hat dagegen einen anderen Ursprung.

[6] Erich R. A. Regener (1881-1955). Deutscher Physiker und Sonnenforscher. Er berechnete schon 1933 spekulativ eine kosmische Hintergrundstrahlung von 2.8 Kelvin für ein quasistatisches Universum.

[7] Hermann Bondi, (1919-2005). Britischer Mathematiker und Kosmologe österreichischer Herkunft.

Unterschied zwischen den beiden.

JV: Monsignore, hat die Tatsache, dass das Universum Ihrer Theorie zufolge einen Anfang hat (zumindest einen Anfang)... für Sie eine religiöse Bedeutung, eine religiöse Bedeutung?

GLM: Nun, natürlich muss es erklärt werden ... Es ist ganz klar, dass in diesem Interview die Verwendung des Wortes Schöpfung eine ganz besondere Bedeutung hervorgerufen hat. Jeder von den erwähnten Wissenschaftlern brachte seine Ansichten frei und berechtigt zum Ausdruck. Diese Ansichten wurden eher aus agnostischer, materialistischer oder vielmehr pantheistischer Sicht dargelegt. Ich glaube nicht, dass es irgendein Interesse oder einen Vorteil hätte, wenn ich mich diesen allen bekannten Positionen widersetze, um dann ein Bekenntnis zu meinen religiösen Überzeugungen abzulegen. Es würde nicht viel Sinn machen. Der Punkt ist, um Ihre Frage dahingehend zu beantworten, indem ich genau das verwerfe, was viele Leute von mir erwarten: Der entscheidende Punkt ist, dass ich das *Uratom* nicht aus irgendwelchen religiösen Hintergedanken verteidige. Natürlich weiß niemand genau, was die eigene Psychologie wirklich ist. Aber ich habe diese Idee überhaupt nicht bewusst verinnerlicht. Ich denke auch, dass die Auswirkungen dieser Theorie auf das philosophisch-religiöse Problem grundsätzlich anders sind. Es handelt sich offensichtlich hier um einen etwas heiklen Punkt. Ich habe ein bisschen Angst, es jetzt in ein paar Worten näher zu erläutern. Ich habe dies ausführlich auf einer Konferenz dargelegt, die ich vor ein paar Monaten in Namur gehalten habe und die nicht auf Ihrer Funkanstalt, aber auf den französischen Funkanstalten stattfand.

Und es ist genau so, dass wenn meine Theorie richtig ist, sie das philosophische Problem der Schöpfung auf eine gewisse Weise verschwinden lässt. Dies ist übrigens das, was im Vorwort meines kleinen Buches über das *atome primitif* von Professor Gonseth[8] aus Zürich entwickelt wurde, der zeigte, dass es eine gewisse philosophische Resonanz meiner Theorie in dem Sinne gab, dass diese einige aufgestellte Antinomien von Immanuel Kant aufgelöst hat.

[8] Ferdinand Gonseth (1890-1975). Schweizer Mathematiker und Philosoph an der ETH Zürich

JV: Wenn ich mich nicht irre, Monsignore, haben Sie die religiösen Autoritäten nicht sogar davor gewarnt ...

[unterbrochen von **GLM**]

GLM: Sehen Sie, zunächst einmal habe ich viel zu großen Respekt vor den religiösen Autoritäten, die genau wissen, was sie zu tun haben. Aber ich würde auf jeden Fall warnen ... Ich habe immer meine Kollegen gewarnt, wohlmeinende Geister, die gerne darüber diskutieren würden. Aber gehen wir etwas näher auf den Kern der Frage ein. Wenn man das Problem des Beginns der Welt stellt, steht man fast immer vor einer wesentlichen Schwierigkeit: sich zu fragen, warum sie in diesem Moment begann? Warum hat es nicht etwas früher angefangen?

Und in gewisser Weise: Warum hätte es nicht etwas früher beginnen sollen? Es scheint also, dass jede Theorie, die einen Anfang beinhaltet, unnatürlich sein muss. Zu sagen: Wir entscheiden an diesem Punkt, dass es beginnt ... Dies wurde ausgedrückt, indem man sagte: Es besteht aus nichts. Das heißt, wir haben erwartet, dass es von etwas kommt; und wir sagen: Es kommt nicht von diesem Etwas, es besteht aus nichts . Nun... der Standpunkt, den ich vertrete, ist ein ganz anderer. Das heißt, der Anfang ist so unvorstellbar, so anders als der gegenwärtige Zustand der Welt, dass sich eine solche Frage nicht stellt. Und noch mehr als das. Dieser Anfang ist der Anfang der unendlichen Vielfalt.

Die Grundidee ist ... Ich kann sie jetzt nicht näher erläutern ... es ist der Beginn der Vielfalt. Es geht um die Idee, dass das Universum, das in Quanten, in Paketen bestimmter Energie existiert, mit einem einzelnen Quant oder einer sehr kleinen Anzahl von Quanten beginnt, so dass es unmöglich is t, sich zu fragen, woraus es entstehen würde, woraus es entstehen würde wurden abgespalten. Die gesamte Entwicklung der Entropie besteht darin, dass sich Quanten teilen, entwickeln usw. Am Anfang, wenn es nur eines gibt, können wir uns nicht fragen, woher es kommt. Dann stellt sich nicht die Frage, ob es aus dem Nichts kommt. Es handelt sich um einen *Raum-Zeit-Hintergrund*, aus dem kein Problem entsteht.

Oder wenn man so will, wenn man sich selbst für den Spiritualisten hält, mit der Idee, dass es von Gott kommt usw. ... nun, man würde Gott gerne als Standard für diesen ersten *„Anstoß“* wählen, wie Laplace

sagte[9]. Nun ja, das gilt nicht, denn der Anfang... der tiefe Grund der Raumzeit unterscheidet sich so sehr von all unseren Vorstellungen, dass es kein weiteres Problem mehr gibt. Und dann kann für einen Atheisten offensichtlich nicht *alles* oder *irgendetwas* bleiben, ich kann nicht weiter sprechen, wenn Gott mich nicht in meiner Existenz unterstützt, das ist sicher, nicht wahr? Aber das ist nichts, das ist die allgemeine Haltung der christlichen Philosophie.

Aber der Anfang ist nichts Besonderes. Und der Anfang ist kein Ort, an dem man Gott als Hypothese bezeichnen würde, wo ich, wenn Sie möchten, über LAPLACE'S ersten *„Anstoß“* sprechen werde, da wir jetzt in Konferenzen auf Englisch sprechen ... Ich erinnere mich an JEANS[10]: *„Der Finger Gottes bewegt den Äther [dramatische Stimme], das war der Anfang“*. Nun, das ist keine... das ist keine angenehme Idee für einen religiösen Geist. Es ist eine Idee, die Gott in den Bereich der primären Ursachen rückt, und ich denke, einer der Beiträge, die eine Theorie wie meine leisten kann, besteht darin, genau solche Schwierigkeiten zu vermeiden.

JV: Um es klar auszudrücken: Sie lehnen es ab, die Idee zu akzeptieren, dass Gott die Bewegung von Galaxien in Gang gesetzt hat.

GLM: Natürlich, das versteht sich von selbst! Absolut. Das heißt, wenn Gott die Galaxien unterstützt, handelt er als Gott und nicht als eine Kraft, was allem widersprechen würde. Er ist nicht der Uhrmacher von VOLTAIRE, der von Zeit zu Zeit seine Uhr aufziehen muss, nicht wahr ... [lacht]. Dort!

JV: Vielen Dank, Monsignore.

---

[9] Es könnte sein, dass der Begriff „chiquenaude“ , übersetzt „der erste Anstoß“ , von LEMAÎTRE fälschlicherweise P.S. LAPLACE zugeschrieben wurde. Der Begriff wurde sicherlich von BLAISE PASCAL verwendet, um die Form des Theismus von RENÊ DESCARTES zu widerlegen. Das Buch „Pensées“ („Gedanken“, Pascal 1670) ist eines der meist-gelesen philosophischen bzw. theologischen Texte der europäischen Geistesgeschichte. Hier taucht auch die Theorie der „*Wette*“ (*Pascalsche Wette*) auf. Auch sagte in diesem Zusammenhang PASCAL: *„Ich kann Descartes nicht verzeihen: Er hätte in seiner gesamten Philosophie auch ohne Gott auskommen können; aber er konnte nicht anders, als ihn dazu zu benutzen, die Welt in Bewegung zu setzen“.*

[10] JAMES HOPWOOD JEANS (1877-1946). Englischer Physiker, Astronom und Mathematiker

Ende des VRT Interviews.

Die Anspielung auf die Uhrmacher-Analogie zum Schluss des Interviews bezieht sich auf das 2. Kapitel der *Traité de métaphysique* von VOLTAIRE (1694-1778), indem man aus dem Wachsen und Regelungen des menschlichen Körpers, der wie eine Uhr funktioniert, auf ein intelligentes Wesen (Gott) schließen könnte. Doch weitergehende Folgerungen zur Ewigkeit und Unendlichkeit lehnte VOLTAIRE ab. Schon CICERO (106-43) schließt in seinem philosophischen Dialog *de natura deorum* (Vom Wesen der Götter, Buch II, Kapitel 87) aus dem planvollen Funktionieren einer Sonnen - oder Wasseruhr auf die Existenz einer ausgefeilten Technik. Analog müsse dies auch für die Gesetze der Welt gelten. In abgewandelter moderner Form tritt dies heute in Form des *Kreationismus* oder *Intelligent Design* auf.

Seht interessant ist in diesem Interview auch die Erwähnung der Arbeit von E. REGENER aus dem Jahre 1933 über eine heute noch existierende Photonenstrahlung mit der „Planck-Temperatur“ von etwa **2.8** Kelvin. Für eine genauere historische Quelle zu dieser genialen Arbeit, auf die sich LEMAÎTRE bezieht, siehe ([4]). REGENER benutzt das *Stefan-Boltzmann Gesetz* für die Strahlungsleistung eines „Schwarzen Körpers“

$$P = \frac{2\,\pi^5}{15\,h^3\,c^2}\ (k_B\,T)^4\,.$$

Hier bedeutet k_B die Boltzmann-Konstante, h die Planck-Konstante und c die Lichtgeschwindigkeit. Einheit ist hier z.B. $Watt/m^2$, also Leistung pro Fläche. Er nahm nun an, dass die „kosmische Höhenstrahlung“ und die „Photonenstrahlung“ aller Sterne am Firmanent sich in einem thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Durch plausible Annahmen über die Erzeugung von Ionenpaaren in der Hochatmosphäre erhielt er mit seinen Messungen für die kosmische „Hintergrundstrahlung“ die Leistung

$$P \sim \mathbf{3.53}\ \times\ 10^{-3}\ erg\,cm^{-2}\,sec^{-1}$$

Eine vergleichbare Strahlungsleistung ergab sich auch für das zu uns kommende Licht von den hellsten 1500 Sternen. Damit konnte er die Temperatur der „kosmischen Hintergrundstrahlung“ für ein quasi-statisches

Kosmosmodell unerwartet genau abschätzen. GAMOW und seine Schüler haben dies dann etwa 10 Jahre später aus einem expandierenden Kosmos-Modell für den heutigen Zeitpunkt abgeschätzt.

A.2 Summationsformeln

Um die Differenz zwischen einer Summe zu seinem entsprechenden Integral zu berechnen, benutzt man am besten die *Abel - Plana* Formeln gemäß

$$\sum_{n\,=0}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} f(n)\,dn = \frac{1}{2}\,f[0] + \imath \int_0^{\infty} \frac{f(+\imath\,n) - f(-\imath\,n)}{\exp(2\pi n) - 1}\,dn \quad \text{(A.1)}$$

sowie

$$\sum_{n\,=0}^{\infty} f\left(n + \frac{1}{2}\right) - \int_0^{\infty} f(n)\,dn = -\imath \int_0^{\infty} \frac{f(+\imath\,n) - f(-\imath\,n)}{\exp(2\pi n) + 1}\,dn \quad \text{(A.2)}$$

Die mathematische Struktur dieser wichtigen Formeln erinnern an die *Fermi-Dirac* bzw. *Bose-Einstein* Statistik der Quantentheorie. Spezialfall hiervon ist die Euler - Maclaurinsche Summationsformel. Diese lautet allgemein

$$\begin{aligned}\sum_{n\,=a}^{n\,=b} f(n) = &\int_a^b f(x)\,dx + \frac{1}{2}\,\left(f[a] + f(b)\right) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{B}_{2k}}{(2k)!}\,\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}[a]\right)\end{aligned} \quad \text{(A.3)}$$

Dieses Ergebnis wenden wir auf das *Hintergrundpotential* $w[0]$ des Ringkosmos an. Nach (2.13) gilt

$$w[0] = \frac{\pi}{2\,N} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{N}j\right)} \quad \text{(A.4)}$$

Die Durchführung der obigen Rechenvorschrift führt im Grenzprozess auf die asymptotische Formel

$$w[0] = \ln\left(\frac{2}{\pi}\,e^{\gamma}\,N\right) - \frac{\pi^2}{72\,N^2} + \frac{7\,\pi^4}{43200\,N^4} - \ldots \quad \text{(A.5)}$$

Die logarithmische Divergenz des Hintergrundpotentials mit steigender Teilchenzahl ist hier deutlich zu erkennen. Die alternative *halbzahlige* Summe über die reziproken Radien lautet im Teilchenring

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{N}(j-\frac{1}{2})\right)} \tag{A.6}$$

Die asymptotische Darstellung dieser Summe lautet

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln\left(\frac{8}{\pi}\,e^{\gamma}\,N\right) + \frac{\pi^2}{72\,N^2} - \frac{49\,\pi^4}{172800\,N^4} - \ldots \tag{A.7}$$

Diese Darstellung kann man mit Vorteil für das Gravitationspotential eines Testteilchens zwischen den Ringteilchen benutzen.

Eine andere mathematische Struktur besitzt die POISSON'sche Summationsformel. Mit den eindimensionalen oder mehrdimensionalen Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ definieren wir die Integraltransformationen (Fouriertransformationen)

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{y})\,e^{+2\pi\imath\,\mathbf{x}\circ\mathbf{y}}\,d\mathbf{y}, \\ G(\mathbf{y}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{x})\,e^{-2\pi\imath\,\mathbf{x}\circ\mathbf{y}}\,d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{A.8}$$

lautet die Summationsformel

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} F(a\,\mathbf{m}) = \frac{1}{a}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} G\left(\frac{\mathbf{n}}{a}\right), \tag{A.9}$$

wo a eine beliebige reelle „Gitterzahl" sein kann. Eine Summe im Gitterraum wird durch eine Summe im reziproken Gitterraum dargestellt. Die erste JACOBI - Transformation der Thetafunktionen kann mit ihr hergeleitet werden.

A.3 Die Potentialfunktion des Ringes

Bei der Dynamik des expandierenden Ringes mit Paarfusion im Grenzfall einer expandierenden linearen Kette trat bei der Berechnung der

Potentialänderung durch Paarfusion die Ableitung der Funktion $\mathbf{\Phi}[\xi]$ gemäß

$$\mathbf{\Phi}'[\xi] = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2j+1-2\xi)^2} - \frac{1}{(2j+1+2\xi)^2} \right) \tag{A.10}$$

auf. Aus der Funktionentheorie ist bekannt, dass diese Reihe durch eine Polygammafunktion dargestellt werden kann. Formale Integration der Reihe nach ξ und Renormierung liefert

$$\mathbf{\Phi}[\xi] = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2j+1-2\xi} + \frac{1}{2j+1+2\xi} - \frac{2}{2j+1} \right). \tag{A.11}$$

Nach dieser Definition ist die Funktion $\mathbf{\Phi}[\xi] = 1/2 \sum_{ren} 1/r_j$; das heißt die halbe renormierte Summe über die reziproken Abstände aller Nachbarn in der Kette. Die Funktion $\mathbf{\Phi}[\xi] \equiv \mathbf{\Phi}(-\xi)$ des selbstgravitierenden Ringes mit Paartrennung und Paarfusion kann dann mit Hilfe einer Funktionalgleichung der logarithmischen Ableitung der Gammafunktion ($\boldsymbol{\phi}(z) = d \ln \mathbf{\Gamma}(z)/dz$) auch

$$\mathbf{\Phi}[\xi] = \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\boldsymbol{\phi}\left(\frac{1}{2}+\xi\right) - \frac{1}{4}\boldsymbol{\phi}\left(\frac{1}{2}-\xi\right) \tag{A.12}$$

oder

$$\mathbf{\Phi}[\xi] = -\frac{\gamma}{2} - \ln(2) - \frac{1}{4}\boldsymbol{\phi}\left(\frac{1}{2}+\xi\right) - \frac{1}{4}\boldsymbol{\phi}\left(\frac{1}{2}-\xi\right). \tag{A.13}$$

geschrieben werden. Die Darstellung gilt für $-1/2 < \xi < 1/2$. Um den Punkt $\xi = 0$ gilt die Entwicklung

$$\mathbf{\Phi}[\xi] = \frac{7}{2}\,\zeta(3)\,\xi^2 + \frac{31}{2}\,\zeta(5)\,\xi^4 + \frac{127}{2}\,\zeta(7)\,\xi^6 + O|\xi^8|. \tag{A.14}$$

und die speziellen Werte $\mathbf{\Phi}[0] = 0$ und $\mathbf{\Phi}''[0] = 7\zeta(3)$. Um die beiden singulären Punkte $\xi = \pm 1/2$ gilt die Entwicklung

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}\left(\frac{1}{2}-u\right) &\equiv \mathbf{\Phi}\left(-\frac{1}{2}+u\right) \\ &= \frac{1}{4\,u} - \ln(2) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n+1)\,u^{2n}. \end{aligned} \tag{A.15}$$

$\zeta(z)$ bedeutet wieder die Riemannsche Zetafunktion. Wie man sieht, gilt im Nahbereich wieder die Newton'sche Gravitation.

