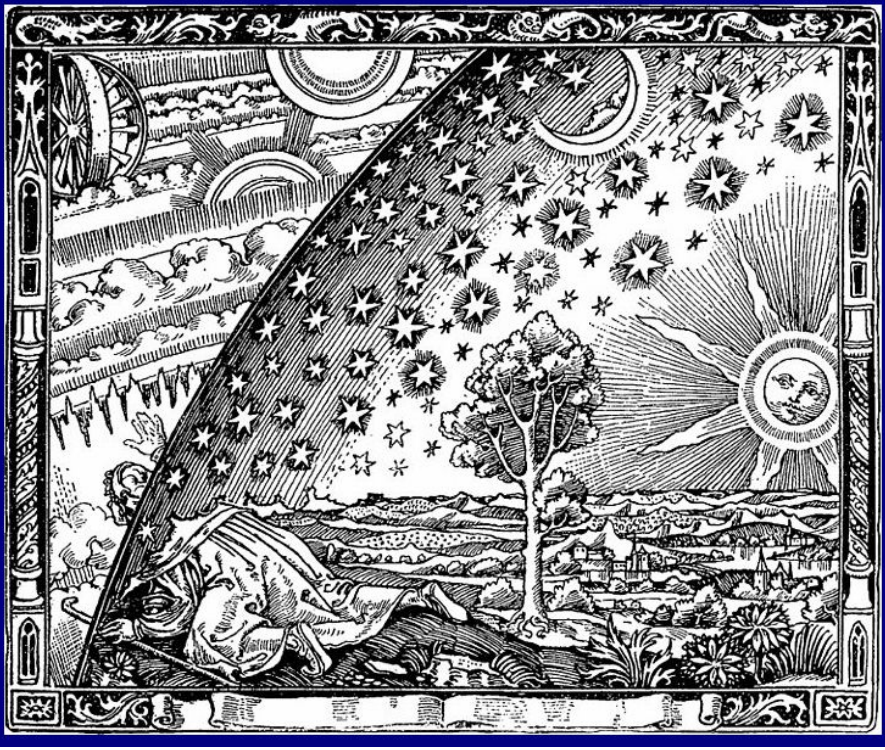
Klassische Methoden der Astrometrie

Eugen Willerding



www.eugen-willerding.de
©2023 Eugen Willerding
Cover: C. Flammarion, Holzschnitt, Paris 1888

Klassische Methoden der Astrometrie und ihre Erweiterungen

Vorlesung zum Gauss-Jahr 2005

(Article of enduring scholarly value)

Eugen Willerding

Inhaltsverzeichnis

1 Problemstellung **4**

2 Die Grundgleichungen **18**

3 Die Apex - Methoden **24**
3.1 Apex aus Radialgeschwindigkeiten 24
3.2 Die Gauß-Bravais-Airy Methode 26
3.3 Die Gaußsche Polygon - Methode 33
3.4 Die Gauss - Bessel - Kobold Methode 44
3.5 Die Olbers'sche Apexrechnung 50
3.6 Die Apexmethode von Argelander 54

4 Der Geschwindigkeitsellipsoid **57**

5 Stochastische Funktionen **66**
5.1 Die Gaußsche Wahrscheinlichkeit 66
5.2 Die Eddingtonsche Funktion 75
5.2.1 Die Zweistromhypothese 80
5.2.2 Die Ellipsoidverteilung 82

6 Galaktischer Apex aus Kugelsternhaufen **84**

7 Die Bestimmung der galaktischen Rotation **86**
7.1 Der Helmholtzsche Satz 89
7.2 Die erweiterte Gauss-Bravais-Airy Methode 92
7.3 Die galaktische Beschleunigung des Sonnensystems 102

8 Bestimmung des H - Tensors **105**
8.1 Bestimmung aus Radialgeschwindigkeiten 108
8.2 Bestimmung von Rotation und Deformation 110

9 Entwicklungen nach Kugelflächenfunktionen **113**
9.1 Die Autokorrelationsfunktion 116

Anhang **119**
A.1 Maxwellsche Kugelfunktionen 119
A.2 Lineare Scherströmungen 119
A.3 Galaktische Koordinaten 124
A.4 Das Wendelsche Theorem 126
A.5 Eine Wirbelröhre 127
A.6 Rotation und das Universum 128

Literaturverzeichnis **133**

1 Problemstellung

Manchmal fordert uns die Vergangenheit auf, ihren Spuren zu folgen. Dann gibt es keinen Unterschied mehr zwischen der Gegenwart, die ist, und der Vergangenheit, die einst war.

Die Hauptaufgabe der *Astrometrie* ist die genaue Positionsbestimmung von astrophysikalischen Objekten an der Himmelskugel und die Feststellung ihrer zeitlichen Veränderungen und damit auch ihrer genauen Entfernungen. Die Positionsbestimmung geschah ab dem 13. Jahrhundert mit dem sogenannten *Jakobsstab* (siehe 1.1), ab dem 17. Jahrhundert mit den *Meridiankreisen*. Erste Entfernungen und Eigenbewegungen konnten erst ab dem 19. Jahrhundert erfasst werden. Heutzutage können mit speziellen Satelliten (HIPPARCHOS und ab 2014 GAIA) unübertroffen genaue Datensätze gewonnen werden. Der Hauptgegenstand dieses Buches soll nicht die Darlegung dieser Messkunst sein, sondern die ersten Probleme und Schritte zur Auswertung eines größeren astrometrischen Datensatzes, wie er sich ab dem frühen 19. Jahrhundert aus den ersten Messungen zwangsläufig ergab.

Die auffallendste Gesetzmäßigkeit in der scheinbaren Bewegung der "Fixsterne" an der Himmelssphäre ist die Widerspiegelung der Sonnenbewegung relativ zu den anderen Sternen – *der parallaktische Anteil*. Sterne von *vorn* kommen uns entgegen, *hintere* Sterne bleiben zurück und *seitwärts* Sterne ziehen vorbei. Der sogenannte **Apex** (Apex *lateinisch.*: Spitze, Kopf (Apizes)) ist als Zielpunkt der Sonnenbewegung, der **Antapex** als Gegenpunkt an der Himmelssphäre definiert.

Ein zweiter Begriff, der heutzutage kaum noch in der Stellardynamik verwendet wird, ist der sogenannte **Vertex** (Vertex *lateinisch*, Plural Vertices: Ecke, Kante). Sowohl der niederländische Astronom Kapteyn als auch etwas später der deutsche Astrophysiker Karl Schwarzschild haben für die „Zweistromhypothese" beispielsweise für die „Ellipsoidhy-

Fig. 1.1: *Die Winkelmessung mit dem Jakobsstab, wie sie ab dem 13. Jahrhundert üblich war. Entnommen aus dem Werk: Introductio geographica von APIANUS aus dem Jahre 1532. (Quelle: wikimedia.commons)*

pothese“ diesen Begriff für die Ausrichtung der anisotropen Geschwindigkeitsverteilung der Sterne in der Sonnenumgebung eingeführt. Bei Karl Schwarzschild wird die Richtung der großen Achse des triaxialen Geschwindigkeitsellipsoiden als die *Vertex* – Richtung bezeichnet. Die große Achse ist dabei mehr oder weniger zum galaktischen Zentrum gerichtet. Wir werden später zeigen, dass die Achsen dieses Geschwindigkeitsellipsoiden aus einer Gausschen Apexmethode folgen – ohne das Gauss es 1822 bemerkt oder so interpretiert hätte.

Als neuen Begriff wollen wir hier das Wort **Vortex** (Vortex *lateinisch* Wirbel) einführen. Der Vortex – Vektor beschreibt den lokalen Wirbelvektor der galaktischen Scherströmung in der Sonnenumgebung. Der Betrag dieses Vektors ist identisch gleich dem Betrag der zweiten Oortschen Konstanten **B**. Die Richtung des Vortex – Vektors zeigt in Richtung des

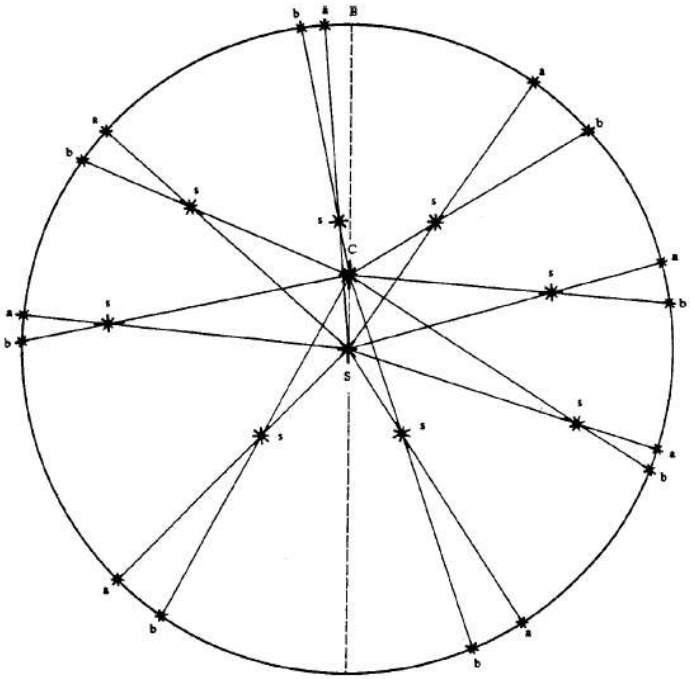


Fig. 1.2: *Die Eigenbewegung des Sonnensystems von S nach C auf das Ziel APEX B an der Himmelssphäre zu. Die als „Fixpunkte“ angenommenen acht Sterne erleiden dabei scheinbar einen parallaktischen Effekt durch Bewegung von a nach b. Skizze von J.* Herschel *aus dem Jahre 1783 in den Philosophical Transactions 73.*

lokalen Drehimpulsvektors, also hier des galaktischen Südpols, was eine Aussage bezüglich der Drehrichtung der Milchstraße zulässt. Wir fassen zusammen:

- **Apex**: Zielpunkt der Eigenbewegung des Sonnensystems gegenüber der stellaren Umgebung
- **Vertex**: Ausrichtung der großen Achse des triaxialen Geschwindigkeitsellipsoiden an der Himmelskugel. Vertexachse zeigt mehr oder weniger zum galaktischen Zentrum. Aus dem Achsenverhältnis lässt sich ein wichtiger Rotationsparameter der Galaxis ableiten.
- **Vortex**: Der Zielpunkt des lokalen Wirbelvektors in der Sonnenumgebung, hervorgerufen durch die galaktische Rotation und Scherströmung. Der Zielpunkt des Vektors zeigt mehr oder weniger zum galaktischen Südpol und der Betrag ist mit demjenigen der Oortschen Konstanten **B** identisch.

Die Geschichte der Bewegung des Sonnensystems begann mit einer Arbeit von W. Herschel aus dem 18. Jahrhundert und erreichte ihren ersten Höhepunkt Mitte des 19. Jahrhunderts, insbesondere aufgrund eines neuen Sternkataloges von W. Argelander 1838. Wenig bekannt ist, dass sich schon der Mathematiker C.F. Gauss um 1822 sehr intensiv mit Apexbestimmung beschäftigt hat. In den Jahren 1819, 1820, 1821 und 1822 hatte Gauss eine Preisaufgabe bezüglich dieses Themas an der Universität Göttingen ausgeschrieben, die aber keinen Bearbeiter fand (Preisgeld 50 Dukaten = 275 rheinische Gulden ≈ 183 nordische Taler). Der Termin war Michaelis (30. September) 1822[1]. Motivation für diese Aufgabe war wohl ein neuer Sternkatalog von Bessel mit Eigenbewegungen von 71 Sternen. Die Preisfrage wurde auf Latein und Deutsch bekanntgegeben. Sie lautete

> *Bekanntlich haben einige Astronomen in den beobachteten eigenen Bewegungen der Fixsterne eine Bewegung unseres Sonnensystems, gegen das Sternbild des Hercules zu, zu erkennen geglaubt.*

[1] Im Volksmund wurde dieser Gedenktag auch Michaeli genannt. Traditionell war der Michaelistag ein beliebter Termin für laufende Miet-, Pacht- oder Zinszahlungen und, wie Mariä Lichtmess, ein traditioneller Termin für die Verdingung von Knechten oder Mägden.

Neuere Untersuchungen anderer Astronomen haben zwar dies nicht bestätigt, erschöpfen jedoch den Gegenstand nicht, und obgleich sie zeigen, dass in den beobachteten eigenen Bewegungen die Wirkung der eigenen Bewegung unseres Sonnensystems nicht überwiegend vorherrsche, schließen sie die Hoffnung nicht aus, dass eine strengere Untersuchung, gestützt auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung, in jenen noch die Spuren von dieser erkennen könne.
Die Königliche Societät wünscht demnach: Eine neue sorgfältige Diskussion der beobachteten eigenen Bewegungen der Fixsterne, um wo möglich die wahrscheinlichste Richtung der Bewegung unseres Sonnensystems auszumitteln.

Gauss hatte wohl gehofft, dass Bessel sich um den Preis bemüht. Doch dieser hielt die Aufgabe noch zu verfrüht. In jedem Fall hat sich ab 1821 Olbers um eine Lösung bemüht, welche dann auch zu einem regen Briefwechsel mit Gauss führte. Darauf werden wir noch eingehen.