A.4 Adiabatische Zustandsänderungen im Ringkosmos

Bei der Berechnung des $q_2 = -q$ - Parameters im Ring taucht das Problem auf, die Energiedichte bei der Paarfusion genauer abzuschätzen. Wir machten die Abschätzung

$$\frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\xi] - \dot{\varphi}^2 \sim 0. \tag{A.16}$$

Mit dieser Näherung war es möglich, den q - Parameter (2.164) des expandierenden Ringkosmos

$$q = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\dot{\varphi}^2}{\frac{GM_e}{\pi R^3} + \frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\xi] - \dot{\varphi}^2}\right) \tag{A.17}$$

nur als Funktion des Potentialwertes $\mathbf{\Phi}[\xi]$ bis in den nicht-linearen Bereich der Paarkollision darzustellen. Obwohl so das Auftreten einer beschleunigten Expansion beim Skalenfaktor (Ringradius) R im Ringkosmos bewiesen ist, hat dieser Effekt auf die globale Energiebilanz (Hubblefunktion) (2.162)

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{GM_e}{\pi R^3} + \frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\xi] - \dot{\varphi}^2. \tag{A.18}$$

kaum Einfluss. Denn hier kann der Einfluss der Paarfusion aufgrund der Approximation (A.16) vernachlässigt werden. Wir können so feststellen:

> *Im Ringkosmos ist die Dynamik der Paarfusion weitgehend von der Dynamik des Ringradius entkoppelt. Nur die Formel für den q - Parameter zeigt, dass eine Rückkopplung zwischen der Strukturbildung und der globalen Expansion im Ringkosmos existiert.*

Die Ringdynamik erfüllt so die sogenannte *adiabatische Näherung*, bei der die innere Dynamik *weitgehend* von der globalen Ringdynamik entkoppelt ist. Darum ist der w - Parameter des Ringkosmos auch proportional der negativen Besetzungszahl N des Ringes. Um alternativ die Genauigkeit der Approximation (A.16) zu testen, setzen wir die Ansätze

$$R = \left(\frac{9\,GM_e\,t^2}{4\pi}\right)^{1/3} + \ldots,$$

$$\varphi = \epsilon\, t^{\alpha} + \ldots$$

in die quadratische Näherung von (A.16)

$$\frac{GM}{2\pi R^3}\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \mathbf{\Phi}''[0]\,\varphi^2 - \dot{\varphi}^2 \tag{A.19}$$

ein. Durch Berücksichtigung der charakteristischen Gleichung für α erhält man so

$$\frac{GM}{2\pi R^3}\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \mathbf{\Phi}''[0]\,\varphi^2 - \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{3}\, t^{2\alpha-2}\,\alpha\,\epsilon^2. \tag{A.20}$$

oder

$$\frac{GM}{2\pi R^3}\left(\frac{N}{2\pi}\right)^2 \mathbf{\Phi}''[0]\,\varphi^2 - \dot{\varphi}^2 \simeq -\frac{1}{3\,w}\,\dot{\varphi}^2 \tag{A.21}$$

Für sehr große Besetzungszahlen N im Ring gilt also genügend genau die einfache, aber wichtige *adiabatische Näherung*

$$\boxed{\dot{\varphi}^2 \simeq \frac{GM}{\pi R^3}\,\mathbf{\Phi}\,[\xi]\,.} \tag{A.22}$$

Genau diese Relation benötigt man im Ring zur Berechnung des Schwellenwertes der beschleunigten Expansion. Allerdings ist im so definierten Ringkosmos die Zeitskala der Paarfusion so extrem kurz, dass vielleicht immer noch Zweifel bezüglich der *adiabatischen Näherung* bestehen. Es ist aber möglich, durch eine Regularisierung der Zeitskala t eine numerische Integration der gekoppelten Differentialgleichungen bis kurz vor die Paarkollision durchzuführen und dann die numerischen Werte der Parameter w und q mit den adiabatischen Näherungen zu vergleichen .

Wir gehen von der exakten strukturlosen Expansionslösung (2.131) aus und variieren sie mit der sehr kleinen dimensionslosen Funktion η in der ganz speziellen Form

$$R = \left(\frac{9\,G\,M_e\,t^2}{4\,\pi}\right)^{1/3} \exp\left(\frac{4\,\pi\,\eta}{3\,N}\right). \tag{A.23}$$

Die Zahlenfaktoren in der e-Funktion wurden so gewählt, dass später die einfachsten regularisierten Differentialgleichungen herauskommen. Für die Lagrangesche Verschiebung ξ gilt wie früher

$$\varphi = \frac{2\,\pi}{N}\,\xi. \tag{A.24}$$

Der entscheidende Schritt ist jetzt aber die Einführung einer Pseudozeit τ gemäß

$$t = T \, \exp\left(\frac{2\,\pi\,\tau}{N}\right) \tag{A.25}$$

Mit dieser Transformation wird erreicht, dass die Zeitentwicklung

$$\left(\frac{t}{T}\right)^N = \exp\left(2\,\pi\,\tau\right) \tag{A.26}$$

der Lagrangeschen Verschiebung ξ auf der neuen Zeitskala τ regularisiert wird. Setzen wir zur Abkürzung noch

$$\mu(N) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\, e^{\gamma}\, N\right), \tag{A.27}$$

so lautet in den neuen Koordinaten und Zeitskala die Bewegungsgleichung (2.116) für $\xi(\tau)$

$$\xi''(\tau) + \frac{2\pi}{3\,N}\,(1 + 4\,\eta'(\tau))\,\xi'(\tau) = \frac{2}{9}\,\frac{e^{-4\pi\eta(\tau)/N}}{\mu(N)}\,\Phi'[\xi]$$

Die Energiegleichung (*Hubblefunktion*) (2.30) lautet für den Fall (K =0) entsprechend

$$\xi'(\tau)^2 + \frac{4}{9}(1 + \eta'(\tau)^2) = \frac{4}{9}\exp\left(-\frac{4\pi\eta(\tau)}{N}\right)\,\left(1 + \frac{\Phi(\xi(\tau))}{\mu(N)}\right).$$

Um Startwerte für die numerische Integration zu erhalten, entwickeln wir die Lösungen dieser gekoppelten Gleichungen in die Funktionalreihen

$$\xi(\tau) = \epsilon\ \ \xi_1\, e^{s\,\tau} + \epsilon^3\,\xi_3\, e^{3\,s\,\tau} + \ldots$$
$$\eta(\tau) = \epsilon^2\,\eta_2\, e^{2\,s\,\tau} + \epsilon^4\,\eta_4\, e^{4\,s\,\tau} + \ldots$$

Die Größe s ergibt sich durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung in $\xi(\tau)$. Wir wählen die Mode mit der positiven Anwachsrate

$$s(N) = \frac{-\pi\,\mu(N) + \sqrt{\mu(N)\,(14\,N^2\,\zeta(3) + \pi^2\,\mu(N))}}{3\,N\,\mu(N)}.$$

Damit lassen sich im Prinzip alle Größen ξ_n und η_n rekursiv berechnen. ξ_1 kann willkürlich gleich eins gesetzt werden. Für η_2 ergibt sich so zum Beispiel

$$\eta_2 = \frac{3\,\pi\,s(N)}{8(\pi + N\,s(N))}.$$

Hier zeigt sich, wie klein die Rückwirkung der Paarfusion auf die beschleunigte Expansion im Ringkosmos ist. Mit den Startwerten und einem sehr klein gewähltem ϵ kann jetzt die numerische Integration durchgeführt werden. Die wichtigsten physikalischen Kontrollgrößen sind

$$w(\tau) = \frac{3\,\mu(N)\,\exp\left(-\frac{4\pi\eta(\tau)}{N}\right)\,\xi'(\tau)^2}{9\,\mu(N)\,\exp\left(-\frac{4\pi\eta(\tau)}{N}\right)\,\xi'(\tau)^2 - 4\,\mathbf{\Phi}(\xi(\tau))}$$

und

$$q(\tau) = \frac{1}{2}\,\frac{4\,\mathbf{\Phi}(\xi(\tau)) + \mu(N)\,(4 - 18\,\exp\left(-\frac{4\pi\eta(\tau)}{N}\right)\,\xi'(\tau)^2)}{4\,\mathbf{\Phi}(\xi(\tau)) + \mu(N)\,(4 - 9\,\exp\left(-\frac{4\pi\eta(\tau)}{N}\right)\,\xi'(\tau)^2)}.$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke kann man numerisch sehr schön zeigen, dass die *adiabatische Näherung* in den Formeln (2.155) und (2.167) hervorragend erfüllt ist. Die daraus gezogenen Schlussfolgerungen bezüglich einer kurzzeitigen beschleunigten Phase des Ringkosmos sind also gesichert.

A.5 Ein Punktmassengitter

Um eine ersten Eindruck von der Theorie *gravo - akustischer Schwingungen* in einem expandierenden Medium zu bekommen, soll hier das Modenwachstum in einer unendlich ausgedehnten geradlinigen Punktmassengitter mit identischen Massen m, die zu Beginn äquidistant im primitiv kubischen Gitter aufgereiht sind, skizziert werden. Die „Gitterkonstante“ a wollen wir hier zunächst konstant ansetzten. Die kleinen *absoluten* Auslenkungen in den drei Koordinatenrichtungen bezeichnen wir mit $x_{n1,n2,n3}$, $y_{n1,n2,n3}$ und $z_{n1,n2,n3}$. In Erweiterung der Gleichung (2.118) gilt dann für die *linearisierte* Bewegungsgleichung der relativen Koordinatenverschiebung ξ_j des Teilchens mit der Marke j im mitbewegten System

$$\ddot{x} = \frac{Gm}{a^3}\,{\sum_{\mathbf{n}\neq 0}}'\,\frac{(-2\,n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)(x_{n1,n2,n3} - x)}{|\mathbf{n}|^5}$$

$$-\,3\frac{Gm}{a^3}\,{\sum_{\mathbf{n}\neq 0}}'\,\frac{n_1\,n_2\,(y_{n1,n2,n3} - y)}{|\mathbf{n}|^5}$$

$$-3\frac{Gm}{a^3}\sum_{\mathbf{n}\neq 0}{}'\frac{n_1\,n_3\,(z_{n1,n2,n3}-z)}{|\mathbf{n}|^5}.$$

Der Strich bedeutet das Auslassen des Summanden $\mathbf{n}=(0,0,0)$. Die entsprechenden Gleichungen für y und z ergeben sich durch zyklische Permutation der Koordinaten und der Indices. Diese Gleichungen können als Grundlage einer linearisierten Strukturbildungstheorie mit ihren *skalaren* und *vektoriellen* Wellenmoden (Wirbelbildung) dienen. Doch wir interessieren uns hier nur für die Dispersionsrelation ebener Dichtewellen und die Frage, welche Divergenzen in dem Gitter auftreten. Alternativ können wir die obige Gleichung nämlich auch

$$\begin{aligned}\ddot{x} = &-\frac{Gm}{a^3}\sum_{\mathbf{n}\neq 0}{}'\frac{3\,n_1^2}{|\mathbf{n}|^5}\,(x_{n1,n2,n3}-x)\\ &+\frac{Gm}{a^3}\sum_{\mathbf{n}\neq 0}{}'\frac{1}{|\mathbf{n}|^3}\,(x_{n1,n2,n3}-x)\\ &-\frac{Gm}{a^3}\sum_{\mathbf{n}\neq 0}{}'\frac{3\,n_1\,n_2}{|\mathbf{n}|^5}\,(y_{n1,n2,n3}-y)\\ &-\frac{Gm}{a^3}\sum_{\mathbf{n}\neq 0}{}'\frac{3\,n_1\,n_3}{|\mathbf{n}|^5}\,(z_{n1,n2,n3}-z).\end{aligned}$$

schreiben. In einem unendlich ausgedehnten kubischen Gitter sind bestimmte Summen hier divergent, was zu einer geeigneten *Renormierung* zwingt. Zunächst setzen wir hier mit $\mathbf{n}=\{n1,n2,n3\}$ und $\mathbf{k}=\{k1,k2,k3\}$ ebene Wellen der Form

$$\begin{aligned}x_{n1,n2,n3} &= C_1 * e^{\imath\,(\mathbf{k}\circ\mathbf{n}\,a-\omega\,t)},\\ y_{n1,n2,n3} &= C_2 * e^{\imath\,(\mathbf{k}\circ\mathbf{n}\,a-\omega\,t)},\\ z_{n1,n2,n3} &= C_3 * e^{\imath\,(\mathbf{k}\circ\mathbf{n}\,a-\omega\,t)}.\end{aligned}$$

an. Einsetzen führt auf die Bestimmungsgleichung

$$-\omega^2\,C_1 = -C_1\,\frac{Gm}{a^3}\sum_{\mathbf{n}\neq 0}{}'\frac{3\,n_1^2}{|\mathbf{n}|^5}\,(e^{\imath\,\mathbf{k}\circ\mathbf{n}\,a}-1)$$

$$+ C_1 \frac{Gm}{a^3} \sum_{\mathbf{n}\neq 0}{}' \frac{1}{|\mathbf{n}|^3} (e^{\imath\, \mathbf{k}\circ\mathbf{n}\, a} - 1)$$

$$- C_2 \frac{Gm}{a^3} \sum_{\mathbf{n}\neq 0}{}' \frac{3\, n_1\, n_2}{|\mathbf{n}|^5} (e^{\imath\, \mathbf{k}\circ\mathbf{n}\, a} - 1)$$

$$- C_3 \frac{Gm}{a^3} \sum_{\mathbf{n}\neq 0}{}' \frac{3\, n_1\, n_3}{|\mathbf{n}|^5} (e^{\imath\, \mathbf{k}\circ\mathbf{n}\, a} - 1).$$

Bei den Termen proportional C_2, C_3 kann die -1 weggelassen werden, da sich hier nach Aufsummierung Null ergibt. Übrig bleiben die Terme

$$\sum_{\mathbf{n}\neq 0} \frac{3\, n_1\, n_2}{|\mathbf{n}|^5}\, e^{\imath\, \mathbf{k}\circ\mathbf{n}\, a}, \qquad \sum_{\mathbf{n}\neq 0} \frac{3\, n_1\, n_3}{|\mathbf{n}|^5}\, e^{\imath\, \mathbf{k}\circ\mathbf{n}\, a}.$$

Mit der Integraltransformation

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|^5} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^4\, e^{-|\mathbf{n}|^2\, u^2}\, du; \quad |\mathbf{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \quad \text{(A.28)}$$

und Vertauschung der Integrationsreihenfolge und anschließemder Integration über ein Kontinuum der n_1, n_2, n_3 Werte ergibt sich das Resultat in der Langwellengrenze $\mathbf{k} \to 0$ zu

$$- \sum_{\mathbf{n}\neq 0} \frac{3\, n_1\, n_2}{|\mathbf{n}|^5}\, e^{\imath\, \mathbf{k}\circ\mathbf{n}\, a} = 4\,\pi\, \frac{k_1\, k_2}{|\mathbf{k}|^2}, \quad - \sum_{\mathbf{n}\neq 0} \frac{3\, n_1\, n_3}{|\mathbf{n}|^5}\, e^{\imath\, \mathbf{k}\circ\mathbf{n}\, a} = 4\,\pi\, \frac{k_1\, k_3}{|\mathbf{k}|^2}.$$

Bei den obigen Summen traten also keine Divergenzen auf. Doch das ist beim Term proportional C_1 anders. Betrachten wir die unendliche Summe

$$\sum_{\mathbf{n}\neq 0} \left(-\frac{3\, n_1^2}{|\mathbf{n}|^5} + \frac{1}{|\mathbf{n}|^3} \right) e^{\imath\, \mathbf{k}\circ\mathbf{n}\, a},$$

so divergiert jeder der beiden Summandenterme. Erst aus der Kombination beider positiver und negativer Beiträge (Gezeitenterme) wird eine Art *Renormierung* vorgenommen und man erhält einen definitven Wert. Man wird hier an die Arbeit von H. Seeliger aus dem Jahre 1895 erinnert, welche eine Singularität des Newtonschen Gravitationsgesetzt in einen unendlichen Raum konstatierte ([183]). In ähnlicher Weise trittt

das Problem nun auch hier auf. In der Literatur erscheint ein ähnliches Probelm beim sogenannten *Jeans's swindle*, bei der Dichtestörungen in einem unendlich ausgedehnten Kontinuum untersucht werden und das Gravitationsfeld des ungestörten Zustandes als *Null* angenommen wird.

Mit der modifizierten Integraltransformation

$$\frac{1}{|\mathbf{n}|^3} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^2 \, e^{-|\mathbf{n}|^2 \, u^2} \, du \tag{A.29}$$

erhalten wir durch einen Grenzübergang

$$\sum_{\mathbf{n} \neq 0} \left(-\frac{3\,n_1^2}{|\mathbf{n}|^5} + \frac{1}{|\mathbf{n}|^3} \right) e^{\imath\, \mathbf{k} \circ \mathbf{n}\, a} = 4\,\pi\, \frac{k_1^2}{|\mathbf{k}|^2}.$$

Durch zyklische Permutation erhalten wir auch die Normalgleichungen für die anderen beiden Richtungen. Mit alledem ergibt sich die Eigenwertmatrix

$$\begin{pmatrix} 4\pi G\varrho\, \frac{k_1^2}{|\mathbf{k}|^2} + \omega^2 & 4\pi G\varrho\, \frac{k_1\, k_2}{|\mathbf{k}|^2} & 4\pi G\varrho\, \frac{k_1\, k_3}{|\mathbf{k}|^2} \\ 4\pi G\varrho\, \frac{k_2\, k_1}{|\mathbf{k}|^2} & 4\pi G\varrho\, \frac{k_2^2}{|\mathbf{k}|^2} + \omega^2 & 4\pi G\varrho\, \frac{k_2\, k_3}{|\mathbf{k}|^2} \\ 4\pi G\varrho\, \frac{k_3\, k_1}{|\mathbf{k}|^2} & 4\pi G\varrho\, \frac{k_3\, k_2}{|\mathbf{k}|^2} & 4\pi G\varrho\, \frac{k_3^2}{|\mathbf{k}|^2} + \omega^2 \end{pmatrix} \tag{A.30}$$

Zur Abbkürzung haben wir

$$\varrho = \frac{m}{a^3} \tag{A.31}$$

gesetzt. Durch Nullsetzen der Determinante der Eigenwertmatrix ergibt sich die Dispersionsrelation

$$\boxed{\omega^4 \, \left(\omega^2 + 4\pi G\varrho \right) = 0} \tag{A.32}$$

Wir erhalten so das klassische *Jeans-Kriterium*, dass im Falle eines druckfreien Mediums alle Dichtestörungen unabhängig von der Wellenzahl mit dem gleichen Wachstumsfaktor ansteigen.

A.6 Die Appellschen und Hornschen Funktionen

Der französische Mathematiker P.E. Appell (1855-1930) führte 1880 eine Verallgemeinerung der Gausschen hypergeometrischen Funktionen

auf zwei unabhängige Variablen ein, die gewissen partiellen Differentialgleichungen gehorchen. Die erste dieser Funktionen ist durch die Reihe

$$\mathbf{F_1}[a_1, b_1, b_2; c_1; x, y] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m+n}\,(b_1)_m\,(b_2)_n}{(c_1)_{m+n}\,m!\;n!}\, x^m\, y^n \qquad (A.33)$$

definiert, in welcher das Pochhammer Symbol durch

$$(a)_n = a\,(a+1)\,(a+2)\ldots(a+n-1) \equiv \frac{\mathbf{\Gamma}[a+n]}{\mathbf{\Gamma}[a]}$$

gegeben ist. Die Funktion ist ein Spezialfall von insgesamt 34 verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen der Ordnung zwei (zwei unabhängigen Variablen), die der deutsche Mathematiker J. Horn (1867-1946) im Jahre 1931 aufgelistet hat.

In unserem Kosmosmodell wird durch die Formel (4.155) der zeitliche Verlauf des Skalenfaktors von einer Anfangssingularität bis zur Endsingularität durch eine solche spezielle $\mathbf{F_1}$ Funktion beschrieben.