Allgemein bekannt wurden die aus dem Jahre 1822 stammenden Apexrechnungen von Gauss erst ab dem Jahre 1917, nachdem der Band **XI/1** der gesammelten Werke von Gauss erschienen war. Die Publikation des Gausschen Nachlasses erstreckte sich nämlich über den Zeitraum 1863-1929. Während Herschel, später Olbers, Bessel oder Argelander mehr heuristisch-graphische Abschätzungen anhand der beobachteten Eigenbewegungen der Sterne in Rektaszension und Deklination machten, versuchte Gauss *willkürfreie* mathematische Methoden der Statistik anzuwenden, um den wahrscheinlichsten Ort des Sonnenapex zu bestimmen (*Methode der kleinsten Quadrate; unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem*) . Dabei ging er natürlich von gewissen Prämissen aus, von denen man heute weiß, dass sie nicht genau zutreffen. So ist die Regellosigkeit der Pekuliarbewegung der Sterne in Sonnenumgebung nicht ganz erfüllt, weil

- eine Abhängigkeit von der galaktischen Länge besteht, da man innerhalb der galaktischen Ebene in ein differentiell rotierendes Wirbelfeld schaut

- eine Abhängigkeit von der gewählten Sterngruppe besteht (Unterschiedliche Sternpopulationen verschiedenen Alters und Entwicklungsgeschichte: Mira-Sterne, Schnellläufer, Unterzwerge, RR Lyr

Sterne,...).und Abhängigkeit von der Metallizität (**asymmetric drift**)

- die Geschwindigkeitsverteilung der Sterne stark anisotrop ist und die Stärke dieser Anisotropie besonders vom Alter der Gruppe abhängt (**„spiral wave heating“** und **asymmetric drift**)

Die Grenze zwischen der Pekuliarbewegung der Sonne und systematischer Bewegung einer *speziellen Sterngruppe* ist fließend. Heutzutage gibt es klare Definitionen:

- Die Differenz der Sonnenbewegung gegenüber einem Ensemble von Sternen in ihrer Umgebung wird als **solar motion** oder **Apexbewegung** der Sonne bezeichnet. Der so definierte „Zentroid“ oder „Schwerpunkt“ der Gruppe bewegt sich aber nicht unbedingt auf einer dynamisch wohldefinierten **Kreisbahn** um das galaktische Zentrum. Bezieht man die Sonnenbewegung auf Sterne anderer Spektralklassen oder höhere Metallizitäten (ältere Sterngenerationen), so ergeben sich für die Apexgeschwindigkeiten und Richtungen leicht unterschiedliche Werte: **asymmetric drift**.

- Da der exakte Wert der Apexgeschwindigkeit von dem gewählten Ensemble von Sternen der Sonnenumgebung abhängt, definiert man eine hypothetische Population von Sternen in der Sonnenumgebung, die eine exakte Kreisbahn um das galaktische Zentrum vollführen. Diese hypothetischen Sterne definieren den sogenannten **local standard of rest**, oder kurz **LSR**.

Die Bewegung der Sonne relativ zu diesem **LSR** ist heute bestimmt zu

$$v_{LSR} = 16.5\,km/s; \qquad l = \mathbf{53}^\circ, \qquad b = \mathbf{25}^\circ \tag{1.1}$$

Dieser Geschwindigkeitsvektor stimmt nicht exakt mit der „klassischen“ Apexbewegung überein, denn hier ergeben sich eher Geschwindigkeiten nahe bei 20 km/s. Ursache ist natürlich die **asymmetrische Drift**. Man definiert diese Drift v_a einer Sternpopulation als die Differenz zwischen dem lokalen **LSR** der galaktischen Rotation v_c und der wirklichen mittleren Geschwindigkeit der Sterngruppe v_φ durch die halb - empirische

Relation[2]

$$v_a = v_c - < v_\varphi > \equiv \frac{< v_R^2 >}{D}, \tag{1.2}$$

wo D etwa den Wert $D \approx 120 km/s$ hat. Diese Relation kann man als Konsequenz einer statistischen „Jeans - Maxwell Gleichung“ der Stellardynamik in einem zentralsymmetrischen Feld ansehen. Die lokale Dynamik in der Galaxie wird natürlich durch Dichtewellen und Dichtegradienten entscheidend mitbestimmt.

Doch von diesen Komplikationen wussten ein Herschel, ein Bessel, ein Olbers oder ein Gauss zu Beginn des 19. Jahrhunderts noch nichts. Bessel war sehr skeptisch bezüglich einer Apexbestimmung und hielt die Zeit wegen zu spärlichen Materials noch nicht für gekommen, eine Apexbestimmung (solar motion; nicht LSR) durchzuführen (1825). Die Aufgabe bestand darin, aus einem dürftigen Material von etwa 70 Sternen den Anteil der Sonnenbewegung aus den pekuliaren Sternbewegungen herauszufiltern. Das führt aber unweigerlich zur Aufgabe,mit einer geeigneten Methode den Fluchtpunkt der Sonne am Himmel – den Apex – und die Geschwindigkeit der Sonne im Vergleich zu der mittleren Geschwindigkeit der Umgebungssterne zu bestimmen. Zwei der von Gauss um 1822 verwendete Rechenmethode sind gegen Ende des 19. Jahrhunderts als die *Airy-Bravais* und *Kobold-Harzersche* Methode in die Literatur der *kinematischen Stellarstatistik* eingegangen. Die letztere ist aber keine wirkliche *Apex* - Methode gewesen, sondern mehr eine *Vertex* - Methode – wie noch zu erklären ist.

Die wichtigste Entdeckung der Stellardynamik, nämlich die differentielle Rotation unserer Galaxie, wurde aber erst 1925-1927 von Bertil Lindblad und Jan Hendrik Oort (1900-1992) durchgeführt, nachdem Bewegungs-Daten auch von weit entfernten Sternen bekannt waren. Milne hat dann 1935 eine allgemeine theoretische Analyse der kinematischen Observablen der Astrometrie geliefert ([34]).

Im Folgenden soll insbesondere gezeigt werden, dass die erste und mathematisch komplizierteste Methode von Gauss sehr empfindlich von der Annahme der **Isotropie** der Geschwindigkeiten abhängt. Man kann zeigen, dass Gauss mit seiner ersten Methode von 1822 mehr den sogenannten *Vertex* – also die Richtung der größten Achse des triaxialen Schwarzschildschen Geschwindigkeitsellipsoiden – bestimmt hat, als die

[2] Binney & Tremaine: Galactic Dynamics, Princeton University Press 1987

eigentliche Apexrichtung.

In diesen Betrachtungen von Ideenverbindungen alter schon in Vergessenheit geratener klassischer Methoden mit modernen Ideen und Daten (Astrometrie- Satellit HIPPARCOS 1989-1993, der sehr genaue Eigenbewegungen und Parallaxen der Sterne messen konnte, nicht aber Radialgeschwindigkeiten) liegt ein besonderer wissenschafts - historischer und wissenschafts - philosophischer Reiz. Ernst Anding hat eine solche Untersuchung schon 1901 durchgeführt, und zwar der Methoden von *Argelander, Bessel* und *Airy*. Insbesondere soll die Betonung auf den **Methoden**, nicht so sehr auf den Ergebnissen liegen. Der Bogen der „Methodengeschichte“ soll gespannt werden von den ersten Anfängen beHerschel über Gauss, Bessel, Argelander, Schwarzschild bis Oort. Aktualität haben koordinateninvariante Auswertemethoden kürzlich durch eine alternative Darstellung der kosmischen anisotropen 3Kelvin Hintergrundstrahlung erfahren, bei der die Fluktuationen nicht durch koordinatenabhängige Kugelflächenfunktionen dargestellt werden, sondern durch die alternative *Maxwellsche Darstellung*, bei der Kugelfunktionen durch Gradienten nach bestimmten Richtungen repräsentiert werden.[3]

Ein kurzer historischer Überblick bezüglich Stellardynamik (unvollständig) soll hier folgen:

- 1730: *Versuch vom Bau der Welt* . D.J. Biedenburg (?-?). Arzt aus Bremen, dessen genaue Lebensdaten unbekannt sind. Erste wage Spekulationen über den strukturellen Aufbau der „Milchstraße“.

- 1761: *Cosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltenbaues* (Augsburg 1761) von J. H. Lambert. Erste Hypothesen über die Scheibenstruktur der Milchstraße und über „extragalaktische Nebel“.

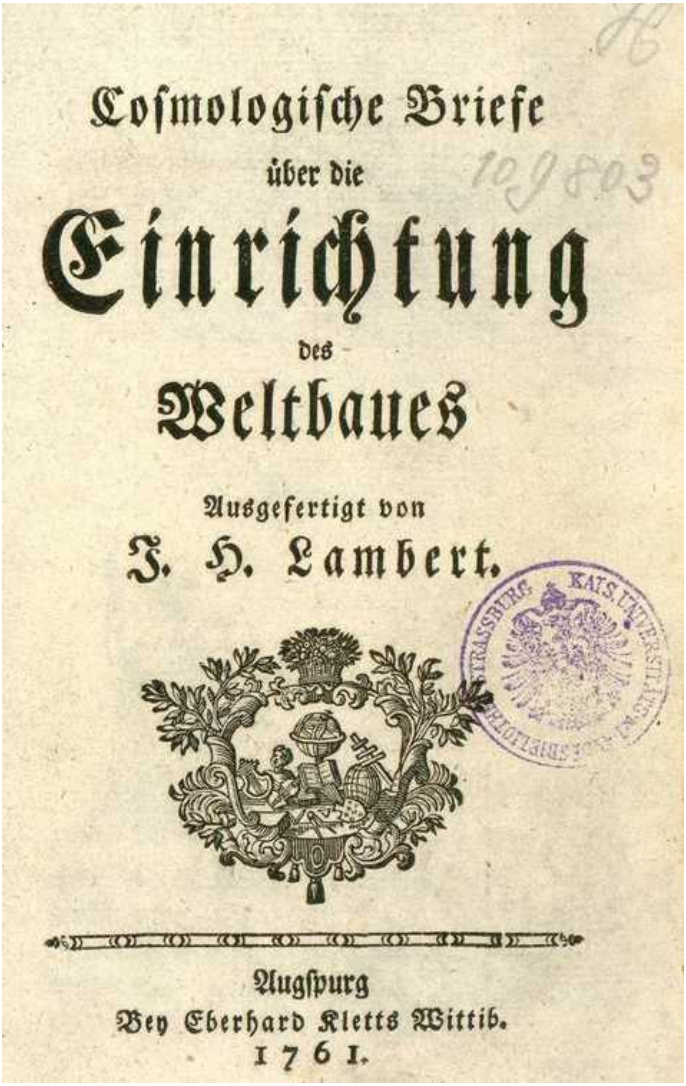
- 1783: *Über die Eigenbewegung der Sonne und des Sonnensystems.* F. W. Herschel (1738-1822), mit seiner Schwester Caroline

[3] Copi,C. Huterer, D. & Starkman, G.D.(2004): Multipole Vectors: A new representation of the CMB sky and evidence for statistical anisotropy or non-Gaussiantity at $2 \leq l \leq 8$. Physical Review **D** 043515 (2004). Den Autoren ist es zunächst wohl nicht aufgefallen, daß ihre Methode auf der „Maxwellschen“ Darstellung der Kugelfunktionen beruht. Die Darstellung von Daten auf einer Kugeloberfläche durch Kugelflächenfunktionen ist auch heutzutage noch rechentechnisch sehr aufwendig (HEALPix - software (http://healpix.jpl.nasa.gov))

VERSUCH
vom
BAU der WELT,
aus den
OBSERVATIONEN,
darinne,
durch einen aus den Obſervatio-
nen gehenden Beweiſs,
vom
Inneren Bau des generalen
Syſtehms der Welt,
Dieſe,
Als gleich einer eintzigen allenthalben
in ſich verbundenen
MASCHINE,
dargeſtellet wird,
durch
J. D. Biedenburg,
Der Medicin und natürlichen Wiſſenſchafften
Befliſſenen.

BREMEN,
Gedruckt bey Hermann Chriſtoph Jani, des Löbl. Gymnaſii Buchdr. 1730.

Fig. 1.3: *Das Titelblatt des ungewöhnlichen Buches von dem Bremer Arzt J.D.* BIEDENBURG *über den möglichen Bau des Sternensystems oder der „Welt“.([7])*



Cosmologische Briefe
über die
Einrichtung
des
Weltbaues

Ausgefertigt von
J. H. Lambert.

Augspurg
Bey Eberhard Kletts Wittib.
1761.

Fig. 1.4: *Titelblatt der berühmten kosmologischen Briefe von J.H.* LAMBERT *aus dem Jahre 1761.*

Herschel (1750-1848)

- 1805: *Richtung und Bewegung der Sonne.* Bestimmung des Sonnenapex von Herschel

- 1819: C.F.Gauss stellt eine Preisaufgabe bezüglich Bestimmung des Sonnenapex an der Göttinger Universität. Problem findet keinen Bearbeiter, auch nicht von Bessel, der das Problem als noch zu früh ansieht und die Großkreise der Eigenbewegungen von etwa 70 Sternen an der Himmelskugel zur Hilfe nehmen möchte .

- 1822: F.W.Olbers beschäftigt sich mit der wahrscheinlichsten Richtung der Pekuliarbewegung der Sonne (Apexrechnungen). Briefwechsel mit Gauss. Daraufhin entwickelt Gauss mehrere Apexmethoden aus unterschiedlichen Blickwinkeln innerhalb der Methode der kleinsten Quadrate. Ergebnisse werden aber nie veröffentlicht.

- 1838: Argelander veröffentlicht Sternkatalog mit Eigenbewegungen von über 380 Sternen und berechnet erneut den Apex. Gauss führt daraufhin seine umfangreichsten Rechnungen durch und teilt diese Argelander mit. Gauss entdeckt erste Hinweise auf eine systematische Geschwindigkeitsverteilung der Sterne in der Sonnenumgebung.

- 1860: G.B. Airy entwickelt eine statistische Methode zur Apexbestimmung, die aber schon Gauss bekannt war.

- 1893: H. Kobold glaubt, dass nur die „Bessel'sche Methode“ den richtigen Fluchtpunkt der Sonnenbewegung festlegt. Erste Hinweise auf eine stark anisotrope Geschwindigkeitsverteilung der Sterne in der Sonnenumgebung. Versuche, die galaktische Rotation zu bestimmen, scheitern.

- 1904: J. Kapteyn entwickelt die Vorstellung von zwei Sternströmen, erkennt aber noch nicht die galaktische Rotation und Scherströmung.

- 1906: A. Eddington formuliert die mathematische Theorie der „Drifthypothese“ auf der Grundlage der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung.