A.7 Die Ameise auf dem Gummiband

Als eine Metapher über die Ausbreitung von Licht-Photonen in einem expandierenden Raum steht das mathematische Puzzle von der *Ameise auf dem expandierenden Gummiband* und der Frage, unter welchen Bedingungen diese das Ende des Bandes erreichen kann. Zum erstenmal aufgeschrieben wurde dieses Rätsel wohl 1972 von *Denys Wilquin* aus Neu Kaledonien. Martin Gardner (1914-2010) hat es dann 1982 mit Zitat übernommen[11] Ein beliebig dehnbares Gummiband ist an einem Ende befestigt und dehnt sich in seiner Länge L mit einer bestimmten Zeitfunktion immer weiter aus. Eine *Ameise* bewegt sich auf diesem sich dehnenden Gummiband mit einer konstanten Geschwindigkeit c. Kann die Ameise das Ende des expandierenden Gummibandes erreichen, wenn sie zu Beginn am festen Ende beginnt?

Wir beschreiben die absolute Position x der „punktförmigen“ Ameise mit der Funktion

$$x = L\,\xi, \qquad (A.34)$$

[11] Diesen Hinweis verdanke ich Herrn Ingmar Rubin aus Berlin; Martin Gardner : Ant on a rubber rope; Gardner, Martin (1982). aha! Gotcha: paradoxes to puzzle and delight. W. H. Freeman and Company. pp. 145-146

wo L die Länge des Gummibandes und ξ die dimensionslose Relativkoordinate auf dem Gummiband bedeuten. Bei $\xi = 0$ startet die Ameise, bei $\xi = 1$ wäre sie am anderen Ende des Bandes angelangt. Die differentielle Änderung der absoluten Position ist gegeben durch

$$dx = dL\,\xi + L\,d\xi. \tag{A.35}$$

Bleibt die Ameise an irgendeiner Position $\xi[t_0]$ stehen, so hält sie diese Marke bei - egal wie das Band expandiert wird. Der erste Teil von (A.35) stellt so den reinen Transport des Bandes ohne Eigenbewegung der Ameise dar, während der zweite Teil die wirkliche Bewegung der Ameise zum Ziel repräsentiert. Die wirkliche Eigenbewegung der Ameise auf dem Gummiband ist also

$$L\,\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dL}{dt}\,\xi \tag{A.36}$$

Bewegt sich also die Ameise (*„Photonen“*) immer mit der gleichen Geschwindigkeit „c“ entlang des Gummibandes, so gilt die Gleichung

$$L\,\frac{d\xi}{dt} = c. \tag{A.37}$$

Die Position der Ameise zum Zeitpunkt t nach dem Start bei $\xi[0] = 0$ ergibt sich so zu

$$\xi = \int_0^t \frac{c\,dt'}{L[t']}. \tag{A.38}$$

Sie kann das Ende nur dann erreichen, wenn für einen fernen Zeitpunkt T

$$\xi = 1 \tag{A.39}$$

erfüllbar ist. Dehnt sich das Gummiband zum Beispiel mit konstanter Geschwindigkeit aus, so kann die Ameise das andere Ende des Bandes *immer erreichen* - wenn auch erst in einem sehr langen Zeitraum.

A.8 Eine Diskrepanz um den Faktor 2

Beim Studium der gekoppelten Dynamik von Expansion und Strukturbildung in einem 3D-Modell wurde gezeigt, daß wir in der klassischen

Jeansgleichung, welche das Anwachsen der Dichtefluktuationen im Universum beschreibt (dort das Pseudoskalar ϕ), einen **Faktor 2** vor den Newton'schen Wert von $\mathbf{V}''[0] = 3$ setzen müssen, um den aus der heutigen Beobachtung deduzierten Wert $w \approx -1$ zu reproduzieren. Bis jetzt ist unklar, ob der w – Parameter schon immer diesen Wert hatte oder ob zu Beginn der Expansion $w = -2/3$ galt und dann durch Strukturbildung abnahm und durch Zufall heutzutage gerade bei $w \approx -1$ liegt. Die Gleichung (4.20) von WEINBERG spricht eigentlich stark dafür, dass im frühen Universum $w = -2/3$ war.

Es gibt aber in der Geschichte der Astronomie eine schöne Analogie zu diesem **Faktor 2** - Problem und seiner Diskrepanz zwischen Beobachtung und Newton'scher Theorie: Die Ablenkung von Lichtstrahlen am Sonnenrand! Gegen Ende des 18. Jahrhunderts hatte die Himmelsmechanik einen vorläufigen Abschluss in den Arbeiten von J. LAGRANGE und P.S. LAPLACE (1749 - 1827) gefunden. Besonders der Letztere spekulierte 1796 in seiner populären *Exposition du systeme du monde* über Sterne, die für uns nicht sichtbar sind, weil ihre Entweichgeschwindigkeit an der Oberfläche identisch mit der Lichtgeschwindigkeit c ist. „Lichtteilchen" (Photonen) könnten dann nicht mehr zu anderen weit entfernten Sternen gelangen. Diese Körper wären unsichtbar („black holes"). Aus heutiger Sicht ideale Kandidaten für die sogenannte überhäufig vorkommende *Dunkelmaterie* im Universum[12]. LAPLACE benutzt die für Keplerbahnen bekannte Newton'sche Geschwindigkeitsrelation

$$v^2 = G\,M\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right), \tag{A.40}$$

in der er die große Halbachse a der Ellipse Unendlich setzte und so für die Entweichgeschwindigkeit beim Radius r die Formel $v_e^2 = 2\,G\,M/r$ erhielt. Mit der Lichtgeschwindigkeit c als Entweichgeschwindigkeit folgt so für den kritischen Radius r_S

$$r_S = \frac{2\,G\,M}{c^2}. \tag{A.41}$$

Erst 1916 wird K. SCHWARZSCHILD diesen kritischen Radius auf der Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie von A. EINSTEIN mit

[12] Die eigentliche ins Deutsche übersetzte Rechnung steht aber erst in der von Xaver von ZACH herausgegebenen Zeitschrift *Allgemeine Geographische Ephemeriden*, Band **4**, von 1799 ([102])

exakt dem gleichen Formelausdruck neu ableiten. Ein solche seltsame Koinzidenz zwischen einer alten und einer neuen Theorie kann eigentlich nur dann passieren, wenn man im Lichte der neuen Modellvorstellung im alten Modell eine *gerade Anzahl* von „Fehlern“ gemacht hat, die sich aber gegenseitig aufheben.

Kurze Zeit später hat J.G. Soldner (1776-1833) eine noch gewagtere Rechnung durchgeführt– wahrscheinlich angeregt durch die Spekulationen von Laplace : Die Krümmung von Lichtstrahlen an einem gravitativen Massenzentrum ([193]). Man kann seine Rechnung im Rahmen der Newton'schen Mechanik relativ leicht nachvollziehen. Soldner selbst bezieht sich bei der Herleitung auf den ersten Band der *TraitÜ de mÜcanique cÜleste, Tome I. pag. 21* von Laplace. Zunächst können wir annehmen, daß die „Lichtteilchen“ aufgrund ihrer hohen Geschwindigkeit sicherlich in eine *Hyperbelbahn* um die Sonne gezwungen werden. Mathematisch gilt also in Polarkoordinaten (r, φ)

$$\frac{r_0}{r} = \frac{1 + \epsilon \cos(\varphi)}{1 + \epsilon}, \tag{A.42}$$

wo r_0 die Periheldistanz des „Photons“ zur Sonne und ϵ die Exzentrizität des Kegelschnittes bezeichnet. Da ϵ bei Hyperbeln größer 1 ist, gibt es bezüglich des Perihels $\varphi = 0$ zwei Asymptoten, die mit dieser Apsidenlinie einen Winkel von

$$\cos[\varphi_A] = -\frac{1}{\epsilon} \tag{A.43}$$

bilden. Aufgrund der geometrischen Situation ist dann die eigentliche Ablenkung eines Lichtteilchens, welches sich in einer Asymptote der Sonne nähert und sich in der anderen wieder entfernt, durch den Streuwinkel

$$\Theta = 2\,\varphi_A - \pi; \qquad \sin\left[\frac{\Theta}{2}\right] = \frac{1}{\epsilon}.$$

gegeben. Dieses Ergebnis lässt sich auch als Integral darstellen. Wir erhalten mit der Substitution $u = r_0/r$ aus der Bahngleichung für den Streuwinkel

$$\Theta = 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2 - \frac{2}{1+\epsilon}\,(1-u)}} - \pi \tag{A.44}$$

Diese Darstellung gilt nur für $\epsilon \geq 1$, also Parabel - und Hyperbelbahnen.

Mit den Beziehungen (A.42) und (A.40) gelingt es, einen Ausdruck für die Exzentrizität der Hyperbelbahn der „Photonen“ als Funktion ihrer Geschwindigkeit c und der minimalen Distanz r_1 zum Sonnenmittelpunkt abzuleiten. Man erhält

$$\epsilon_{\pm} = \frac{c^2\, r_0}{G\, M} \pm 1 \equiv 2\, \frac{r_0}{r_S} \pm 1 \tag{A.45}$$

Man erhält zwei praktisch identische Werte: Das Pluszeichen in der obigen Formel gilt, wenn man für die Photonen *Lichtgeschwindigkeit im Unendlichen* annimmt, das Minuszeichen, wenn die Photonen *Lichtgeschwindigkeit* bei der minimalen Distanz r_0 haben sollen. *In beiden Fällen wäre aber die Geschwindigkeit der Photonen in Sonnennähe maximal.* Das Letztere hat Soldner angenommen[13]. Mit (A.44) ergibt sich so für den Streuwinkel in erster Ordnung

$$\Theta = 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2 - \dfrac{r_S}{r_0}\,(1-u)}} - \pi \tag{A.46}$$

Da aber r_0 bei der Sonne wesentlich größer als r_S ist, gilt genügend genau in erster Ordnung r_S/r_0

$$\Theta = \frac{r_S}{r_0} \int_0^1 \frac{du}{(1+u)\,\sqrt{1-u^2}} \tag{A.47}$$

Auswertung des Integrals liefert für den Streuwinkel in Bogenmaß

$$\boxed{\Theta = \frac{r_S}{r_0}.\ \ (\textit{Soldner}\ 1804;\ \textit{Einstein}\ 1911)} \tag{A.48}$$

Dies ist die berühmte Streuwinkelformel, in Übereinstimmung mit der Newton'schen Gravitationstheorie. Mit Soldner erhalten wir mit $r_S = \mathbf{2.953}$ km und $r_m = 696342$ km die Ablenkung $\Theta = \mathbf{0.875}$ Bogensekunden. J.G. von Soldner schrieb zu seiner Berechnung 1804

[13] Soldner (1776 - 1833) gibt eine Formel für $\tan(\Theta/2)$ an. Zu historischen Missdeutungen führten allerdings zwei Druckfehler im Abdruck von 1804, die auch mit einem Faktor 2 zu tun haben

Wenn also ein Lichtstrahl an einem Weltkörper vorbeigeht, so wird er durch die Attraktion desselben genötigt, anstatt in der geraden Richtung fortzugehen, eine Hyperbel zu beschreiben, deren konkave Seite gegen den anziehenden Körper gerichtet ist.... Wenn man in der Formel für $\tan\omega$ *die Beschleunigung der Schwere auf der Oberfläche der Sonne substituiert, und den Halbmesser dieses Körpers für die Einheit annimmt, so findet man* $\omega = 0,84''$*. Wenn man Fixsterne sehr nahe an der Sonne beobachten könnte, so würde man wohl darauf Rücksicht nehmen müssen. Da dies aber bekanntlich nicht geschieht, so ist auch die Perturbation durch die Sonne zu vernachlässigen.*

Über 100 Jahre blieb dieser Wert unbeachtet und unbeobachtbar, bis 1911 A. EINSTEIN in Prag die gleiche Formel wie SOLDNER mit dem gleichen Resultat auf der Grundlage des Äquivalenzprinzips und des *Huygensschen Prinzips* neu ableitet ([38]). EINSTEIN zeigte im Jahre 1911 anhand von Gedankenexperimenten mit Uhren, dass die Lichtgeschwindigkeit in nichtlokalen Koordinatensystemen variabel ist und in der Nähe der Sonne sich für einen äußeren Beobachter leicht verkleinern muss. Seine damaligen Überlegungen zur variablen Lichtgeschwindigkeit gingen im Prinzip schon von der infinitesimalen Metrik - Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= g_{00}\, c^2\, dt^2 + g_{11}\, dr^2 \\ 0 &= c^2\, d\tau^2 - dX^2 \end{aligned}$$

aus. Lokal ist c immer noch eine absolute Invariante, aber für einen äußeren Beobachter gilt das nicht mehr. Die differenzielle Änderung der Ortszeit τ und des lokalen Maßstabes dx lautet

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt; \qquad dX = \sqrt{-g_{11}}\, dr \tag{A.49}$$

Für den Quotienten ergibt sich dann

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dX}{d\tau}\sqrt{\frac{g_{00}}{-g_{11}}} = c\sqrt{\frac{g_{00}}{-g_{11}}}.$$

Im Jahre 1911 setzt EINSTEIN noch nach EUKLID $g_{11} = -1$ und für $g_{00} = 1 - r_G/r$, wobei $r_G = GM/c^2$ den Gravitationsradius bezeichnet. Die Lichtgeschwindigkeit c wird so in der Nähe der Sonne verringert,

was im Grunde einer Brechung von Lichtstrahlen in optisch dichteren Medien gleich kommt. Nach der obigen Rechnung gilt nach Ersetzen von r_G durch r_S für den Brechungsindex

$$\mathbf{n}(r) = \frac{c}{c(r)} = \frac{1}{1 - \frac{r_S}{r}} \tag{A.50}$$

Eine gravitierende Masse wirkt also wie eine *Gravitationslinse*, bei der das *Fermatsche Prinzip der schnellsten Ankunft gilt.* Mit Hilfe des *Huygenschen Prinzips* berechnet EINSTEIN mit r_G anstatt r_S für den Ablenkwinkel das Integral

$$\Theta = \frac{G\,M}{c^2} \int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=+\pi/2} \frac{\cos[\theta]\,ds}{r^2} \tag{A.51}$$

oder nach der Substitution $r = r_1/u$

$$\Theta = \frac{r_S}{r_0} \int_0^1 \frac{u\,du}{\sqrt{1-u^2}} \tag{A.52}$$

Das verbleibende Integral ist eins und EINSTEIN erhält tatsächlich das gleiche Resultat wie SOLDNER 1804, aber auf gänzlich anderer physikalischer Grundlage. Denn nach NEWTON wäre die Lichtgeschwindigkeit in der Nähe eines Massenzentrums leicht erhöht anstatt erniedrigt. Hier taucht das gleiche Dilemma wie bei der Herleitung des Brechungsgesetzes Mitte des 17. Jahrhunderts auf. So lesen wir in einem Brief von P. DE FERMAT an C. DE LA CHAMBRE aus dem Jahre 1662:

> *... fand ich, daß mein Prinzip der Lichtbrechung zu genau derselben Proportion führte, die auch Herr Descartes aufgestellt hatte. Dieses völlig unvorhergesehene Ergebnis hat mich derart überrascht, dass ich vor Verwunderung kaum zu mir kam. Ich habe meine algebraischen Operationen auf verschiedene Weisen wiederholt. Das Ergebnis war jedesmal dasselbe, obwohl mein Beweis auf der Annahme beruht, das Licht pflanze sich in dichteren Medien langsamer fort als in dünneren, was ich für einzig vernünftig und notwendig halte, im Gegensatz zu Herrn Descartes, der das Gegenteil behauptet.*

Schon fünf Jahre später vollendet EINSTEIN seine Allgemeine Relativitätstheorie. Für die Bahn eines Photons gilt nun in der Schwarzschildmetrik die *zeitartige Geodäte* ([211])

$$d\varphi = \pm \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{1}{r^2}\left(\frac{r_S}{r}-1\right)+\frac{1}{r_0^2}\left(1-\frac{r_S}{r_0}\right)}} \tag{A.53}$$

Mit der Substitution

$$\frac{r_S}{r} = u, \quad \frac{r_S}{r_0} = u_0$$

folgt für den vollen Ablenkwinkel

$$\Theta = 2\int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{u^3 - u_0^3 + u_0^2 - u^2}} - \pi \tag{A.54}$$

Da am Sonnenrand der Quotient r_S/r_0 sehr klein ist, lässt sich durch eine einfache Reihenentwicklung des Integrals die *endgültige* Einstein - Formel

$$\boxed{\Theta = \mathbf{2}\,\frac{r_S}{r_0}.\ (\textit{Einstein}\ 1916)} \tag{A.55}$$

ableiten. Dies ist *genau der doppelte Wert*, welchen die Newton'sche Gravitationstheorie liefert! Genau hier taucht der berühmte **Faktor 2** auf, der die irrtümliche Annahme einer euklidischen Metrik aus dem Jahre 1911 korrigiert. Die eigentliche Photonenbahn kann durch die Weierstraßsche elliptische Funktion

$$\frac{r_S}{r} = \frac{1}{3} + \wp\left[\frac{\varphi}{2} + \omega_1 + \omega_2;\ g_2, g_3\right] \tag{A.56}$$

mit

$$g_2 = \frac{4}{3}; \quad g_3 = \frac{8}{27} - 4\,u_0^2 + 4\,u_0^3$$

dargestellt werden. EINSTEIN sollte mit der allgemein Deutung der Lichtausbreitung Recht behalten. Obwohl der Faktor 2 noch fehlte, prognostizierte EINSTEIN im Jahre 1911 zum erstenmal sowohl eine *Lichtkrümmung* als auch eine *Lichtverzögerung* in der Nähe gravitativer Zentren. Erst im

Jahre 1964 schlug I.I.Shapiro vor, die *Lichtverzögerung* von Funksignalen an dem Planeten Venus zu messen, wenn dieser hinter der Sonne steht. Im Jahre 2002 konnte diese jetzt so genannte *Shapiro - Verzögerung* mit der Cassini - Sonde auf 0.001% mit der Theorie in Einklang gebracht werden.

Als A.S. Eddington(1882-1944) und F.W. Dyson (1868-1939) die berühmte Sonnenfinsternis - Expedition von 1919 planten, ging es nur um die *eine entscheidende Frage*, ob der Wert von Newton oder der doppelte Wert richtig ist. Es gibt eine schöne Anekdote aus dieser Zeit, die dieses Problem schön beleuchtet. S. Chandrasekhar (1910-1995) zitiert aus einem persönlichen Bericht von A. Eddington: ([22]), ([93])

> *... As the problem then presented itself to us, there were three possibilities. There might be no deflection at all; that is to say, light might not be subject to gravitation. There might be „half-deflection", signifying that light was subject to gravitation, as Newton had suggested, and obeyes the simple Newtonian law. Or there might be a „full-deflection," confirming Einstein's than Newton's law. I remember Dyson explaining all this to my companion Cottingham, who gathered the main idea that the bigger the result, the more exciting it would be. „What will it mean if we get double the Einstein deflection. „Then," said Dyson, „Eddington will go mad, and you will have to come home alone."*

Die Geschichte hat diese bange Frage zugunsten Einsteins entschieden, obwohl damals die ersten Auswertungen nicht eindeutig waren.

A.9 Planetenbahnen und Photonenbahnen

Im Hauptteil dieses kleinen Buches wurde die exakte mathematische Darstellung einer *Planetenbahn* (Raum-Zeit Geodäte) und einer *Photonenbahn* nach der Einsteinschen Gravitationstheorie als eine Polargleichung $r(\varphi)$ in der Form (1.15)

$$\frac{r_S}{r} = \frac{1}{3} + \wp\left[\frac{\varphi}{2} + \omega_1 + \omega_2;\ g_2, g_3\right] \tag{A.57}$$

geschrieben (1.15). Die elliptischen Invarianten lauten dabei

$$g_2 = 4\left(\frac{1}{3} + \left(\frac{r_S}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{r_S}{r_2}\right)^2 + \frac{r_S^2}{r_1\,r_2} - \frac{r_S}{r_1} - \frac{r_S}{r_2}\right), \tag{A.58}$$

$$g_3 = 4\left(\frac{2}{3} - \frac{r_S}{r_1} - \frac{r_S}{r_2}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{r_S}{r_1}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{r_S}{r_2}\right) \tag{A.59}$$

und sind nur von der Perihel - Apheldistanz r_1 und r_2 abhängig[14] Die komplizierte Struktur möglicher Bahnformen wird nun durch die *elliptische $\wp$ - Funktion* von Weierstraß ausgedrückt. Im Summanden $1/3$ steckt schon die Information, daß planetare Kreisbahnen mit dem Radius $3\,r_S$ *instabil* sind. Die eigentliche „Bahnsingularität“ setzt also schon beim dreifachen Schwarzschildradius ein. Bei den Photonen tritt dies erst beim Radius $3\,r_S/2$ auf.

Die obige Formel ist so normiert, daß bei $\varphi = 0$ das Perihel der Bahn liegt. Eine alternative Darstellung wäre

$$\frac{r_S}{r} = \frac{1}{3} + \wp\left[\frac{\varphi}{2} + \omega_2;\ g_2, g_3\right], \tag{A.60}$$

wo jetzt bei $\varphi = 0$ das Apogäum der Bahn läge. Die letztere Darstellung kann durch sogenannte *Thetareihen* ausgerückt werden. Es gilt

$$\frac{r_S}{r} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\right) + 2\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2 \left\{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n\,q^n}{1-q^{2n}}\,\cos\left(\frac{n\,\pi}{2\omega_1}\,\varphi\right)\right\}. \tag{A.61}$$

In dieser Fourierdarstellung bedeutet q die meistens *sehr kleine Größe*

$$q = \exp\left(\imath\,\pi\,\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \tag{A.62}$$

und ω_1 und ω_2 die reelle und imaginäre *Halbperioden*

$$\omega_1 = \frac{\pi/2}{\mathbf{M}\left[\sqrt{1 - \frac{r_S}{r_1} - 2\frac{r_S}{r_2}},\ \sqrt{1 - 2\frac{r_S}{r_1} - \frac{r_S}{r_2}}\right]},$$

[14] Im Jahre 1931 von dem Japaner Y. HAGIHARA zum erstenmal durchgerechnet ([69]).

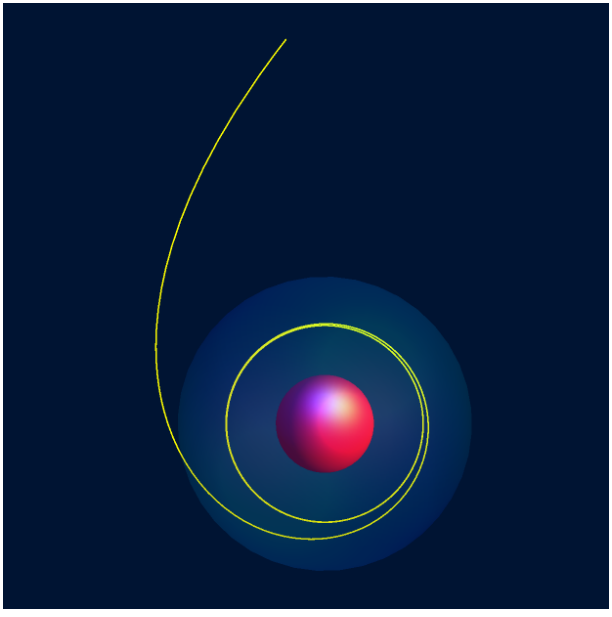


Fig. A.2: *Im Spezialfall $r_1 = 2\,r_S$ und $r_2 = \infty$ ist die zeitartige Geodäte in der Schwarzschildmetrik eine Spiralbahn, die sich unendlich oft um den inneren Radius $r_1 = 2\,r_S$ herumwickelt. Eine ähnliche Lösung gibt es auch im Falle $r_1 = r_S$ und $r_2 = -r_S$, was im Newtonschen Bild eigentlich eine Hyperbelbahn sein müsste.*

$$\omega_2 = \frac{\imath\,\pi/2}{\mathbf{M}\left[\sqrt{1 - \frac{r_S}{r_1} - 2\frac{r_S}{r_2}},\ \sqrt{\frac{r_S}{r_1} - \frac{r_S}{r_2}}\right]}.$$

der elliptischen Funktion. Auch hier kann man die Singularität des dreifachen Schwarzschildradius erkennen, wenn die Argumente des *arithmetisch - geometrischen Mittels* Null werden.

Die Lösung (A.60) beschreibt für den Fall, dass die Diskriminante der elliptischen Funktion

$$\Delta = 16\left(\frac{r_S}{r_1} - \frac{r_S}{r_2}\right)^2\left(1 - 2\,\frac{r_S}{r_1} - \frac{r_S}{r_2}\right)^2\left(1 - \frac{r_S}{r_1} - 2\,\frac{r_S}{r_2}\right)^2$$

verschwindet, elementare Bahnformen, die es so in der Newtonschen Gravitationstheorie nicht gibt. So existiert der Spezialfall $r_1 = 2\,r_S$

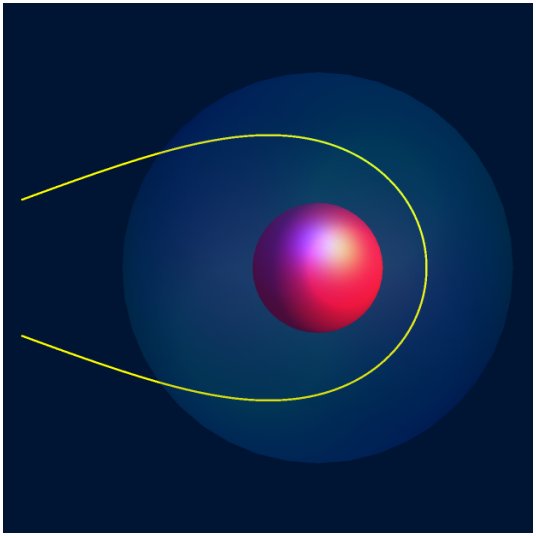


Fig. A.3: *Im Spezialfall $r_0 = 5\,r_S/3$ vollführt ein Photon eine Schleifenbahn um die gravitative Singularität. Nach Newton wäre eine solche Bahn nicht möglich.*

und $r_2 = \infty$. Dann erhält mit $g_2 = 1/3$ und $g_3 = -1/27$ die singuläre *Spiralbahn*

$$\frac{r_S}{r} = \frac{1}{3} + \wp\left[\frac{\varphi}{2} \pm \frac{\imath\,\pi}{\sqrt{2}};\, \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{27}\right\}\right],$$

wobei jetzt der Winkel φ vom unendlich fernen Punkt gezählt wird. Die Spiralbahn kann in diesem Grenzfall auch elementar

$$\frac{r_S}{r} = \frac{1}{2}\,\tanh\left[\frac{\varphi}{2\sqrt{2}}\right]^2$$

dargestellt werden. Ein weiterer Spezialfall ist $r_1 = r_S$ und $r_2 = -r_S$. In der Newtonschen Gravitation entspräche dies einer Hyperbelbahn. Doch mit $g_2 = 16/3$ und $g_3 = -64/27$ ergibt sich wieder eine Spiralbahn der Form

$$\frac{r_S}{r} = \frac{1}{3} + \wp\left[\frac{\varphi}{2} \pm \frac{\imath\,\pi}{2\sqrt{2}};\, \left\{\frac{16}{3}, -\frac{64}{27}\right\}\right],$$

wobei der Winkel φ wieder vom unendlich fernen Punkt gezählt wird. Alternativ gilt auch

$$\frac{r_S}{r} = -1 + 2\,\tanh\left[\frac{\varphi}{\sqrt{2}}\right]^2 .$$

Bei einer Photonenbahn gilt die gleiche Formel wie (A.57) , nur die elliptischen Invarianten haben jetzt die Darstellung

$$g_2 = \frac{4}{3}; \quad g_3 = \frac{8}{27} + 4\left(\frac{r_S}{r_0} - 1\right)\left(\frac{r_S}{r_0}\right)^2$$

Die charakteristischen Wurzeln $e_1 > e_2 > e_3$ der elliptischen Funktion lauten bei Photonenbahnen

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{6}\left(1 - 3\frac{r_S}{r_0} + 3\sqrt{1 + \left(2 - 3\frac{r_S}{r_0}\right)\frac{r_S}{r_0}}\right), \\
e_2 &= -\frac{1}{3} + \frac{r_S}{r_0}, \\
e_3 &= \frac{1}{6}\left(1 - 3\frac{r_S}{r_0} - 3\sqrt{1 + \left(2 - 3\frac{r_S}{r_0}\right)\frac{r_S}{r_0}}\right).
\end{aligned}$$

Die Größe r_0 bezeichnet den Radius maximaler Annäherung an die gravitative Singularität. Auch kreisförmige Photonenbahnen sind für $r_0 = 3\,r_S/2$ möglich. Die Diskriminante $\Delta = g_2^3 - 27\,g_3^2$ lautet jetzt

$$\Delta = 16\left(2 - 3\frac{r_S}{r_0}\right)^2\left(1 - \frac{r_S}{r_0}\right)\left(1 + 3\frac{r_S}{r_0}\right)\left(\frac{r_S}{r_0}\right)^2 .$$

Die Ergebnisse zeigen, daß die Einstein'sche Gravitationstheorie die mathematisch elegantesten Ergebnisse für exakt lösbare Probleme liefert, mit zahlreichen Ideenverbindungen zu mathematischen Gebieten der analytischen Funktionentheorie und Geometrie. Der Autor möchte hier die Hoffnung aussprechen, dass auch die anomalen Rotationskurven von Galaxien durch diese einfache Theorie ihre Erklärung findet. Bei J. Kepler beginnend, erreicht man über I. Newton schließlich die abstrakten Höhen der Allgemeinen Relativitätstheorie - oder besser - der mathematisch - physikalischen *Invariantentheorie*. Mehr Harmonie und Schönheit kann man bei der Beschreibung einer idealisierten Planetenbahn oder Photonenbahn nicht erwarten.

A.10 Madelungkonstanten und Gittersummen

Bis heute ist die mathematische Theorie der Madelungkonstanten unvollständig entwickelt. Der Zahlenwert gibt das Verhältnis der durchschnittlichen Bindungsenergie pro Ion im Kristallgitter zur durchschnittlichen Bindungsenergie pro Ion bei einem einzelnen Ionenpaar an. Der kanadische Mathematiker Borwein definiert dabei die transzendente Funktion

$$\mathbf{b}_3(2s) = \sum_{j_1,j_2,j_3}{}' \frac{(-1)^{j_1+j_2+j_3}}{(j_1^2+j_2^2+j_3^2)^s}. \tag{A.63}$$

Die klassische Madelungkonstante ist dann $\mathbf{b}(1)$. Nur wenige aber interessante Resultate sind bis heute bekannt. Berühmt ist die Methode von Ewald mit Hilfe elliptischer Thetafunktionen und Poisson'scher Summationsformeln. Ein mathematischer „Genuss" ist die Formel von Benson (Spezialfall der Epsteinschen Zetafunktion)

$$\begin{aligned}\sum_{j_1,j_2,j_3}{}' & \frac{(-1)^{j_1+j_2+j_3}}{\sqrt{j_1^2+j_2^2+j_3^2}} \\ &= -12\,\pi \sum_{n_1,n_2=0}^{\infty} \operatorname{sech}^2\left(\pi\sqrt{\left(n_1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n_2+\frac{1}{2}\right)^2}\right).\end{aligned} \tag{A.64}$$

In der letzten Summation wird nur über die positiven Zahlen summiert. Die Dreifachsumme ist ein Spezialfall der Epstein'schen Zetafunktion. Diese Zetafunktion in ihrer allgemeinsten Form hat zahlreiche Anwendungen in der Kristallografie, der Quantenfeldtheorie oder in der *Wheeler – deWitt* Gleichung.

Im Jahre 1921 veröffentlichte der Physiker und Sommerfeld - Schüler P. EWALD ein Verfahren, um langsam konvergierende Gittersummen zu berechnen[15]. Mit der Abkürzung $|\mathbf{n}| = \sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}$, wobei $\mathbf{n}$ den Vektor $\{n_1, n_2, n_3\}$ bezeichnet, ergab sich im einfachsten Gittermodell

[15] P.P.EWALD (1888-1985) berichtete in einem Interview 1962 (mit T. Kuhn), dass während eines Skiurlaubs zu Ostern 1911 in Mittenwald mit der Sommerfeld - Gruppe P. Debeye mit dem Problem bekannt wurde und es mit der „Thetafunktionen - Methode" löste. Debeye berief sich dabei auf Riemann, doch wahrscheinlicher ist Dirichlet

für die zweite Ableitung $\mathbf{V}^{(2)}[0]$ des Potentials der Ausdruck

$$\mathbf{V}^{(2)}[0] = \sum_{\mathbf{n}\neq\mathbf{0}} (-1)^{n_1} \left(\frac{1}{|\mathbf{n}|^3} - \frac{3\,n_1^2}{|\mathbf{n}|^5} \right) \tag{A.65}$$

schreiben.

Bei der Berechnung der JEANS'schen Dispersionsrelation für gravitative Dichtestörungen in einem unendlich ausgedehnten kubischen Massengitter treten Funktionen auf, die alle mit Hilfe der speziellen EPSTEIN'schen Zetafunktion

$$\mathbf{Z}(\mathbf{k};\mathbf{b}) = \sum_{\mathbf{n}} \frac{e^{2\pi\,\imath\,\mathbf{k}\circ\mathbf{n}}}{|\mathbf{n}+\mathbf{b}|} \tag{A.66}$$

berechnet werden können. $\mathbf{k}$ ist ein Wellenzahlvektor und $\mathbf{b}$ ein konstanter Basisvektor. Summiert wird über alle positiven und negativen Zahlentripel $\mathbf{n}$. Der Fall $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ muss gesondert behandelt werden. Durch eine Integraltransformation kann man hierfür auch schreiben

$$\mathbf{Z}(\mathbf{k};\mathbf{b}) = 2 \sum_{\mathbf{n}} \int_0^\infty e^{-\pi\,(\mathbf{n}+\mathbf{b})^2\,u^2 + 2\,\pi\,\imath\,\mathbf{k}\circ\mathbf{n}}\,du \tag{A.67}$$

Summenzeichen und Integralzeichen können hier vertauscht werden. Der Integrationsbereich wird nun in zwei Teile aufgespalten, in einen von 0 bis 1 und von 1 bis ∞. Das Integral von 1 bis ∞ soll aufgrund der guten Konvergenz der e-Funktion wieder ausgerechnet werden und man erhält zunächst

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\mathbf{k};\mathbf{b}) = 2 \int_0^1 & \left(\sum_{\mathbf{n}} e^{-\pi\,(\mathbf{n}+\mathbf{b})^2\,u^2 + 2\,\pi\,\imath\,\mathbf{k}\circ\mathbf{n}} \right) du \\ & + \sum_{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{Erfc}(\sqrt{\pi}\,|\mathbf{n}+\mathbf{b}|)}{|\mathbf{n}+\mathbf{b}|}\, \exp[2\pi\,\imath\,(\mathbf{k}\circ\mathbf{n})]. \end{aligned} \tag{A.68}$$

Im ersten Integral wenden wir nun die POISSON'sche Summationsformel an, die speziell für die obige Thetafunktion

$$\sum_{\mathbf{n}} e^{-\pi\,(\mathbf{n}+\mathbf{b})^2\,u^2 + 2\pi\imath\,\mathbf{k}\circ\mathbf{n}} = \frac{1}{u^3} \sum_{\mathbf{m}} e^{-\pi(\mathbf{k}-\mathbf{m})^2/u^2}\, e^{2\pi\,\imath\,\mathbf{b}\circ(\mathbf{k}-\mathbf{m})}. \tag{A.69}$$

lautet. Dies folgt aus einer 3D -Poisson'schen Summationsformel. Nach Ausführung der Integration ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}(\mathbf{k};\mathbf{b}) = &+\frac{1}{\pi}\sum_{\mathbf{n}}\frac{e^{-\pi(\mathbf{k}-\mathbf{n})^2}}{(\mathbf{k}-\mathbf{n})^2}\,\exp[2\pi\,\imath\,\mathbf{b}\circ(\mathbf{k}-\mathbf{n})]\\ &+\sum_{\mathbf{n}}\frac{\mathbf{Erfc}(\sqrt{\pi}\,|\mathbf{n}+\mathbf{b}|)}{|\mathbf{n}+\mathbf{b}|}\,\exp[2\pi\,\imath\,(\mathbf{k}\circ\mathbf{n})].\end{aligned} \tag{A.70}$$

Für $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ ergibt sich hieraus der Spezialfall

$$\begin{aligned}(\mathbf{Z}(\mathbf{k};\mathbf{b})-1/|\mathbf{b}|)_{\mathbf{b}\to\mathbf{0}} = &\\ -2+\frac{1}{\pi}\sum_{\mathbf{n}}\frac{e^{-\pi(\mathbf{k}-\mathbf{n})^2}}{(\mathbf{k}-\mathbf{n})^2}&\\ +\sum_{\mathbf{n}\neq\mathbf{0}}\frac{\mathbf{Erfc}(\sqrt{\pi}\,|\mathbf{n}|)}{|\mathbf{n}|}\,\cos[2\pi(\mathbf{k}\circ\mathbf{n})].&\end{aligned} \tag{A.71}$$

Die klassische Madelungkonstante ergibt sich hieraus für $\mathbf{k}=\{1/2,1/2,1/2\}$ zu

$$\sum_{\mathbf{n}\neq\mathbf{0}}\frac{(-1)^{n_1+n_2+n_3}}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}} = -1.74756459463318219063\ldots \tag{A.72}$$

Mit Hilfe dieser Darstellung ist es ohne Mühe möglich, die Gittersumme $\mathbf{V}^{(2)}[0]$ auf zwanzig Dezimalstellen gemäß

$$\mathbf{V}^{(2)}[0] = 9.68744303882041417076\ldots \tag{A.73}$$

zu berechnen.