- 1907: K. Schwarzschild erklärt die Vorzugsrichtungen bei der lokalen Bewegung der Sterne durch seine triaxiale Geschwindigkeitsverteilung der Pekuliarbewegungen der Sterne. Diese existiert nach Abzug der Apexbewegung der Sonne. Schwarzschild entwickelt eine eigene lokale Methode zur Bestimmung des Apex und des Vertex, aufbauend auf den Arbeiten von Eddington. Die Vorstellung einer galaktischen Rotation ist ihm aber noch fremd.

- 1925: B. Lindblad postuliert theoretisch nun endlich eine differentielle Rotation der Milchstraße, die man auch in den Sternbewegungen sehen müsse.

- 1927: J. Oort deduziert etwa 100 Jahre nach Gauss aus zahlreichen dynamischen Daten von auch weit entfernten Sternen die differentielle Rotation der Galaxies und deren dynamische Parameter (Oortsche Konstanten **A** und **B**).

- 1952: J. Oort und H. van de Hulst lokalisieren Spiralarme in der Milchstraße durch neuartige radioastronomische Messungen

- 1989 - 1993: Der Satellit Hipparcos liefert trotz falscher Zielbahn äußerst genaue Positionen, Eigenbewegungen und Parallaxen von fast 120000 Sternen der Sonnenumgebung. Es entsteht der Hipparcos Katalog und der erweiterte Tycho Katalog. ESA 1997: The HIPPARCOS Catalogue, ESA SP 1200

- 2003 - 2012? **RAVE** *Radial Velocity Experiment*. Ein Beobachtungsprogramm am 1.2m UK Schmidt Teleskop des Anglo - Australian - Observatory (AAO) zur Messung der Radialgeschwindigkeit und der Metallizität von fast 1 Millionen Sternen.

- (2014 - 2024?) Astrometrie-Satellit **Gaia** (altes Kürzel **GAIA**: **G**lobales **A**strometrisches **I**nterferometer für die **A**strophysik). Der am 19. Dezember 2013 gestartete Nachfolger des ESA-Satelliten HIPPARCOS, der am L2-Punkt zur Sonne - Erde etwa eine Milliarde Sterne unserer Galaxis mit etwa 10 - 50-facher Genauigkeit als der HIPPARCOS Satellit mit Position und Geschwindigkeitsvektor (6D - Phasenraum) vermessen soll (Genauigkeit etwa 2 - 10 *Mikrobogensekunden* $= \mu as$!) ([31]). Hier müssen bei der Interpretation

schon unterschiedliche Effekte der Relativitätstheorie berücksichtigt werden. Auch können zum erstenmal *säkulare Aberrationen* an Quasaren gemessen werden. Die Messung erfolgt mit Selbstkalibration und es müssen zur Auswertung der nicht-segmentierbaren Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate etwa 700 Millionen Unbekannte aus 500 Milliarden Messungen gewonnen werden. Das sehr ehrgeizige Groß - Projekt hat als Ziel die neue Fundamentalvermessung unserer Galaxis. Auch die Entdeckung von Sternen mit planetaren Begleitern wird als "Nebenprodukt" abfallen. Der ursprüngliche Name (Akronym) **GAIA** ist aber nicht mehr sinnvoll, da bei der Planung 1993 noch ein interferometrisches Prinzip vorgesehen war. Doch dies hätte mehr Strom benötigt und zu viel Temperaturschwankungen und zu hohe Datentransferraten verursacht, was die Genauigkeit der Messung stark beeinträchtigt hätte. Daher wurde der Projektname paradoxerweise in **Gaia** umgeändert, was aber mit der Erdgöttin wirklich nichts zu tun hat. Ähnlich wie beim Meridiankreis in Kiel 1905 hatte man auch hier *„den Bogen schon etwas überspannt".*

In den folgenden Kapiteln werden wir also die wichtigsten Auswertemethoden diskutieren, welche sich relativ langsam und sehr zäh im Laufe des 19. Jahrhunderts entwickelt haben, um insbesondere aus astrometrischen Positionsdaten und Eigenbewegungsdaten *maximal mögliche kinematische Informationen über das uns umgebende Sternenmeer zu erhalten.*

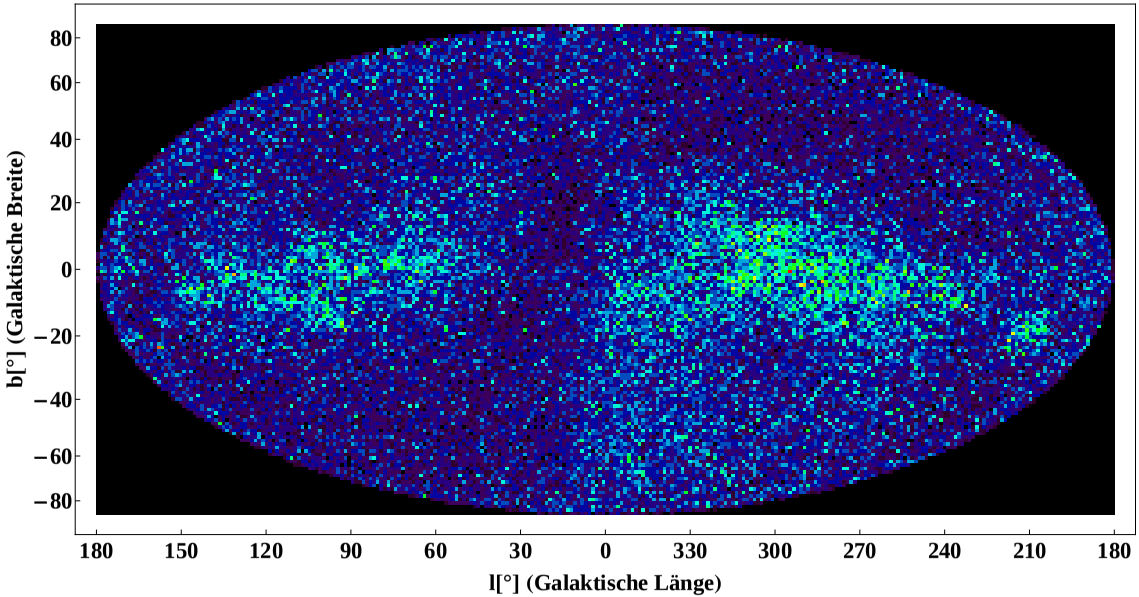


Fig. 1.5: *Die Dichteverteilung der Richtungsvektoren* $\mathbf{e}_n$ *von 113710 Sternen des HIPPARCOS Kataloges an der Himmelskugel (Bin - Zählungen). Deutlich ist für die entfernten Sterne eine Häufung entlang der galaktischen Ebene zu sehen. Ob im Zentrum eine Balkenstruktur existiert oder wie viele Spiralarme unsere Galaxis hat, lässt sich aus diesen Daten noch nicht erkennen. (Die Kartenprojektion ist eine flächentreue Mollweide – Babinet Projektion.)*

2 Die Grundgleichungen

Die Position eines Sterns wird in der Astronomie durch die Rektaszension α und die Deklination δ angegeben. Der Deklinationswinkel wird dabei vom Himmelsäquator gemessen, der eine Projektion des Erdäquators an die Himmelskugel darstellt. Die Erdachse bestimmt die beiden Pole dieses sphärischen Koordinatensystems. Später verwenden wir auch noch ein galaktisches Koordinatensystem, welches durch die galaktische Ebene unserer Galaxis festgelegt wurde. Der Richtungsvektor $\mathbf{e}^{(1)} \equiv \mathbf{e}$ zum Stern ist dann ganz allgemein durch