A.11 Greensche Funktion der Klein-Gordon Gleichung

Um die Schallausbreitung und Dichtefluktuationen im sehr frühen Kosmos zu verstehen, muss man sich mit einer speziellen Wellengleichung der klassischen Physik auseinandersetzen: *Die Klein - Gordon Gleichung.*

Die Klein-Gordon Gleichung für eine skalare Größe ξ ist definiert durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_3^2} + m^2\, \xi = 0. \tag{A.74}$$

Um die Greensche Funktion dieser Gleichung zu bestimmen, führen wir eine vierdimensionale Fouriertransformation dieser Gleichung mit der Inhomogenität $\delta\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$ durch. Mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ gilt zunächst

$$\mathbf{G}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \tau)\, e^{-\imath\omega t - \imath \mathbf{k} \circ \mathbf{x}}\, dt\, d^3\mathbf{x},$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(\mathbf{k}, \omega)\, e^{\imath\omega t + \imath \mathbf{k} \circ \mathbf{x}}\, d\omega\, d^3\mathbf{k}.$$

Für die Greensche Funktion erhält man in der Fourier-Darstellung

$$\mathbf{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{[\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} - \omega][\omega + \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}]} \tag{A.75}$$

Im Ortsraum also

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{16\pi^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\imath\omega t + \imath \mathbf{k} \circ \mathbf{x}}\, d\omega\, d^3\mathbf{k}}{[\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} - \omega][\omega + \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}]} \tag{A.76}$$

Eine Kontour-Integration in der komplexen ω-Ebene führt weiter auf das Integral

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{\Theta}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left\{t\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}\right\}}{\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}}\, e^{\imath \mathbf{k} \circ \mathbf{x}}\, d^3\mathbf{k}. \tag{A.77}$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten im $\mathbf{k}$-Raum mit $|\mathbf{k}| = k$ und $|\mathbf{x}| = r$ vereinfacht sich dies zu

$$\mathbf{G}(r, t) = \frac{\Theta}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin\left\{t\sqrt{m^2 + k^2}\right\}}{\sqrt{m^2 + k^2}}\, \frac{k\, \sin(kr)}{r}\, dk. \tag{A.78}$$

Umschreiben führt auf

$$\mathbf{G}(r,t) = -\frac{\Theta}{2\pi^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\left\{t\sqrt{m^2+k^2}\right\}}{\sqrt{m^2+k^2}}\,\cos(kr)\,dk. \tag{A.79}$$

Das Integral lässt sich auswerten zu

$$\mathbf{G}(r,t) = -\frac{\Theta}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left\{\Theta(t-|r|)\,\mathbf{J}_0\left(m\sqrt{t^2-r^2}\right)\right\} \tag{A.80}$$

oder

$$\mathbf{G}(r,t) = \frac{\Theta}{2\pi}\,\boldsymbol{\delta}(t^2-|r|^2) - \frac{m}{4\pi}\,\Theta(t-|r|)\,\frac{\mathbf{J}_1\left(m\sqrt{t^2-r^2}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}. \tag{A.81}$$

$\Theta(z)$ ist hier das Integral der *Dirac'schen Deltafunktion* $\boldsymbol{\delta}(z)$. Und genau dies ist das Resultat, was man auch in der Literatur findet. Im Falle der Gravitation muss das Massenskalar m rein imaginär werden. Setzen wir also

$$m \to \imath\,\mu, \tag{A.82}$$

so gilt im Falle der Gravitation

$$\mathbf{G}(r,t) = \frac{\Theta}{2\pi}\,\boldsymbol{\delta}(t^2-|r|^2) + \frac{\mu}{4\pi}\,\Theta(t-|r|)\,\frac{\mathbf{I}_1\left(\mu\sqrt{t^2-r^2}\right)}{\sqrt{t^2-r^2}}. \tag{A.83}$$

Die modifizierte Besselfunktion $\mathbf{I_1}(z)$ beschreibt entweder die raumzeitliche Bildung eines kugelförmigen „Hohlraumes“ oder einer kugelförmigen „Massenansammlung“ im ansonsten homogenen Materiesubstrat. Die Größe von μ hängt von der „Renormierung“ $\mathbf{V}''[0]$ der Jeansgleichung ab. Die Expansion modifiziert natürlich die obigen Resultate.

A.12 Integrale der Fermi-Dirac Statistik

In seinem Buch *Gravitation and Cosmology*[16] aus dem Jahre 1971 hat S. Weinberg nach Vorarbeiten von P.J.E. Peebles (1966) die thermische

[16] Im Kapitel : Thermal History of the Early Universe, Seite 537-541

Geschichte des sehr frühen *Feuerballs* im expandierenden Universums mit Methoden der relativistischen Quantenstatistik behandelt. Dabei treten zwei Integrale auf, deren Berechnung im Grenzfall hoher Photonen-Leptonen Temperaturen eigentümliche Schwierigkeiten machen. Zunächst leitet WEINBERG die Beziehung

$$\left(\frac{T_\nu}{T}\right)^3 = \frac{4}{11}\,\mathbf{L}[x] \tag{A.84}$$

ab, wobei T_ν und T die Temperaturen der Neutrinos und der Photonen bzw. Leptonen bedeuten. Die spezielle Funktion $\mathbf{L}[x]$ ist durch das Integral

$$\mathbf{L}[x] = 1 + \frac{15}{4}\,x^4 \int_0^\infty \frac{\cosh[4t] - \cosh[2t]}{e^{\pi\,x\,\cosh[t]} + 1}\,dt \tag{A.85}$$

gegeben, wobei

$$x = \frac{m_e\,c^2}{\pi\,k_B\,T} \tag{A.86}$$

ist. m_e bezeichnet hier die Elektronenmasse, c die Lichtgeschwindigkeit, k_B die Boltzmann-Konstante und T die Photonentemperatur. In Abweichung zu WEINBERG haben wir die Zahl π in die e-Funktion und reziprok bei x eingeführt, was mathematisch - analytisch wesentlich natürlicher ist. Da die modifizieren Besselfunktionen $\mathbf{K}_n[z]$ für $z > 0$ die Integraldarstellung

$$\mathbf{K}_n[z] = \int_0^\infty e^{-z\,\cosh[t]}\,\cosh[n\,t]\,dt \tag{A.87}$$

besitzen, können wir durch eine geometrische Reihenentwicklung der e-Funktion in (A.85) die Funktion $\mathbf{L}[x]$ durch

$$\mathbf{L}[x] = 1 + \frac{15}{4}\,x^4 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,(\mathbf{K}_4[n\,\pi\,x] - \mathbf{K}_2[n\,\pi\,x]) \tag{A.88}$$

ersetzen. Wir wollen diese Darstellung jetzt in eine Potenzreihe nach x in der Umgebung von $x = 0$ entwickeln. Durch Entwicklung der Besselfunktionen erhält man so

$$\mathbf{L}[x] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left\{\frac{180}{n^4\,\pi^4} - \frac{45\,x^2}{2\,n^2\pi^2} + \frac{45\,x^4}{16} + \right.$$
$$\left.\frac{15}{128}\,n^2\,\pi^2\,\left(-3 + 4\,\gamma + 4\,\ln\left[\frac{n\,\pi\,x}{2}\right]\right)\,x^6 + \ldots\right\}$$

Die Größe γ ist die Euler-Mascheroni Konstante. Bei der alternierenden Reihensummation machen die ersten beiden Terme in der geschweiften Klammer keine Probleme. Doch der dritte und vierte Term entspricht der Summation einer *alternierenden divergenten Reihe*. Wir wollen versuchen, dieses Problem mit Hilfe der analytischen Fortsetzung der Riemannschen Zetafunktion zu lösen (*Regularisierung mit der Zetafunktion*). Zunächst gilt

$$\zeta[s] = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \equiv \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s}.$$

Daraus folgt zunächst

$$\sum_{n\,=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s} = (1-2^{1-s})\,\zeta[s]. \tag{A.89}$$

Setzen wir hier rein formal $s = 0$, so erhalten wir - in analytischer Fortsetzung -

$$\sum_{n\,=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \equiv -\zeta[0] \equiv \frac{1}{2}.$$

Ebenso gilt dann verallgemeinert

$$\sum_{n\,=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{2m} \equiv (1-2^{1+2m})\,\zeta[-2m] \equiv 0. \quad \{m = 1, 2, 3...\}$$

Differenzieren wir (A.89) nach s, so folgt

$$\sum_{n\,=1}^{\infty} (-1)^{n} n^{-s}\, \ln[n] = 2^{1-s} \ln[2]\, \zeta[s] + (1-2^{1-s})\,\zeta'[s]. \tag{A.90}$$

Daraus ergibt sich

$$\sum_{n\,=1}^{\infty} (-1)^{n} \ln[n] \equiv \frac{1}{2} \ln\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{n\,=1}^{\infty} (-1)^{n} n^{2m}\, \ln[n] &\equiv (1-2^{2m+1})\,\zeta'[-2m] \\ &\equiv (-1)^{m} (1-2^{-1-2m}) \frac{(2m)!}{\pi^{2m}}\, \zeta[2m+1]. \end{aligned}$$

Mit diesen *Regularisierungen* können wir jetzt eine Reihenentwicklung für die Funktion $\mathbf{L}[x]$ angeben. Sie lautet

$$\mathbf{L}[x] = \frac{11}{4} - \frac{15}{8}\,x^2 + \frac{45}{32}\,x^4 + \frac{105}{256}\zeta[3]\,x^6 + \ldots \tag{A.91}$$

Ein Vergleich zwischen der numerischen Berechnung des Integrals mit dieser Reihe für $x \to 0$ zeigt hervorragende Übereinstimmung innerhalb der erwarteten Genauigkeit.

A.13 Kosmologie und die Planck'schen Einheiten

In der Quantenmechanik kann ein Oszillator nie den Zustand der absoluten Ruhe einnehmen, also den Energiezustand Null. Der niedrigste Energiezustand ist immer (*Grundzustand*)

$$\frac{1}{2}\,\hbar\,\omega, \tag{A.92}$$

wo $\hbar$ die Planckkonstante und ω eine charakteristische Frequenz darstellt. Steven Weinberg hat 1989 für die sogenannte „Vakuumenergiedichte" eine Abschätzung auf der Grundlage der Quantenfeldtheorie gegebenen. Das Ergebnis weicht um etwa 120 Größenordnungen von der Energiedichte ab, die angeblich mit der Kosmologischen Konstanten Λ verbunden ist und für die beschleunigte Expansion des Universums verantwortlich sein soll.

Man kann diese Abschätzung mit Hilfe einer reinen Dimensionsbetrachtung von *Naturkonstanten* herleiten. Man fragt sich einfach, welche *charakteristische Dichte* oder welche *charakteristische Masse* kann ich aus den vier Naturkonstanten

$$\hbar, \;\; c, \;\; G, \;\; m_p \tag{A.93}$$

konstruieren, wo c die Lichtgeschwindigkeit, G die Gravitatonskonstante und m_p die Masse des Protons bezeichnet. Mit den Zahlen α, β, γ und δ machen wir also den Ansatz

$$\varrho_{vac} \propto \hbar^{\alpha}\, c^{\beta}\, G^{\gamma}\, m_p^{\delta}. \tag{A.94}$$

Das Zahlenquadrupel $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ muss nun so bestimmt werden, dass die physikalischen Dimensionen auf beiden Seiten der Gleichung identisch sind. Bezeichnet man die Dimension Masse mit M, die der Länge mit L, die der Zeit mit T, so lautet die obige Relation

$$M\,L^{-3} = M^{\alpha-\gamma+\delta}\,L^{2\alpha+\beta+3\gamma}\,T^{-\alpha-\beta-2\gamma} \tag{A.95}$$

Es ist wenig plausibel, wenn die Masse des Protons in die Vakuumfluktuationsdichte eingehen würde. Daher setzen wir zunächst $\delta = 0$ und erhalten so die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha - \gamma &= 1, \\ -2\alpha - \beta - 3\gamma &= 3, \\ \alpha + \beta + 2\gamma &= 0. \end{aligned} \tag{A.96}$$

Daraus folgt $\alpha = -1, \beta = 5, \gamma = -2$. Damit folgt für die „Vakuumenergiedichte“ der Ausdruck *Planckdichte*)

$$\boxed{\varrho_{Planck} = \frac{c^5}{G^2\,\hbar} \approx \mathbf{5.15500}\ \cdot \mathbf{10^{96}} [kg/m^3].} \tag{A.97}$$

Genau dieser Wert liegt aber um 120 Größenordnungen über dem aus der Beobachtung deduzierten „kritischen Vakuumdichte“ der „Dunklen Energie“. Diese Diskrepanz macht eine Deutung der beschleunigten Expansion durch „Quantenfluktuationen des Vakuums“ sehr unwahrscheinlich.

Eine allgemeinere Dichte erhält man aus den obigen Betrachtungen durch die Beziehung

$$\varrho(\alpha) \propto \frac{c^5}{G^2\,\hbar} \left(\frac{G\,m_p^2}{\hbar\,c}\right)^{\alpha}, \tag{A.98}$$

in der α eine beliebige reelle Zahl sein kann. Eine ähnliche Betrachtung kann man auch für eine „charakteristische Masse“ machen und erhält den Ausdruck[17]

$$\mu(\alpha) \propto m_p \left(\frac{\hbar\,c}{G\,m_p^2}\right)^{\alpha}. \tag{A.99}$$

[17] In der Theorie rotierender Schwarzer Löcher tritt der Ausdruck $\kappa = (L\,c)/(G\,M^2)$ auf, wo L den Drehimpuls und M die Masse des Körpers bezeichnen. κ muss dabei kleiner 1 sein. Bis heute ist es umstritten, ob eine Relation der Form $L \propto M^2$ für kosmische Körper Gültigkeit besitzt.

$\mu[0]$ ist dann die Protonenmasse, $\mu(1/2)$ die *Planckmasse* und $\mu(3/2)$ eine typische *Sternmasse*. Die *Planckmasse* ist somit definiert durch

$$m_{Planck} = \sqrt{\frac{\hbar\, c}{G}} \approx \mathbf{2.17645}\ \cdot \mathbf{10^{-8}}[kg]. \tag{A.100}$$

Alternativ definiert man auch eine *reduzierte Planckmasse*

$$\mathcal{M} = \sqrt{\frac{\hbar\, c}{8\pi G}} \tag{A.101}$$

ein. In ähnlicher Weise kann man auch eine *Plancklänge* und eine *Planckzeit* definieren. Es gilt

$$L_{Planck} = \sqrt{\frac{\hbar\, G}{c^3}} \approx \mathbf{1.61624}\ \cdot \mathbf{10^{-35}}[m] \tag{A.102}$$

und

$$T_{Planck} = \sqrt{\frac{\hbar\, G}{c^5}} \approx \mathbf{5.39121}\ \cdot \mathbf{10^{-44}}[s]. \tag{A.103}$$

Mit diesen Größen ist es möglich, zum Beispiel die beiden gekoppelten „Feldgleichungen“ der Kosmologie für den Skalenfaktor a und für das Skalarfeld $\mathbf{V}[\xi]$ in dimensionslosen Größen zu schreiben. Einen Vorteil durch diese Skalierung hat man eigentlich nicht.

Literaturverzeichnis

[1] Abbott, T.M.C. et al. 2024:The Dark Energy Survey: Cosmology Results With 1500 New High-redshift Type Ia Supernovae Using the Full 5-year Dataset. arxiv.org/abs/2401.02929

[2] Abdalla, E. et al. (208 Autoren). 2022: *Cosmology intertwined: A Review of the Particle Physics, Astrophysics, and Cosmology Associated with the Cosmological tensions and Anomalies.* arXiv:2203.06142v1

[3] Abel, N.H. 1825. L'integral finie $\sum^n \varphi x$ exprimee par une integrale definie simple; Magazin f. Naturvidenskaberne, Aar. III, Bd. II,182-189. Oeuvres Vol. I, 34-39

[4] Assis, A.K.T. & M.C.D. Neves 1995: History of the 2.7 K Temperature Prior to Penzias and Wilson. APEIRON **2**, Nr.3, July 1995

[5] Atkins, Peter 2018: *Conjuring the Universe - the origins of the laws of nature.* Oxford University Press 2018, 208pp, ISBN 9780198813378

[6] Atkins, Peter 2020: *A universe of nothingness. The mathematical fabric of reality.* IAI news. Issue 88, 3rd June 2020

[7] Aurich, R., et al.: *Do We Live in a Small Universe?* Classical and Quantum Gravity **25**, Nr. 125006, 2008.

[8] Bauschinger, Julius 1884: *Zur Frage über die Bewegung des Mercurperihels.* Astronomische Nachrichten **109**, p. 27

[9] Bonnor, W.B. 1957: *Jeans formula for gravitational instability.* MNRAS **117**, 104-117, 1957

[10] Borwein, D., Borwein, J.M. und K.F. Taylor (1985). Convergence of lattice sums and Madelung's constant. J.Math.Phys. **26**, 2999

[11] Bronstein, M.P. On the Expanding Universe. Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion Band **1**, Heft 1, pp. 73-83, 1933 Wohl die erste äußerst bemerkenswerte Arbeit über ein „Quintessenzmodell“ des Universums mit zeitlich variabler kosmologischer Konstante.

[12] Buchert, T. & J. Ehlers 1997. *Averaging inhomogeneous Newtonian cosmologies*. Astronomy and Astrophysics, **320**, p.1-7, (1997)

[13] Buchert, T. 2000. Gen. Relativ. Grav. **32**, 105 (2000); Gen. Relativ. Grav. **33**, 1381

[14] Buchert, T.: *A cosmic equation of state for the inhomogeneous universe: can a global far from - equilibrium state explain dark energy?* Classical and Quantum Gravity **22**, Number 19, L113, (2005)

[15] Buchert, T.: Dark Energy from Structure: A Status Report. General Relativity and Gravitation **40**, S. 467 – 527, 2008.

[16] Brush, S.G., C.W.F. Everitt und Elizabeth Garber (1983): *Maxwell on Saturn's Rings*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England. In diesem Buch wird die Theorie des Saturnringes von J.C. Maxwell aus dem Jahre 1859 ausführlich diskutiert. Maxwell war der Erste, der Stabilitäten und Instabilitäten von selbstgravitierenden N-Teilchenringen um einen Zentralkörper diskutiert hat. In älteren (nach Tisserand 1888) wie neueren Lehrbüchern zur „Himmelsmechanik“ bleibt diese Arbeit grundsätzlich unerwähnt. Sie gehört schon heute dem „verlorenen Wissen“ an.

[17] Caldwell, R.R., Dave, R. und P.J. Steinhardt. (1988). Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. Phys.Rev.Lett. **80**, 1988, 1582-1585

[18] Carlip, S.: Aberration and the Speed of Gravity. Phys. Lett. **A 267**, S. 81-87, 1999

[19] Charlier, C.V.L. (1896): *Ist die Welt endlich oder unendlich in Raum und Zeit?*. Archiv systematische Philosophie **2**, 476-494, (1896)

[20] Charlier, C.V.L. (1908): *Wie eine unendliche Welt aufgebaut sein kann.*. Arkiv Mat., Astronomi Fysik. **4**, No. 4,1 (1908)

[21] Charlier, C.V.L. (1922): *How an Infinite World May Be Build Up.*. Arkiv Mat., Astronomi Fysik. **16**, No. 22, 1-44, (1908)

[22] Chandrasekhar, S. *Truth and Beauty* Aesthetics and Motivations in Science. The University of Chicago Press, Chicago 1987, p. 114

[23] Chaisson, E., *Cosmic Evolution*, Harvard University Press, 2001.