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos[\alpha]\cos[\delta] \\ \sin[\alpha]\cos[\delta] \\ \sin[\delta] \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

gegeben. Das totale Differential der obigen Gleichung lautet nun

$$d\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(2)}\cos[\delta]\,d\alpha + \mathbf{e}^{(3)}\,d\delta \tag{2.2}$$

mit

$$\mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sin[\alpha] \\ +\cos[\alpha] \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}^{(3)} = \begin{pmatrix} -\cos[\alpha]\sin[\delta] \\ -\sin[\alpha]\sin[\delta] \\ \cos[\delta] \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Dabei gelten für eine beliebige Permutation der Zahlen j_1, j_2, j_3 die Beziehungen

$$\mathbf{e}^{(j_1)} = \mathbf{e}^{(j_2)} \times \mathbf{e}^{(j_3)} \qquad \mathbf{e}^{(j_1)} \circ \mathbf{e}^{(j_2)} = 0 \tag{2.4}$$

sowie $[\mathbf{e}^{(1)}\mathbf{e}^{(2)}\mathbf{e}^{(3)}] = 1$. Die drei Basisvektoren $\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(3)}$ bilden somit ein orthonormiertes System.

Die Tradition in der Astronomie hat dazu geführt, die Gleichung (2.2) in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}^{(1)} &= \dot{\alpha}\,\cos[\delta]\,\mathbf{e}^{(2)} + t\delta\,\mathbf{e}^{(3)} \\ &= \mu_\alpha\,\mathbf{e}^{(2)} + \mu_\delta\,\mathbf{e}^{(3)} \end{aligned} \tag{2.5}$$

zu schreiben. Die Größen μ_α und μ_δ sind die eigentlichen Parameter, welche die Eigenbewegung eines Sterns in Einheiten von Bogensekunden pro Jahr $[as\,/J]$oder Millibogensekunden pro Jahr $[m\,as/J]$ (HIPPARCHOS) oder Mikrobogensekunden pro Jahr $[\mu as/J]$ (GAIA) messen. Eine weitere wichtige Größe ist der Richtungswinkel φ dieser Eigenbewegung an der Himmelskugel. Die Definitionsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \mu_\alpha &= \mu\,\sin[\varphi] \\ \mu_\delta &= \mu\,\cos[\varphi]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

μ bedeutet hier den Gesamtbetrag der Eigenbewegung. Da die Rektaszension auf einer „genordeten“ Sternkarte von rechts nach links zunimmt (Sterne bewegen sich an der Himmelskugel aufgrund der Erdrotation beim Blick nach Süden auf der Nordhalbkugel von Ost nach West – also beim Blick nach Süden von links nach rechts–), bedeutet ein positives μ_α eine Bewegung nach **Links**, ein negatives μ_α eine Bewegung nach **Rechts**. Darum wird der Richtungswinkel φ der Eigenbewegung *gegen den Uhrzeigersinn* gezählt, und zwar ist $\varphi = 0$ die nördliche Richtung parallel zu den Stundenkreisen. Gauss benutzte genau diese klassische Definition bei der Analyse der Argelanderschen Bewegungsdaten 1838, dagegen benutzte Eddington 1906 bei seiner Analyse der Bewegungsdaten eine andere Festlegung.

Für eine bestimmte Sterngruppe[1], in der sich auch unsere Sonne befindet, definiere man nun eine charakteristische Gruppengeschwindigkeit. Vom physikalischen Standpunkt aus erscheint es sinnvoll, hierfür die *Schwerpunktsgeschwindigkeit* der Gruppe zu wählen[2]. Zunächst gilt in der Newtonschen Approximation

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_n &= \mathbf{R}_\odot + r_n\,\mathbf{e}_n \\ \dot{\mathbf{R}}_n &= \dot{\mathbf{R}}_\odot + \dot{r}_n\,\mathbf{e}_n + r_n\,\dot{\mathbf{e}}_n \\ \ddot{\mathbf{R}}_n &= \ddot{\mathbf{R}}_\odot + \ddot{r}_n\,\mathbf{e}_n + 2\,\dot{r}_n\,\dot{\mathbf{e}}_n + r_n\,\ddot{\mathbf{e}}_n \end{aligned} \tag{2.7}$$

[1] Der sogenannte *“local standard of rest“* wird heute definiert mit etwa 400 A-Sternen und 400 K-Sternen aus der Sonnenumgebung mit Entfernungen kleiner 100 pc, die zudem eine fast isotrope Geschwindigkeitsverteilung aufweisen

[2] Global physikalisch liegt der Schwerpunkt unseres Milchstraßen-Systems natürlich in der Nähe des galaktisches Zentrums. Da wir aber *noch nicht* das ganze Milchstraßen System astrometrisch vermessen können, müssen wir diesen fiktiven “lokalen Schwerpunkt“ festlegen.

Hier bedeutet $\mathbf{R}_n$ den Ortsvektor eines Sternes der Marke n, bezogen auf ein zunächst beliebiges Inertialsystem, $\mathbf{R}_\odot$ den entsprechenden Vektor der Sonne, r_n die Distanz eines Sterns zur Sonne und $\mathbf{e}_n$ und $\dot{\mathbf{e}}_n$ die Richtung und die änderung der Richtung des Sternes von der Sonne. Es gilt $\mathbf{e}_n \circ \dot{\mathbf{e}}_n = 0$.

Die obigen Gleichungen beschreiben die Bewegung eines Sternes und die Interpretation der Beobachtungsgrößen in einer „klassisch“ idealisierten Form. Es werden folgende Vereinfachungen angenommen:

- Der Geschwindigkeitsvektor des Sternes ist konstant
- Die perspektivischen änderungen durch die Eigenbewegung sind nur von erster Ordnung in der Geometrie
- Die Lichtlaufzeit und die damit einhergehende kleine änderung der scheinbaren Geschwindigkeit der Eigenbewegung wird im Folgenden vernachlässigt (Effekt der Ordnung v/c)

Im Jahre 1729 entdeckte der englische Theologe und Astronom James Bradley (1693-1762) beim Versuch zur Messung der Parallaxe des Sterns γ Draconis die sogenannte *jährliche Aberration*, bei welcher der Ort eines Fixsterns sich während des Jahreslaufes scheinbar periodisch um etwa 20 Bogensekunden um seinen mittleren Ort an der Himmelskugel bewegt[3] Bezeichnet man den Geschwindigkeitsvektor des Erde-Mondsystems in einem kosmischen Inertialsystem - orientiert an Quasaren - mit $\mathbf{v}$, so erleidet jeder Stern mit seiner *Eigen-Position* $\mathbf{e}$ in erster Ordnung v/c die Verrückung

$$\mathbf{e}_A = \frac{1}{c}\left\{\mathbf{v} - (\mathbf{e} \circ \mathbf{v})\,\mathbf{e}\right\} \equiv \frac{1}{c}\left\{\mathbf{e} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{e})\right\}, \tag{2.8}$$

wobei c hier die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Skalare Multiplikation mit $\mathbf{e}$ zeigt, dass die Verschiebung $\mathbf{e}_A$ senkrecht auf der Richtung $\mathbf{e}$ steht. Während eines Jahres ändert der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ nun periodisch seine Richtung, woraus der Effekt der Positionsänderung eines Sternes folgt. Die eigentliche gleichförmige Bewegung des Sonnensystems im Raum ist dagegen nicht bemerkbar und somit auch nicht messbar. Ändert sich aber durch die Bewegung des Sonnensystems um das galaktische Zentrum der Vektor $\mathbf{v}$, so führt das zu einer sogenannten *säkularen Aberration*. Der