[24] Clifton, T., Ferreira, P.G. & Kate Land.: Living in a Void: Testing the Copernican Principle with Distant Supernovae. Phys. Rev. Lett. **101**, 131302 (2008) 4 pp.

[25] Clifton, T., Ferreira, P.G. *Does Dark Energy Really Exist? Or does Earth occupy a very unusual place in the universe?* Scientic American , April, 2009

[26] Douglas, A. V. 1956: *Forty Minutes with Einstein.* Journal of the Royal Astronomical Society of Canada **50**, p. 99. „Every man has his own cosmology and who can say that his own theory is right?“.

[27] Duerbeck, Hilmar. & Seitter, Waltraut C.: *In Hubble's shadow: early research on the expansion of the universe.* MiklÜs Konkoly Thege (1842-1916). 100 Years of Observational Astronomy and Astrophysics - A collection of papers on the history of Observational Astrophysics. Edited by C. Sterken and J. B. Hearnshaw. Brussels, Belgium: VUB october 2001

[28] Duerbeck, H.W. & R. Dick, 2005, *Einsteins Kosmos. Untersuchungen zur Geschichte der Kosmologie, Relativitätstheorie und zu Einsteins Wirken und Nachwirken.* Acta Historica Astronomiae **27**, Verlag Harri Deutsch, 2005

[29] Dyson, L., M. Kleban & L. Susskind 2002: Disturbing Implications of a Cosmological Constant. Journal of High Energy Physics, Issue **10**, id. 011 (2002).

[30] Earman, J. (2001): *Lambda: the constant that refuses to die.*. Arch. Hist. Exact Sci. **55**, 189-220 (2001)

[31] Ellis, G.F.R.: *Relativistic Cosmology*, 1971, General Relativity and Cosmology, ed. R.K. Sachs, Academic Press Inc., London, p 104, Reprinted in Gen. Rel. Grav. **41** (2009) 581.

[32] deSitter, W., 1934, *On the Foundations of the theory of Relativity, with Special reference to the Theory of the Expanding Universe*, Proceedings,Royal Academy Amsterdam **37**, 597-601.

[33] Eberty, Felix (1846-1847): *Die Gestirne und die Weltgeschichte. Gedanken über Raum, Zeit und Ewigkeit.* Verlag August Schulz, Breslau, 1846. Ergänzung 1847: 2. Heft, Verlag Georg Philipp Aderholz, 1847. *Felix Eberty (1812-1884) war Jurist, Amateurastronom und Schriftsteller (Jugenderinnerungen eines alten Berliners). Die obige bemerkenswerte Schrift stellte 1855 der Schriftsteller Aaron Bernstein (1812-1884) in der ersten Ausgabe seiner Naturwissenschaftlichen Volksbücher Betrachtungen über Raum, Zeit und Lichtgeschwindigkeit vor, die „ein unbekannter scharfsichtiger Denker" in einer anonymen Schrift angestellt habe. Albert Einstein las in seiner Jugend diese populärwissenschaftlichen Bücher, die als prägend für sein Interesse und seine Theoriebildung gelten können.*

[34] Eddington, A.S. 1930: *On the Instability of Einstein's Spherical World*, MNRAS **90**, 668-678 (1930).

[35] Eddington, A. S., 1932, *The Expanding Universe*, Ann Arbor: Ann Arbor, Paperbacks-University Michigan Press.

[36] Eddington, A. S., 1935, *Review of Relativity: Gravitation and World-Structure*, Nature **135**: 635-636.

[37] Eddington, A. S. 1939, *The Philosophy of Physical Science*, New York: Macmillan

[38] Einstein, A. 1911. *Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes.* Annalen der Physik **35**, 898-908, 1911

[39] Einstein, A. 1915: *Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie.* In: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Nr. **2**, 1915, S. 831-839.

[40] Einstein, A. 1916: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.* Annalen der Physik. **49**, 1916, S. 769-822.

[41] Einstein, A. 1920: *Meine Antwort – Über die antirelativitätstheoretische G.m.b.H.* **Berliner Tageblatt** (August

27, 1920, Morgenausgabe), pp. 1-2; reprinted in Michel Janssen, Robert Schulmann, JÜzsef Illy, Christoph Lehner, Diana Kormos Buchwald, Daniel Kennefick, A.J. Kox, and David Rowe, ed., *The Collected Papers of Albert Einstein.* Vol. **7**. The Berlin Years: Writings, 1918-1921 (Princeton: Princeton University Press, 2002), pp. 345-347, quote on p. 345; translated by Alfred Engel (Princeton: Princeton University Press, 2002), pp. 197-199,

[42] Einstein, A. 1917. Kosmologische Betrachtungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1917, pp. 142-152 *In der Sitzung am 8. Februar 1917 führte Einstein hier seine λ Konstante ein. Zunächst modifiziert er die Poissongleichung, dann seine eigene Feldgleichung*

[43] Einstein, A. 1918: Kritisches zu einer von Herrn de Sitter gegebenen Lösung der Gravitationsgleichungen, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1918, pp. 270-272

[44] Einstein, A. 1918: Bemerkung zu Herrn Schrödingers Notiz "‘ Über ein Lösungssystem der allgemein kovarianten Gravitationsgleichungen"’, Physikalische Zeitschrift **19**, 165-166 (1918). The English translation appears in **The Collected Papers of Albert Einstein**, Volume **7**: The Berlin Years: Writings, 1918-1921, ed. M. Jansen et al, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (2002), document 3.

[45] Einstein, A. 1922: *Bemerkung zu der Franz Seletyschen Arbeit : „Beiträge zum kosmologischen System“*; Annalen der Physik **68**. S. 281. 1922

[46] Einstein, A. 1922: *Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedmann „Über die Krümmung des Raumes“*, Zeitschrift fur Physik **11**, 326

[47] Einstein, A. 1923: Notiz zu der Arbeit von A. Friedmann „Über die Krümmung des Raumes“, Zeitschrift fur Physik **16**, 228

[48] Einstein, A. 1931. Zum Kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitaetstheorie. Sitzungsberichte der Preußischen Akadamie der Wissenschaften vom 16. April 1931. *Einstein rechnet hier mit einer Hubblekonstanten von 500/km/s/Mpc, wobei er sich in der Umrechnung von Mpc in cm um eine Zehnerpotenz verrechnet.*

[49] Einstein, A. und W. de Sitter 1932. The Relation between the expansion and the mean density of the universe. Proceedings of the National Academy of Sciences **18**, (1932), 3, pp. 213-214

[50] Einstein, A & Ernst G. Straus (1945,1946): *The Influence of the Expansion of Space on the Gravitation Fields Surrounding the Individual Stars.* Reviews of Modern Physics **17**, Nr. 2-3, 1. April 1945, S. 120-124, und *Corrections and Additional Remarks to our Paper.* Reviews of Modern Physics **18**, Nr. 1, Januar 1946, S. 148-149 *Die erste Arbeit wies gewisse technische Mängel auf und wurde durch ein Supplement verbessert. Hier erwähnt* Einstein *auch, dass er von den Arbeiten* McVittie *und* Järnefelt *keine Kenntnis hatte.*

[51] Epstein, P. *Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen I, II*, Math. Ann., **56/63** (1903/1907) pp. 615 – 644; 205 – 216

[52] Ewald, P.P. (1921) *Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale.* Ann. Phys. Leipzig **64**, 253-287. Institut für theoretische Physik München.

[53] Faber, S. M.& Gallagher, J. S. *Masses and mass-to-light ratios of galaxies.* Annual review of astronomy and astrophysics **17**. 1979, p. 135-187 *Ein früher Artikel über das „missing mass" problem in der Dynamik von Galaxien und Galaxienhaufen. Es wird nicht von der „Entdeckung" dunkler Materie gesprochen.*

[54] Farnes, J.S. (2018): A unifying theory of dark energy and dark matter: Negative masses and matter creation within a modified ?CDM framework. Astronomy & Astrophysics, **620**, id.A92, 20 pp. (2018). Ende 2018 entstand weltweit ein riesiger Medienrummel (Medien-Hype), leider auch unterstützt von der Oxford University, dass das Problem der dunklen Materie und der Dunklen Energie durch die Einführung von zusätzlichen negativen Massen (dark fluid) mit zusätzlicher kontinuierlicher Materie-Erzeugung im Universum sehr einfach gelöst werden könne. Ursache sei einfach ein Vorzeichenfehler. Sofort tauchten aber Gegenstimmen auf, welche die Unmöglichkeit von negativen Massen (träger Masse,schwerer Masse, gravitativer Masse) im Rahmen der Einsteinschen Theorie darlegten. Zudem zeigte sich im Laufe des Jahres 2019 ein schwerer Fehler im Simulationsprogramm und die Tatsache, dass sich im Rahmen dieser gewagten These und ihrer korrigierten Simulation die Halos um Galaxien nicht in der beobachten postulierten Form (dunkle Materie)

bilden können. Ein öffentlicher Widerruf dieser fehlerhaft falschen Hypothese hat aber nie stattgefunden!

[55] Feynman, R.P. (1995) Feynman Lectures on Gravitation. Addison Wesley, pp. 23-28 *Feynman überlegte um 1965, ob im Sinne der „Le Sage" Gravitation (die zur Erklärung der Newton'schen Gravitation wegen der Reibung versagt) in einer Quantenfeldtheorie der Gravitation das Neutrino oder ein ähnliches Teilchen die Rolle des vermittelndes Teilchens dieser Quantenfeldtheorie übernehmen könnte. Das Ergebnis war ebenfalls negativ.*

[56] Flasch, Kurt 2011: *Was ist Gott? Das Buch der 24 Philosophen.* Lateinisch-Deutsch, erstmals übersetzt und kommentiert von Kurt Flasch. Beck, München 2011

[57] Fournier d'Albe, E.E. 1907. Two New Worlds. London: Longmans, Green & Co. *Edmund Edward Fournier (1868-1933) war französisch - irischer Abstammung und Naturphilosoph sowie keltischer Gelehrte, der erste Überlegungen zu einer „fraktalen hierarchischen" Struktur in der Natur und auch die „Mehrweltenhypothese" in einem unendlichen Universum erörterte (I. The Infra World II. The Supra World). Außerdem war er Linguist und sprach Manx - Gälisch. Einige seiner Gedanken über mögliche Realitäten im Mikrokosmos sind aus heutiger Sicht wohl nicht mehr tragbar. Berühmt blieb sein Gedankenspiel: "If, at midnight tonight, all things, including ourselves and our measuring instruments, were reduced in size 1000 times, we should be left quite unaware of any such change". Ähnliche Überlegungen hatte schon fünfzig Jahre früher Felix Eberty (1812-1884) - Gedanken über Raum, Zeit und Ewigkeit - angestellt.*

[58] Freundlich, E. 1915: *Über die Erklärung der Anomalien im Planetensystem durch die Gravitationswirkung interplanetarer Massen.* AN **201**, Nr. 4803, pp. 49-56, 1915 Freundlich erklärt die Hypothese von Seeliger bezüglich „dunkler Staubteilchen" (Zodiakallicht) zur Erklärung dynamischer Anomalien im Sonnensystem für sehr unwahrscheinlich

[59] Friedmann, A.A. (1922). *Über die Krümmung des Raumes.* Zeitschrift Physik **10**, 377-386. *Alexander Alexandrovitch Friedmann (1888-1925) lebte in Sankt Petersburg und war Mathematiker, Geophysiker und*

Meteorologe. Er entdeckte die isotropen Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen für einen expandierenden Kosmos. Einer seiner Studenten war George Gamow.

[60] Friedmann, A.A. (1924). *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes.* Zeitschrift Physik **21**, 326-332.

[61] Friedmann, A.A.: *Die Welt als Raum und Zeit.* Original auf Russisch 1923. Ins Deutsche übersetzt von Georg Singer. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Band **287**. 4. Auflage 2014, 240 Seiten ISBN 9783808557730

[62] Gamow, G. A. 1970: *My Wordline. An Informal Autobiography.*. Foreword by Stanislaw M. Ulam. Viking Press, New York 1970. Ursprünglich „Fragments of Memory“ genannt, endet diese unvollendet gebliebene Lebensbeschreibung mit dem Erreichen der USA 1934...

[63] G. Gentile, B. Famaey, H. Zhao & P. Salucci 2009. *Universality of galactic surface densities within one dark halo scale-length*: Nature **461**, 627-628

[64] Genzel, R. & et.al. (2017): *Strongly baryon-dominated disk galaxies at the peak of galaxy formation ten billion years ago.* Nature **543**, pp. 397-401, (16 March 2017), doi:10.1038/nature21685 *Starker Hinweis darauf, dass die heutigen flachen Rotationskurven von Galaxien entwicklungsbedingt sind und im frühen Universum normal abfallend waren. Für das naive DM-Modell (dark matter halo um frühe Galaxienkerne) ein kritischer Tatbestand.*

[65] Gerber, P.: *Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation.* Annalen der Physik. **52**, 1902/1917, S. 415-444. (Ursprünglich erschienen in *Programmabhandlung des städtischen Realgymnasiums zu Stargard i. Pommern*, 1902) [wikisource.de]

[66] Glasser, M.L. and I. J. Zucker 1980. *Lattice sums, Theoretical Chemistry: Advances and Perspectives*, v. 5, ed. D. Henderson, Academic Press, 1980.

[67] Gödel,K. 1949, *An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation*, Reviews of Modern Physics **21**, 447-450 (Lösung vom **Bianchi Typ VIII**).

[68] Gödel, K. 1952. *Rotating Universes in General Relativity Theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 1, 175-181, Amer. Math. Soc., R.I., 1952 (Lösungen vom **Bianchi Typ IX**).

[69] Hagihara, Y. 1931: *Theory of the relativistic trajectories in a gravitational field of Schwarzschild*, Japan J. Astronomy Geophysics **8**, 67 - 176, (1931)

[70] Halley, E. (1720): *(a) Of the Infinity of the Sphere of Fixed stars.*, *(b) Of the Number, Order, and Light of the Fixed Stars*, Phil. Trans. roy. Soc. (london) **31**, 22-26 , (1720)

[71] Harvey, Alex 2012: How Einstein Discovered Dark Energy. arXiv:1211.6338 [physics.hist-ph] (2012)

[72] Hausdorff, Felix 1898: *Das Chaos in kosmischer Auslese.* Ein Erkenntniskritischer Versuch von Paul Mongré. Leipzig Druck und Verlag von C.G. Naumann , 1898

[73] Heckmann, O. 1931. *Über die Metrik des sich ausdehnenden Universums.* Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1931, Mathematisch-Physikalische Klasse, Seite 126, Göttingen

[74] Heckmann, O. 1932. *Die Ausdehnung der Welt in ihrer Abhängigkeit von der Zeit.* Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1932, Mathematisch-Physikalische Klasse, Seite 97 - 101, Göttingen

[75] Heckmann, O. *Theorien der Kosmologie.* 1942. Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg. Berichtigter Nachdruck 1968. *Ein Klassiker der theoretischen Kosmologie in den 1940er und 1950er Jahren. In diesem Buch in deutscher Sprache spürt man die „Alte Göttinger Schule“ und die unglaubliche Literaturkenntnis von Otto Heckmann. Das Buch hat drei Teile: A) Dynamische Kosmologie (Newton-Gleichungen), B) Metrische Kosmologie (Einstein-Gleichungen), C) Kinematische Kosmologie (Milne-Modell)*

[76] Heckmann, O. & E. A. Schücking 1955. *Bemerkungen zur Newtonschen Kosmologie I.* Z. f. Astrophysik **38**, 95 - 109

[77] Heckmann, O. & E. A. Schücking 1956. *Bemerkungen zur Newtonschen Kosmologie II.* Z.f.Astrophysik **40**, 81 - 92

[78] Hirata, C.M. & U. Seljak 2005. Can superhorizon cosmological perturbations explain the acceleration of the universe? Physical Review D, vol. **72**, Issue 8, arXiv:astro-ph/0503582

[79] Horndeski, G.W. 1974: *Second-Order Scalar-Tensor Field Equations in a Fourdimensial Space.* Inter. J. of Theoretical Physics **10**, 363-384, (1974) Der US-amerikanische GEORGY HORNDESKI (1948-) interessierte sich schon früh für die Relativitätstheorie und Gravitationstheorien, verlor aber Anfang der 1980er Jahre sein Interesse an aktuellen Problemen und wandte sich intensiv der Malerei zu. Erst ab 2010 publiziert er auch wieder über Kosmologie

[80] Hoyle, F.: *A new model for the expanding universe.* MNRAS **108**, 372-382, (1948)

[81] Hoyle, F., G. Burbidge & J.V. Narlikar 1997: *On the Hubble constant and the cosmological constant*, MNRAS **286**, 173-182, (1997)

[82] Hubble, E. P. 1929: *A relation between distance and radial velocity among extra – galactic nebulae.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **15**, Issue 3, 168 - 173. Die klassische Arbeit über die „Hubble - Konstante", die Edwin Hubble mit „K" notierte. Sein damaliger Wert von etwa 500 km/Mpc/s war fast 10 - mal größer als der heute akzeptierte Wert. An eine „Expansion" des Universums im heutigen Sinne hat E. Hubble nie geglaubt!

[83] Hubble, E. & M.L. Humason (1931) : *The velocity-distance relation among extra-galactic nebulae.* Ap.J. **74**, 43

[84] Irvine, W.M. (1961). *Local Irregularities in a Universe Satisfying the Cosmological Principle.* Havard University thesis.

[85] Jung, Tobias. *Franz Selety (1893 -1923?): Seine kosmologischen Arbeiten und der Briefwechsel mit Einstein.* In Einsteins Kosmos. Editors H. W. Duerbeck and W. R. Dick, 125 - 142. Frankfurt am Main: Harri Deutsch, 2005 *Franz Selety promovierte 1915 in Wien im Fach Philosophie und stand von 1917 - 1923 mit A. Einstein im Briefwechsel. Er favorisierte eine fraktale Newtonsche Kosmologie, um gewisse Paradoxien im Gravitationspotential und den Geschwindigkeiten*

in einem gleichförmigen unendlichen Raum zu vermeiden. Während einer Bergtour im Salzburger Land im Jahre 1923 verlieren sich seine weiteren Lebensspuren.

[86] Jaffe, R.L. (2005): Casimir effect and the quantum vacuum. Physical Review D. **72**, Nr. 2, 2005, S. 021301.

[87] Järnefelt, G. (1940): *Zum Einkörperproblem in dem sich ausdehnenden Raume.* Ann. Acad. Sci. Fenn **A55** (3): 21

[88] Järnefelt, G. (1942): *Das Einkörperproblem in dem sich ausdehnenden Raume der Einstein - de Sitterschen Welt.* Ann. Acad. Sci. Fenn **A1** (12): 38

[89] P. Jordan (1947) : *Erweiterung der projektiven Relativitätstheorie* Annalen der Physik **1**, 219, Leipzig, (1947)

[90] Kahl, Joachim. (2011) *Weltlicher Humanismus: Eine Philosophie für unsere Zeit.* LIT Verlag Berlin Münster Wien Zürich London; 5. Auflage (25. Oktober 2011)

[91] Kaluza, T. (1921): *Zum Unitätsproblem der Physik.* Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss. Phys - Math. Klasse **1**, 966. gelesen durch EINSTEIN. *Empfehlenswert ist die Biographie von DANIELA WUENSCH: Der Erfinder der fünften Dimension Theodor Kaluza - Leben und Werk.*

[92] Kellerhals, Ruth: *Volumina von hyperbolischen Raumformen.* MPI 95-110. Max Planck Institut für Mathematik in Bonn, Habilitationsschrift. Entstanden wohl auch aus einem Seminar von F. HIRZEBRUCH(1927-2012): *Geometrie und Topologie* aus den 1990er Jahren.

[93] Kennefick, D. 2009: *Testing relativity from the 1919 eclipse - a question of bias.* Physics Today, March 2009, p. 37

[94] Kolb, E.W., Matarrese, S., Notari, A. & A. Riotto (2005). Primordial Inflation explains why the universe is accelerating today. FERMILAB-PUB-05-024-A. hep-th/0503117v1

[95] Knop, R. A. et al.(+ 47 weitere Autoren). *New constraints on* Ω_m, Ω_Λ *and w from an independent set of 11 High-redshift supernovae observed with the Hubble Space Telescope.* ApJ **598**, 102-137, (2003)

[96] Korzynski, M. 2014: Nonlinear effects of general relativity from multiscale structure. General Relativity and Quantum Cosmology 2015

[97] Kragh, H.S. 2004: *Matter and Spirit in the Universe. Scientific and Religious Preludes to Modern Cosmology.* History of Modern Physical Sciences Vol. **3**. Imperial College Press. 57 Shelton Street. Covent Garden London WC2H 9HE (2004)

[98] Kragh, H.S. 2007: *Conceptions of Cosmos. From Myths to the Accelerating Universe: A History of Cosmology.* Oxford University Press, Great Clarendon Street, Oxford OX2 6DP (2007)

[99] Kragh, H.S. 2014: *Masters of the Universe.* Conversations with Cosmologists of the Past. Oxford University Press, Great Clarendon Street, Oxford OX2 6DP (2014) Das Buch beruht auf der Entdeckung von Manuskripten im Nachlass eines gewissen Carl Christian Nielsen (1887-1971), der von 1913-1965 als vermögender Chemie-Ingenieur zahlreiche Interviews mit bedeutenden Wissenschaftlern der Kosmologie in Europa und USA durchgeführt hatte.

[100] Kragh, H.S. & J.M. Overduin 2014: *The Weight of the Vacuum* A Scientific History of Dark Energy. Springer Verlag Heidelberg New York Dordrecht London. DOI 10.1007/978-3-642-55090-4 (2014)

[101] Kundt, W. & O. Marggraf (2014) *Physikalische Mythen auf dem Prüfstand - Eine Sammlung begründeter Alternativtheorien von Geophysik über Kosmologie bis Teilchenphysik.* Springer Spektrum. Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2014.

[102] Laplace, P.S. de 1799: *Beweis des Satzes, daß die anziehende Kraft bei einem Weltkörper so groß sein könne, daß das Licht davon nicht ausströmen kann.*(Übersetzer F. von Zach). Allgemeine Geographische Ephemeriden Band **4**, Seite 1-6, Weimar 1799

[103] Laplace, P.S. Marquis de 1839: *Mécanique Céleste.* Volume **I-IV**, translated, with a commentary by Nathaniel Bowditch LL. D., Boston 1839 In Band 4, Book X, Seite 642, untersucht Laplace den Effekt einer „Gravitations-Aberration“ aufgrund einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit

der Gravitation. Die theoretisch gefolgerte säkulare Instabilität von Planetenbahnen wird aber nicht beobachtet, so dass im Prinzip nach Laplace eine instantane Übertragung der Gravitationskräfte erfolgen muss.

[104] Layzer, D. 1954. *On the Significance of Newtonian Cosmology.* Astronomical Journal **59**, No. 1219, pp. 268-270

[105] Layzer, D. 1963. A Preface to Cosmogony I. The energy equation and the virial theorem for cosmic distributions. ApJ **138**, pp. 174 - 184 *In dieser Arbeit wird die „Layzer - Irvine Energiegleichung" zum erstenmal veröffentlicht.*

[106] Layzer, D. 1966. On the Significance of the Cosmological Energy Equation. ApJ. **145**, p.349-350

[107] Layzer, D. 1975. The Arrow of Time. Scientific American **233**, No. 6, 1975, S. 56 – 69

[108] Layzer, D. 1986. *Das Universum. Aufbau, Entdeckungen, Theorien.* Heidelberg, Spektrum Verlag 1986, 250 S.Ein ausgezeichneter Überblick, der insbesondere auch durch fundierte wissenschaftshistorische Betrachtungen brilliert

[109] Layzer, D. 1991. **Cosmogenesis: The Growth of Order in the Universe**. First published 1990 by Oxford University Press, Inc., 200 Madison Avenue, New York, Toronto. Zur Zeit wohl das beste Buch über kosmische Evolution. Layzer (1925-2019) diskutiert in seinem Buch so unterschiedliche Gebiete wie Quantenphysik, Kosmologie, Biologie und Wissenschafts - Philosophie (Zufall, Notwendigkeit, kosmische Expansion und freier Wille). Layzer vertritt die Theorie, daß im Universum sowohl die Entropie als auch die Ordnung zunimmt, weil die lokale Strukturbildung hinter der kosmischen Raumexpansion zurückbleibt. Eine ausführliche Diskussion findet man bei [www.informationphilosopher.com]. Der Evolutionsbiologe Ernst Mayr (1904-2005) sagte über dieses Buch: „A successfull tour de force ... What Layzer says about consciousness, the mind, and freedom reveals remarkable common sense. A book from which I have learned a great deal and which I will pick up again and again."

[110] Lemaître, G. 1925: *Note on De Sitter's Universe.* Journal of Mathematics and Physics **4**, 37-41, 1925

[111] Lemaître, G. 1927: *Un univers homogene de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nebuleuses extragalactiques*, Ann. Soc. Scient. Brux. **47A**, 49-59 , (1927)

[112] Lemaître, G. 1932: *A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra – galactic nebulae.* MNRAS **91**, 483-490. [Etwas gekürzte englische Übersetzung des französischen Originalartikels von 1927, der 2 Jahre vor dem Artikel von Edwin Hubble ([82]) erschien.]

[113] Lemaître, G. 1934: *Evolution in the expanding universe.* Proc. Natl. Acad. Sci. **20**, 12-17, (1934a)

[114] Lemaître, G. 1934: *Evolution in the expanding universe.* Nature **133**, 654 (1934) In dieser Arbeit wird gesagt, dass die kosmologische Konstante „may be regarded as equivalent to a density, of negative sign, and .... accompanied with a positive pressure.

[115] Lemaître, G. (1946). *L'Hypothese de l'atome primitif et le probleme des amas de Galaxies.* Essai de Cosmogonie. Wiederabdruck durch Editions Culture et Civilisation. 115 Avenue Gabriel Lebon, Bruxelles, 1972 In dieser Arbeit diskutiert Lemaître alle Aspekte der „Friedmann" Kosmologie und leitet die Gleichungen auch auf Newton'scher Grundlage ab. Daher könnte man ihn mit Vorsicht „Vater" des Urknallmodelles nennen, während E. Hubble, nach dem der „Hubble - Parameter" benannt ist, zeit seines Lebens nicht wirklich an die Expansion des Raumes geglaubt hat.

[116] Lemaître, G. (1964) : VRT video interview. Satya Gontcho A Gontcho, Jean-Baptiste Kikwaya Eluo, Paul Gabor: Resurfaced 1964 VRT video interview of Georges Lemaître. (Falsch eingeordnet in einem Archiv 2022 wiederentdeckt)

[117] Liebscher, D.E., Priester, W. & J. Hoell (1992). Lymanα forests and the evolution of the universe. AN **313**, Nr. 5, 265-273

[118] Lovelock, D. (1971): *The Einstein Tensor and Its Generalizations.* Journal of Mathematical Physics. **12** (3): 498–501. Bibcode:1971JMP....12..498L. doi:10.1063/1.1665613.

[119] Luminet, L. et al.(2003): Dodecahedral Space Topology as an Explanation for Weak Wide-Angle Temperature Correlations in the Cosmic Background Radiation. Nature **425**, 593 – 595.

[120] Mach, Ernst 1897: *Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Historisch - kritisch dargestellt.* Dritte verbesserte Auflage. Leipzig F.A. Brockhaus 1897

[121] Mattig, W. 1958: *Über den Zusammenhang zwischen Rotverschiebung und scheinbarer Helligkeit.* Astronomische Nachrichten **284**, 109-111, (1958).

[122] McVittie, G.C. 1933: *The mass-particle in an expanding universe.* MNRAS **93**, 325-339

[123] McVittie, G.C. 1962: *Appendix to The Change of Redshift and Apparent Luminosity of Galaxies due to the Deceleration of Selected Expanding Universes.* ApJ **136**, p.334 (1962)

[124] Milne, E. A., 1929, The Aims of Mathematical Physics, Oxford: Oxford University Press.

[125] Milne, E. A., 1933, *World-structure and the Expansion of the Universe*, Z. f. Astrophysik **6**, 1-35.

[126] Milne, E. A., 1934, *Some Points in the Philosophy of Physics: Time, Evolution and Creation*, Philos. **9**, 19-38.

[127] Milne, E. A., 1934, *World-models and the World-picture*, Observatory, **57**, 24-27.

[128] Milne, E.A. 1934. *A Newtonian expanding universe.* Quart. J. Math. **5**, 64-72 (1934) Mit McCrea, W.H. : *Newtonian universes and the curvature of space* Quart. J. Math. **5**, 73-80 (1934)

[129] Milne, E. A. 1935, Relativity Gravitation and World-Structure. Oxford: Clarendon Press.

[130] Milne, E. A., 1937, *Kinematics, Dynamics, and the Scale of Time*, Proc.Roy.Soc.(Lond.) **A 158**, 324-329.

[131] Milne, E. A., 1943, *The Fundamental Concepts of Natural Philosophy*, ProcRoySoc(Edin) **63**, 10-24.

[132] Mithani A. & A. Vilenkin (2012): Did the universe have a beginning?. 2012

[133] Misner, C.W. Thorne, K.S. & J.A. Wheeler 1973: *Gravitation*. W.H. Freeman and Company. San Francisco, pp. 1301, ISBN 0-7167-0344-3 (1973)

[134] Moore, Walter, 1994: *A Life of Erwin Schrödinger*. Cambridge University Press, 1994. Deutsche Ausgabe WBG (Wissenschaftliche Buchgesellschaft), Darmstadt, 2012, 2. Auflage 2015, eBook (pdf, epub).

[135] Moszkowski, Alexander, 1922: Einstein: Einblicke in seine Gedankenwelt. F. Fontane & Co., Berlin 1922

[136] Mitton, Simon A.: *George Lemaître and the foundations of Big Bang cosmology*. The Antiquarian Astronomer **14** (June 2020), 2-20

[137] Olbers, W. (1826): *Über die Durchsichtigkeit des Weltraumes*. Astronomisches Jahrbuch 1826, 110-121 (1825). Wiederabgedruckt in *Wilhelm Olbers: Sein Leben und seine Werke*. C. Schilling, Ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1894), Band I, pp. 133-141.

[138] Roland Müller & Alfred Stöckli: *Fritz Zwicky*, Leben und Werk des grossen Astrophysikers, Raketenforschers und Morphologen, Verlag Baeschlin, Glarus, 1986. Die Arbeitsfelder von Zwicky hießen Kosmos, Raketenentwicklung, Weltraumfahrt, Umwelt, Mensch und allgemeine Morphologie. Über Zwicky existieren zahlreiche Annektoten. a) In den Gängen des Physikgebäudes am Caltech pflegte Zwicky Studenten, deren Gesicht er nicht kannte, mit den Worten: „Wer zum Teufel sind Sie?“ zu begrüßen. Manch junger Student wurde auf diese Weise „traumatisiert“. b) Kollegen am Mount Wilson Observatorium nannte Zwicky „Sphärische Bastarde“. Weshalb sphärisch? „Weil sie Bastarde seien, von welcher Seite man sie auch anschaue.“ c) Zwicky war bekannt dafür, während Vorträgen aufzustehen, um dem Referenten mitzuteilen, dass das behandelte Problem schon lange vorher, nämlich von „Fritz Zwicky“, gelöst worden sei. Zwicky hat sich auch sein Leben lang kritisch mit Religionen auseinandergesetzt. Ein Tagebucheintrag von 1971 lautet: „Die Unerklärlichkeit und das ungeheure Wunder der Welt, wie sie existiert, auf ein anderes Wunder

„Gott“ zurückzuschieben, ist unnötig und für keinen wirklichen Denker akzeptabel“..

[139] Overduin, J., Priester, W., 2001: Problems of Modern Cosmology: How dominant is the vacuum? Naturwissenschaften **88**, 229-248

[140] Overduin, J., Blome, H.J. und J. Hoell. 2006. Wolfgang Priester: From the big bounce to the Λ-dominated universe. Wolfgang Priester (1924-2005) war Direktor des Instituts für Astrophysik und Extraterrestrische Forschung der Universität Bonn.

[141] Overduin, J.M. & P.S. Wesson 1997: Kaluza-Klein Gravity, Phys. Rep. **283**, 303-378 (1997)

[142] Padmanabhan, T. 1993. *Structure Formation in the Universe.* Cambridge University Press 1993

[143] Pauli, W. 1920. *Relativitätstheorie.* Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Neu herausgegeben von D. Giulini, Heidelberg 2000. *Erste bemerkenswerte mathematische Zusammenfassung der allgemeinen Relativitätstheorie, geschrieben von dem noch sehr jungen Wolfgang Pauli*

[144] Peacock, J. A. 2001, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press. Kurios an diesem Buch ist die Tatsache, dass die Layzer-Irvine Gleichung mit keinem Wort erwähnt geschweige diskutiert wird.

[145] Peebles, P.J.E. & Bharat Ratra 1988: *Cosmology with a time-variable Cosmological „Constant“*. Astropys.J. **325**, L17-L20, 1988

[146] Peebles, P.J.E. 1993, *Principles of Physical Cosmology.* Princeton University Press 1993 Ein ausführliches Lehrbuch der Kosmologie einschließlich der Layzer - Irvine Gleichungen, aber noch ohne Diskussion von Wechselwirkungen zwischen Strukturbildung und kosmischen Expansionsraten.

[147] Peebles, P.J.E. & B. Ratra. (2003): The Cosmological Constant and Dark Energy. Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003) astro-ph/0207347.

[148] Peebles, P.J.E. (2010): Phenomenology of the Invisible Universe. AIP Conf.Proc. **1241**, 175 (2010)

[149] Perlmutter, S.; Aldering, G.; Boyle, B. J.; Castro, P. G.; Couch, W. J.; Deustua, S.; Fabbro, S.; Ellis, R. S.; Filippenko, A. V.; Fruchter, A.; Goldhaber, G.; Goobar, A.; Groom, D. E.; Hook, I. M.; Irwin, M.; Kim, A. G.; Kim, M. Y.; Knop, R. A.; Lee, J. C.; Matheson, T.; McMahon, R. G.; Newberg, H. J. M.; Lidman, C.; Nugent, P.; Nunes, N. J.; Pain, R.; Panagia, N.; Pennypacker, C. R.; Quimby, R.; Ruiz-Lapuente, P.; Schaefer, B.; Walton, N.; The Supernova Cosmology Project 1998. *Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae*. 19th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics and Cosmology, held in Paris, France, Dec. 14-18, 1998.

[150] Plana, G.A.A. 1820. Sur une nouvelle expression analytique des nombres bernoulliens, propre a exprimer en termes finis la formule generale pour la sommation des suites. Mem.Ac.Sc. Torino,(1), Vol. XXV, 403-418 Baron Giovanni Antonio Amedeo Plana (1781 - 1864) war ein bedeutender italienischer Astronom und Mathematiker (Neue Mondtheorie). Er war Neffe des berühmten Mathematikers Joseph-Louis Lagrange und wirkte lange als Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte zu Turin. Später zum Senator ernannt.

[151] Priester, W.: *Urknall und Evolution des Kosmos - Fortschritte in der Kosmologie*. Vorträge Nordrhein-Westfälische Akademie der Wissenschaften. Natur-Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften; N 333. Sitzung 2. November 1983 in Düsseldorf.

[152] Priester, W., und H.J. Blome: *The problem of the primeval explosion - „Big Bang“ or „Big Bounce“?*. Sterne und Weltraum (ISSN 0039-1263), **26**, March 1987, p. 140-144.

[153] Priester, W., Hoell, J., Liebscher, D.E., van de Bruck, C.: *Friedmann- Lemaître model derived from the Lyman alpha forest in quasar spectra*. Proc. third A. Friedmann Seminar, pp. 52-67, St. Petersburg, 1996

[154] Priester, W.: *Über den Ursprung des Universums: Das Problem der Singularität*. Vorträge Nordrhein-Westfälische Akademie der Wissenschaften. Natur-Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften; N 414. 371. Sitzung am 5. Dezember 1990 in Düsseldorf. ©1995 by Springer Fachmedien Wiesbaden.

[155] Sarkar, S., Nielsen, J.T. & A. Guffanti 2016: Marginal evidence for cosmic acceleration from Type Ia supernovae. Scientific Reports, Volume **6**, id. 35596 (2016).

[156] Sarkar, S., Colin, J. & M. Rameez 2019: . Astronomy & Astrophysics, Volume **631**, id.L13, 6 pp.

[157] Straumann, Norbert 2002. The history of the cosmological constant problem. Invited talk at the XVIII IAP Colloquium : Observational and theoretical contributions of vacuum energies in quantum field theory.

[158] Räsänen, Syksy 2006. Accelerated Expansion from structure formation. CERN-PH-TH/2006-148. Interessante Idee, die „scheinbar" beschleunigte Expansion auf Strukturbildung zurückzuführen. Doch eine konkrete Aussage oder Prognose zum effektiven w-Parameter auf Grundlage von Buchert's Gleichungen wird nicht gemacht.

[159] Ratra, P. & P. J. E. Peebles 1988: *Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field.* Physical Review D (Particles and Fields), Volume **37**, Issue 12, 15 June 1988, pp. 3406-3427

[160] Rebhan, H.: *„Soft bang" instead of „big bang" : a model of an inflationary universe without singularities and with eternal physical past time.* Astron.Astrophys. **353**, 1-9, (2000)

[161] Regener, E. : *Der Energiefluss kosmischer Strahlen.* Zeitschrift für Physik **80**, pp. 666-669, (1933). Erste Arbeit zur Abschätzung einer „Planck-Mikrowellenstrahlung" (2.8 Kelvin!) im frühen Kosmos aus dem heutigen Strahlungsfluss kosmischer Strahlung („Ultrastrahlung") und den Photonen-Strahlungsflüssen der hellsten Sterne. .

[162] Riemann, Bernhard 1854: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Abh. Kgl. Ges. Wiss., Göttingen **13**, pp. 133-150, 1868

[163] Riess, Adam G.; Filippenko, Alexei V.; Challis, Peter; Clocchiatti, Alejandro; Diercks, Alan; Garnavich, Peter M.; Gilliland, Ron L.; Hogan, Craig J.; Jha, Saurabh; Kirshner, Robert P.; Leibundgut, B.; Phillips, M. M.; Reiss, David; Schmidt, Brian P.; Schommer, Robert A.; Smith, R. Chris; Spyromilio, J.; Stubbs, Christopher;

Suntzeff, Nicholas B.; Tonry, John 1998: *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, Astron. J. **116** (1998), 1009 – 1038.