[3] Dies war ein erster direkter Beweis für das *heliozentrische Weltbild des Kopernikus*.

letzte Punkt wird in der klassischen Astrometrie kaum erwähnt, obwohl schon der englische Astronom JOHN POND (1767-1836) diesen Effekt in einem Artikel von 1833 als in ferner Zukunft messbar erläuterte. Der junge Student K. SCHWARZSCHILD veröffentlichte 1894 eine Arbeit *Über den Einfluss der säkularen Aberration auf die Fixsternörter*, in der er diesen Effekt genauer diskutierte (Schwarzschild 1894).[4] Er schreibt am Ende seines Artikels:

> *...Als einzige Wirkung der Aberration bleibt eine konstante Verzerrung des Himmelsgewölbes übrig, auf deren Beseitigung man stets verzichten wird...*

Wir werden in einem späteren Kapitel über Ergebnisse des GAIA-Satelliten auf dieses Phänomen noch zurückkommen.

Wir definieren nun für eine Gruppe von N Sternen ein Koordinatensystem mit den Eigenschaften

$$\sum_n m_n \, \mathbf{R}_n + m_\odot \, \mathbf{R}_\odot = 0 \tag{2.9}$$

In diesem **Schwerpunktsystem** hat die Sonne die Koordinaten

$$\mathbf{R}_\odot = -\frac{\sum_n m_n \, r_n \, \mathbf{e}_n}{m_\odot + \sum_n m_n}. \tag{2.10}$$

Differentiation nach der Zeit liefert für die Sonnengeschwindigkeit den Ausdruck

$$\dot{\mathbf{R}}_\odot = -\frac{\sum_n m_n \dot{r}_n \mathbf{e}_n + \sum_n m_n \, r_n \dot{\mathbf{e}}_n}{m_\odot + \sum_n m_n}. \tag{2.11}$$

Eine solche Formel wie (2.11) zur Bestimmung des Sonnenapex hätte im 19. Jahrhundert natürlich keinen praktischen Nutzen gehabt, da man weder die Massen m_n noch die Radialgeschwindigkeiten $\dot{r}_n$ der Sterne bezüglich der Sonne kannte. Im weiteren führen wir daher die Vereinfachung ein, daß innerhalb der Sternengruppe alle Massen m_n gleich der Sonnenmasse sind. Im Prinzip bedeutet dies eine Aufweichung der Definition der Apexbewegung der Sonne: Von einer *dynamischen* Definition wird zu einer rein *kinematischen* Definition übergegangen. Vom

[4] Der Lichtlaufzeiteffekt führt ja bei VLBI - Messungen von Quasar - Jets zu den bekannten scheinbaren Überlichtgeschwindigkeiten.

Schwerpunkt geht man zum geometrischen *Zentroid* der Sterngruppe über. Letztendlich bleibt auch unklar, ob die so definierte Geschwindigkeit $\mathbf{v}_\odot$ die wirkliche *lokale* Geschwindigkeit gegenüber dem interstellaren Gas darstellt. In jedem Fall vereinfacht sich nun (2.11) in

$$\mathbf{v}_\odot = -\frac{1}{N+1}\left(\sum_n \dot{r}_n \mathbf{e}_n + \sum_n r_n \dot{\mathbf{e}}_n\right). \tag{2.12}$$

N ist hier die Anzahl der Sterne in der betrachteten Gruppe. Zur Vereinfachung schreiben wir jetzt die zweite Gleichung von (2.7) (*Fundamentalgleichung der Stellarkinematik*) in der Form

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_\odot + \dot{r}_n \mathbf{e}_n + r_n \dot{\mathbf{e}}_n. \tag{2.13}$$

oder mit (2.4) ausführlicher

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_\odot + \dot{r}_n \mathbf{e}_n^{(1)} + r_n\, \mu_\alpha\, \mathbf{e}_n^{(2)} + r_n\, \mu_\delta\, \mathbf{e}_n^{(3)}. \tag{2.14}$$

wo sich die Geschwindigkeitsvektoren nun auf das Schwerpunktsystem beziehen. Multipliziert man die obige Vektorgleichung skalar nacheinander mit $\mathbf{e}_n^{(2)}$ und $\mathbf{e}_n^{(3)}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n \circ \mathbf{e}_n^{(2)} &= \mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}_n^{(2)} + r_n\, \mu_\alpha \\ \mathbf{v}_n \circ \mathbf{e}_n^{(3)} &= \mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}_n^{(3)} + r_n\, \mu_\delta \end{aligned} \tag{2.15}$$

Wären die Radialgeschwindigkeiten, die Eigenbewegungen und die Entfernungen bekannt, lieferte (2.12) die gewünschte Lösung für die Pekuliargeschwindigkeit $\mathbf{v}_\odot$ der Sonne. Man könnte dann alle anderen Geschwindigkeitsvektoren der Sterne rekonstruieren und eine Art 3D-Karte der unmittelbaren Sonnenumgebung anfertigen. Aus der räumlichen Geschwindigkeitsverteilung der Sterne kann man dann auch auf die **Massenverteilung** unserer Galaxis schließen. Dies ist aber erst mit Gaia ab dem Jahr 2014 mit äußerster Präzision (10 - 50 Mikrobogensekunden!) möglich. (Das Projekt eines deutschen Astrometriesatelliten DIVA wurde eingestellt).