[164] Riess, A.G. et al.,: *New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at z > 1 : Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy*, ApJ. **659** (2007), 98 – 121, astro-ph/0611572.

[165] Adam G. Riess, A.G. et al. : A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant (2016)

[166] Riess, A.G.: The Expansion of the Universe, Faster Than We Thought. Lecture at 69th Lindau Nobel Laureate Meeting (2019)

[167] G. Risaliti & E. Lusso 2019. Cosmological constraints from the Hubble diagram of quasars at high redshifts. Nature Astronomy, Letters, Advances Online Publication (2019).

[168] Lusso, E., Piedipalumbo, E., Risaliti, G., Paolillo, M., Bisogni, S., Nardini, E. and L. Amati: *Tension with the flat LCDM model from a high-redshift Hubble diagram of supernovae, quasars, and gamma-ray bursts*, Astronomy & Astrophysics **628**, L4 (2019) https://doi.org/10.1051/0004-6361/201936223

[169] Röhle, S. 2000. Mathematische Probleme in der Einstein – de Sitter Kontroverse Preprint.

[170] Röhle, S. 2007. Willem de Sitter in Leiden. Ein Kapitel in der Rezeptionsgeschichte der Relativitätstheorie. Dissertation Universität Mainz.

[171] Sagan, C. *The Demon-Haunted World. Science as a Candle in the Dark.* Random House, New York 1996. Deutsche Übersetzung: *Der Drache in meiner Garage.* Droemer Knaur 1997. *Ein ausgezeichnetes Buch über kritische Wissenschaft, Spekulationen, Fakten und „Dunkle Dämonen". Ein beindruckendes Vermächtnis von Carl Sagan. Der Evolutionsbiologe R. Dawkins sagte über das Buch: „As I close this eloquent and fascinating book, I recall the final chapter title of one of Carl Sagan's earlier works, COSMOS. "Who Speaks for Earth?" is a rhetorical question, but I presume to answer this. My candidate for planetary ambassador can be none other than Carl Sagan himself.*

He is wise, humane, witty, well read, and incapable of composing a dull sentence.....“

[172] Sandage, A. 1962: *The Change of Redshift and Apparent Luminosity of Galaxies due to the Deceleration of Selected Expanding Universes.* ApJ **136**, p.139 (1962)

[173] Sanders, R.H. 2014: *The Dark Matter Problem: A Historical Perspective* Cambridge University Press, the Edingburgh Building, Cambridge CB2 8RU, published 2010/2014. Der niederländische Radioastronom Robert Sanders schildert hier die wechselvolle Geschichte des "Dark Matter Problem". Es werden hier im Gegensatz zu den wissenschaftlichen Tagesnachrichten - in denen immer von „direkten Beobachtungen“ der Dunklen Materie die Rede ist - auch die schwerwiegenden Ungereimtheiten dieses völlig hypothetischen Konzeptes aufgezeigt.

[174] Schmidt, Brian P.; Suntzeff, Nicholas B.; Phillips, M. M.; Schommer, Robert A.; Clocchiatti, Alejandro; Kirshner, Robert P.; Garnavich, Peter; Challis, Peter; Leibundgut, B.; Spyromilio, J.; Riess, Adam G.; Filippenko, Alexei V.; Hamuy, Mario; Smith, R. Chris; Hogan, Craig; Stubbs, Christopher; Diercks, Alan; Reiss, David; Gilliland, Ron; Tonry, John; Maza, JosÜ; Dressler, A.; Walsh, J.; Ciardullo, R. 1998: *The High-Z Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type IA Supernovae.* ApJ, **507**, Issue **1**, pp. 46-63. *Der Astrophysiker Wolfgang Priester in Bonn hatte schon Ende der 1980er Jahre immer wieder betont, daß die Größe Λ in der Kosmologie nicht Null gesetzt werden darf. Der im obigen Projekt beteiligte Astroteilchen - Physiker Craig Hogan hatte noch in einem Erice-Symposium auf Sizilien 1994 zu Priester gesagt: „Your Λ is outrageous (haarsträubend)! It does not exist - it is zero!“ . Vier Jahre später, im Jahre 1998, hatte sich das Blatt gewendet, und Λ musste jetzt größer Null angenommen werden. Craig Hogan schrieb im gleichen Jahr an Wolfgang Priester: „Well, there are still new things to learn.“ „Saulus became Paulus“, pflegte darauf immer Priester im Institut in Bonn zu sagen.*

[175] Schrödinger, E. 1918. *Über ein Lösungssystem der allgemein kovarianten Gravitationsgleichungen.* Physikalische Zeitschrift **19**, Seite 20-22

[176] Schrödinger, E. 1950. *Space Time Structure*. Cambridge at the University Press.

[177] Schrödinger, E. 1956. *Expanding Universes*. Cambridge at the University Press.

[178] Schuecker, P., R. R. Caldwell, H. Böhringer, C.A. Collins, L. Guzzo & N. N. Weinberg 2002: *Observational Constraints on General Relativistic Energy Conditions, Cosmic Matter Density and Dark Energy from X-Ray Clusters of Galaxies and Type-Ia Supernovae*. Astronomy and Astrophysics, **402**, pp. 53-63, (2003)

[179] Schüking, E.L. & E.J. Surowitz 2015: *Einstein's Apple - Homogeneous Einstein Fields*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. New York - London - Singapore - Beijing - Shanghai - Taipei - Chennai (2015).

[180] Schwarzschild, K. 1916: *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. Sitzungsberichte der Königlich-Preußischen Akademie der Wissenschaften, Sitzung vom 3. Februar 1916, Seite 189-196

[181] Sciama, D.W. 1953: On the origin of inertia. MNRAS **113**, 34 - 42

[182] Secrest, N., von Hausegger, S., Rameez, M., Mohayaee, R., & Subir Sarkar 2022:A Challenge to the Standard Cosmological Model. ApJ-Letters **937**, L31, 2022

[183] Seeliger, H., 1895. Über das Newton'sche Gravitationsgesetz. AN **137**, No. 3273, pp. 131-136 Seeliger diskutiert hier eine λ Konstante, welche die Gravitation mit der Entfernung exponentiell schwächen soll, um bestimmte Divergenzen im unendlichen Raum zu vermeiden. Aus der damals nicht erklärbaren zusätzlichen Periheldrehung des Merkurs von etwa 40 Bogensekunden pro Jahrhundert versuchte er diesen Parameter zu bestimmen.

[184] Seeliger,H. 1906: Das Zodiakallicht und die empirischen Glieder in der Bewegung der inneren Planeten. Münch. Akadem. Berichte, Bd. **36**, H.3, 1906 Ein Klassiker der „dunklen Materie" Hypothese, in der versucht wurde, die anomale Periheldrehung des Merkurs und andere kleine Anomalien auf gravitative Wirkung von Staubteilchen (Zodiakallicht)

zurückzuführen. Heutige wesentlich extremere Analogie: Rotationskurven von Galaxien mit einem riesigen „dark matter“ Halo.

[185] Seeliger, H. 1909: H. Seeliger, *Über die Anwendung der Naturgesetze auf das Universum.* Sitzungsberichte der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Math.-Phys. Klasse, Jahrg. 1909, **4**. Abhandlung Seite 1-25

[186] Seeliger, H. 1915: *Über die Anomalien in der Bewegung der inneren Planeten.* Astronomische Nachrichten, **201**, p.273

[187] Seeliger, H. 1917:Bemerkungen zu P. Gerbers Aufsatz: "'Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation"'. In: Annalen der Physik. **53**, 1917, S. 31-32.

[188] Selety,F. 1922: *Beiträge zum kosmologischen Problem.* Annalen der Physik **68**, 281-334 (1922)

[189] Selety,F. 1923: *Erwiderung auf die Bemerkungen Einsteins über meine Arbeit „Beiträge zum kosmologischen Problem“.* Annalen der Physik **72**, 58-66 (1923)

[190] Selety, F. 1924: *Unendlichkeit des Raumes und allgemeine Relativitätstheorie.* Annalen der Physik **73**, 291-325 (1924) *Siehe auch: Tobias Jung: Franz Selety (Franz Josef Jeiletes) (1893-1923). Seine kosmologischen Arbeiten und der Briefwechsel mit Einstein. Acta Historica Astronomiae, **27**, p. 125-141. Sein Vater Georg Selety schrieb 1918 das Buch: „Die Politik des Lebens“. Seit dem 22. August 1923, wo F. Selety von einem Gasthof alleine zu einer Bergtour im Salzburger Land aufbrach, wird er vermisst.*

[191] Shirokov, M.F. & I.Z. Fisher 1963. Isotropic Spaces with Discrete Gravitational-Field Sources. On the Theory of a Nonhomogeneous Isotropic Universe. Sov. Astron. J. **6** (1963), 699. *Mikhail Fedorovich Shirokow (1901-1983) wurde 1901 in Nikulino geboren. Von 1919-1921 studierte er Mathematik und Physik an der Universität in Perm, wo er die Relativitätstheorie durch A.A. Friedmann kennenlernte. 1921 ging er an die Lomnossow Universität in Moskau und erhielt 1925 dort seinen Abschluss und arbeitete anschließend in unterschiedlichen Firmen der Industrie . M. F. Shirokov war Autor von über 100 wissenschaftlichen Arbeiten über thermische Physik, statistische Physik, Gasdynamik,*

Magnetohydrodynamik, Akustik, Relativitätstheorie und philosophischen Problemen der Naturwissenschaft.

[192] Shirokov, M.F. & I.Z. Fisher 1998. *Isotropic Spaces with Discrete Gravitational-Field Sources. On the Theory of a Nonhomogeneous Isotropic Universe.* Gen. Rel. Grav. **30** (1998), 1411 – 1427. *Iosif Zalmanovich Fisher (1919-1995) wurde 1919 in Minsk geboren und machte an der dortigen Universität seinen Abschluss. 1963 wechselte er an die Mechnikow - Universität in Odessa. Seine Arbeitsgebiete umspannten Gebiete wie Kosmologie, Relativitätstheorie, Theorie der Elementarteilchen und Gravitation, Theorie kondensierter Materie, kritische Phänomene und Flüssigkeiten.*

[193] Soldner, J.G. v. 1804: *Ueber die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bewegung, durch die Attraktion eines Weltkörpers, an welchem er nahe vorbei geht.* In: Berliner Astronomisches Jahrbuch **1804**, Seiten 161-172

[194] Soldner, J. G. v.; (Lenard, P.): *Über die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bewegung durch die Attraktion eines Weltkörpers, an welchem er nahe vorbeigeht.* Annalen der Physik. **65**, 1921, S. 593-604.

[195] Sonnenschmidt, Hermann 1880: *Kosmologie. Geschichte und Entwicklung des Weltbaues, unter Zugrundelegung der neuesten Forschungen der Wissenschaft.* Köln und Leipzig, Verlag von Edward Heinrich Mayer. Karl Schwarzschild hat dieses zeitgenössische populäre Buch als Schüler mit großem Interesse gelesen, es später aber aufgrund seiner Spekulationen als enttäuschendes Erlebnis betrachtet([99])

[196] Somerville, M. 1834: On the Connection of Physical Sciences. London, John Murray, Albemarle Street, 1834 (Eighth Edition 1849)

[197] Sanders, R.H.: *The Dark Matter Problem. A Historical Perspective.* Cambridge University Press, Cambridge 2010.

[198] Siegel, E.R. & J.N. Fry 2005. Effects of Inhomogeneities on cosmic expansion. Astrophysical Journal, **628**, Issue 1, pp. L1-L4.

[199] Steinhardt,P.J. & N. Turok, *A cyclic model of the universe*, Science **296**, 1436 (2002).

[200] Streeruwitz, E. 1975. Vacuum fluctuations of a quantized scalar field in a Robertson - Walker universe. Phys.Rev. **D 11**, 1975, 3378-3383

[201] Susskind, L. 2012: Was There a Beginning?. Antwort auf eine Arbeit von Audrey Mithani und Alexander Vilenkin

[202] Tisserand, Francois Félix: *Traité de mécanique céleste* Tome I-IV; 1889-1896. Gauthier-Villars et fils, Imprimeurs-Libraires, Paris (Edition Jacques Gabay, Neudruck 1990). *F.C. Moulton (1872-1952) sagte über dieses Meisterwerk: Betreffend die Himmelsmechanik als Ganzes gibt es kein besseres Werk als das von Tisserand, das sich im Besitz eines jeden befinden sollte, der sich speziell mit diesem Thema befasst...*

[203] Thomson, William 1852: *On a Universal Tendency in Nature to the Dissipation of Mechanical Energy.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh for April 19, 1852, also Philosophical Magazine, Oct. 1852. Mathematical and Physical Papers, vol. **I**, art. 59, pp. 511.

[204] Trimble, V.: *Existence and nature of dark matter in the universe.* Annual review of astronomy and astrophysics **25**, 1987, p. 425-472*Die Autorin schreibt - völlig unkritisch und unwissenschaftlich - von der „Existenz dunkler Materie", wo noch zehn Jahre früher - wissenschaftlich korrekt - von einem „missing mass" Problem die Rede war.*

[205] Tryon, E.P. 1973: *Is the Universe a Vacuum Fluctuation?* Nature **246**, pp. 396-397, (1973)

[206] Unzicker, Alexander 2014: Dunkle Materie als permanente Überraschung. Wettlauf des Wunschdenkens - Unerkannte Schieflage der Methode - Fehlende Selbstreflexion. *Einige Artikel des Autors sind von der Kritik her berechtigt und lesenswert, andere dagegen wie „Die dunkle Energie ist tot - es lebe Einstein" von 2016 sind eher peinlich.*

[207] van den Bergh, S., 2011, *Discovery of the Expansion of the Universe.* Journal of the Royal Astronomical Society of Canada, **105**, No. 5, p. 197-198

[208] Vogelsberger, M., Genel, S., Springel, V., Torrey, P., Sijacki, D., Xu, D., Snyder, G., Bird, S., Nelson, D. & L. Hernquist 2014: *Properties of galaxies reproduced by a hydrodynamic simulation.* Nature **509**, 177-182, (2014) *Aufwendige Simulation, um die „Gabelsequenz"*

der Galaxientypen deduktiv abzuleiten. Das Modell zeigt aber Unterschiede zum realen Universum (zu viele alte Sternpopulationen) und besitzt das epizyklische ptolemäische Element der „Dunklen Materie“, das dogmatisch als alternativlos existent angenommen wird. Man benötigt sie hier insbesondere für das schnelle Wachstum des Dichtekontrastes im Universum, aber auch zur sehr frühen Entstehung von supermassiven schwarzen Löchern in Galaxienkernen.

[209] Walker, A. G., 1934, *The Principle of Least Action in Milne's Kinematical Relativity*, Proc.Roy.Soc.(Lond.)**A 147**: 478-490.

[210] Walker, A. G., 1935, *On the formal comparison of Milne's kinematical system with the systems of general relativity*, Mon.Not.R.Astr.Soc. **95**: 263-269.

[211] Weinberg, S. 1972. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* John Wiley. New York, London, Sydney. Paperback Reprint 2017: Wiley India Pvt. ltd. 4435-36/7, Ansari Road, Daryaganj New Delhi - 110 002

[212] Weinberg, S. 2008: *Cosmology.* Oxford University Press 2008. pp. 544 ; *Schwer zu lesendes Buch. Vom Tensorkalkül überfrachtete konventionelle Darstellung der Kosmologie. Alternativen zur Quintessenz als „Dunkler Energie“ werden nicht diskutiert. Die Layzer-Irvine Gleichung wird nicht erwähnt. Dogmatischer Glaube an exotische „Dunkle Materie“.*

[213] Weizsäcker, C.F.v. (1951): Anwendungen der Hydrodynamik auf Probleme der Kosmogonie. Festschrift zur Feier des 200 jährigen Bestehens der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse. pp. 86-122. Editor M. Born et al. , Berlin Springer Verlag OHG, Berlin, Göttingen, Heidelberg , 1951

[214] Wetterich, C. 1988. Cosmology and the fate of the dilatation symmetry. Nucl.Phys. **B 302**, (1988), 668-696

[215] Wetterich, C. 2003. Can structure formation influence the cosmological evolution?, Phys. Rev. D **67** (2003) 043513 .

[216] Wetterich, C. 2013: Universe without expansion. Physics of the Dark Universe, Volume **2**, Issue 4, p. 184-187 (2013)

[217] Whittaker, E.T. 1942: *The beginning and end of the world.* Riddell Memorial Lectures. Fourteenth Series. University of Durnham, Feb. 1941. Oxford University Press, London 1942

[218] Wilson, C. 1985. *The great inequality of Jupiter and Saturn: from Kepler to Laplace.* Archive for History of Exact Sciences. 5. VII. 1985, Volume 33, Issue 1-3, pp 15-290

[219] Wilsing, J. 1895: *Bemerkung zu dem Aufsatz von Herrn Prof. Seeliger: „Über das Newton'sche Gravitationsgesetz".* AN **138**, No. 3304, p. 253

[220] Wirtz, C. 1922: *Einiges zur Statistik der Radialbewegungen von Spiralnebeln und Kugelhaufen.* AN **215**, p. 349

[221] Wirtz, C. 1924: *De Sitters Kosmologie und die Radialbewegung der Spiralnebel.* AN **222**, p. 21

[222] Wong, Kenneth C., Suyu, Sherry H. et al. 2020:*2.4% measurement of H_0 from lensed quasars: 5.3 σ tension between early - and late - Universe probes.* MNRAS **498**, Issue 1, pp. 1420-1439

[223] Zee, A. 2010: *Quantum field theory in a nutshell.* Second Edition. Published by Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, New Jersey 08540 In the United Kingdom: Princeton University Press, 6 Oxford Street, Woodstock, Oxfordshire OX20 1TW

[224] Zee, A. 2013: *Einstein gravity in a nutshell.* Published by Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, New Jersey 08540. In the United Kingdom: Princeton University Press, 6 Oxford Street, Woodstock, Oxfordshire OX20 1TW

[225] Zeldovich, Ya.B. & I.D. Novikov 1966. *The Hypothesis of Cores Retarded during Expansion and the Hot Cosmological Model.* Astronomicheskii Zhurnal, Vol. **43,** No. 4, p. 758-760 Erste Hypothesen - neben den D-Objekten von Ambartsumian - zu „Schwarzen Löchern" (PBH) im primordialen Feuerball (Dunkle Materie).

[226] Zeldovich, Ya.B. 1970. *Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations.* Astron.Astrophys. **5**, 84

[227] Zwicky, F. 1929. *On the Red Shift of Spectral Lines through Interstellar Space.* PNAS. **15**, pp. 773-779.

[228] Zwicky, F. 1933. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. Helvetica Physica Acta, **6**, p. 110-127

[229] Zwicky, F. 1937. *On the masses of nebulae and of clusters of nebulae.* ApJ. **86**, p. 217-246