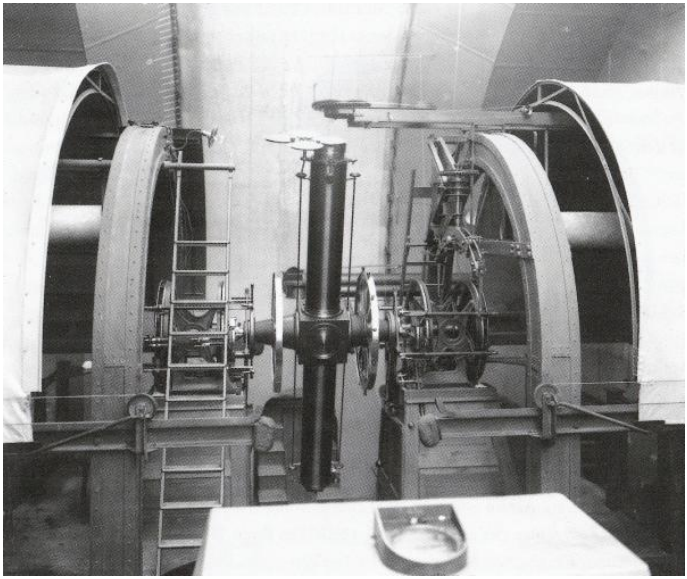


Fig. 2.1: *Der damals neue Meridiankreis der Kieler Sternwarte im Jahre 1905. Er war das Größte seiner Bauart , dass je in Deutschland von der Firma Repsold & Söhne aus Hamburg aufgestellt wurde. Wissenschaftlich war das Gerät aufgrund zahlreicher „Kinderkrankheiten“ ein Fehlschlag. Bei Wartungsarbeiten fiel das kunstvolle Instrument am 29.Mai 1933 zu Boden - seine Entlastungsketten waren unbemerkt verrostet und seine Teilkreise durch Feuchtigkeit längs erblindet. Im Jahre 1950 wurde das historische Instrument einfach verschrottet. Sein einst mächtiger Fundamentblock liegt heute unter Straßenteer. Als Teil des Weltkulturerbes (UNESCO) wie die Universitätssternwarte Kasan in der russischen Föderation im Jahre 2023 konnte so das Instrument und die Kieler Sternwarte nie mehr werden. Quelle: [32]*

3 Die Apex - Methoden

3.1 Apex aus Radialgeschwindigkeiten

Eine erste brauchbare Methode, um nur aus Radialgeschwindigkeiten die Apexbewegung der Sonne abzuleiten, ergibt sich zunächst dadurch, dass wir (2.13) skalar mit $\mathbf{e}_n$ multiplizieren. Wir erhalten

$$\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_n = \mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot + \dot{r}_n. \tag{3.1}$$

Natürlich standen Radialgeschwindigkeiten von Sternen zur Zeit von Olbers, Gauss oder Argelander nicht zur Verfügung, da hierzu genaue spektroskopische Messungen notwendig sind. Wir behandeln hier diese Methode nur, um das entscheidende Prinzip zu zeigen. Summation über alle n in der obigen Beziehung führt zur sinnlosen Gleichung $0 = 0$, wenn die Sterne gleichmäßig über die Himmelssphäre verteilt sind. Stattdessen benutzen wir nun das wahrscheinlichkeitstheoretische Prinzip von Gauss-Legendre, nämlich die Methode der kleinsten Quadrate. Wir machen hierzu das Aggregat

$$\sum_n \left[\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot + \dot{r}_n\right]^2 \tag{3.2}$$

durch Variation von $\mathbf{v}_\odot$ minimal. Ohne Einschränkung können wir zunächst den obigen Ausdruck reduzieren zu

$$Q(\mathbf{v}_\odot) = \sum_n \left[(\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)^2 + 2\,\dot{r}_n\,(\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\right] \tag{3.3}$$

Die Bedingung für das Extremum kann nun als Gradientengleichung in der Form

$$\frac{\partial Q(\mathbf{v}_\odot)}{\partial \mathbf{v}_\odot} \equiv 0 \tag{3.4}$$

geschrieben werden. Daraus ergibt sich $\mathbf{v}_\odot$ aus

$$\boxed{\sum_n (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\, \mathbf{e}_n = -\sum_n \dot{r}_n \mathbf{e}_n.} \tag{3.5}$$

Alternativ können wir diese Gleichung auch

$$\sum_n \mathbf{e}_n \times (\mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_\odot) + N\mathbf{v}_\odot = -\sum_n \dot{r}_n \mathbf{e}_n \tag{3.6}$$

schreiben. So ergibt sich die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} \sum e_{xn}^2 & \sum e_{xn}e_{yn} & \sum e_{xn}e_{zn} \\ \sum e_{xn}e_{yn} & \sum e_{yn}^2 & \sum e_{yn}e_{zn} \\ \sum e_{xn}e_{zn} & \sum e_{yn}e_{zn} & \sum e_{zn}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\odot x} \\ v_{\odot y} \\ v_{\odot z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum \dot{r}_n e_{xn} \\ -\sum \dot{r}_n e_{yn} \\ -\sum \dot{r}_n e_{zn} \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Damit ist der Geschwindigkeitsvektor der Sonne bezüglich der Gruppe bestimmt. Dabei wird das Prinzip verfolgt, die beobachten Radialgeschwindigkeiten durch ein Minimum an eigenen Bewegungen darzustellen. Dabei muss die Sterngruppe nicht den ganzen Himmel gleichmäßig bedecken, sondern zum Beispiel nur die Nordhalbkugel. Sind dagegen die Sterne auf der Himmelssphäre gleichmäßig verteilt, so folgt für große N ($\{N \to \infty\}$)

$$\boxed{\mathbf{v}_\odot = -\frac{3}{N}\sum_n \dot{r}_n \mathbf{e}_n.} \tag{3.8}$$

Alle diese eleganten Beziehungen konnten natürlich von Argelander oder Gauss nicht benutzt werden, da damals noch keine Radialgeschwindigkeiten bekannt waren. Das gleiche gilt natürlich auch heute für den HIPPARCOS Satelliten, der keine Radialgeschwindigkeiten messen konnte.

Historisch spielten die obigen Gleichungen eine wichtige Rolle bei der Bestimmung der Sonnengeschwindigkeit bezüglich des Systems der *Kugelhaufen* in unserer eigenen Galaxis. So haben Lundmark (1923) und Strömberg (1925) aus 16 bzw. 18 Kugelhaufen und ihren *spektroskopisch gemessenen* Radialgeschwindigkeiten den Wert der Sonnengeschwindigkeit

zu 266 km/s bzw. 329 km/s bestimmt[1]. In dieser Größenordnung liegt die Rotationsgeschwindigkeit der Sonne um das galaktische Zentrum. Es kommt also bei der Apex-Bestimmung immer darauf an, auf welches System, auf welchen *Zentroid* man sich beziehen will. Auf das wichtige und faszinierende Problem der Kugelhaufen soll noch in einem eigenen Kapitel eingegangen werden.

3.2 Die Gauß-Bravais-Airy Methode

Mathematisch schwieriger ist die Apexbestimmung *nur* aus Eigenbewegungen der Sterne. Genau dies ist aber das klassische Problem von Herschel, Bessel, Olbers , Gauss, Argelander und anderen. Mit (3.1) und (2.13) können wir zunächst durch skalare Multiplikation mit $\mathbf{e}_n$ die Radialgeschwindigkeit eliminieren und durch Einsetzen wieder die Gleichung

$$\mathbf{v}_n - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_n)\,\mathbf{e}_n = \mathbf{v}_\odot - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\,\mathbf{e}_n + r_n \dot{\mathbf{e}}_n \tag{3.9}$$

ableiten. Multipliziert man die linke Seite der obigen Gleichung skalar und vektoriell mit $\mathbf{e}_n$, so folgen unmittelbar die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n \circ (\mathbf{v}_n - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_n)\,\mathbf{e}_n) &= 0, \\ \mathbf{e}_n \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_\odot) &= r_n\,(\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, dass die linke Seite der Gleichung (3.9) diejenige Geschwindigkeitskomponente des Sternes darstellt, die *senkrecht* auf der Beobachtungsrichtung steht. Wir definieren nun die Summe der Quadrate dieser Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{v}_\odot) &= \sum_n \left[\mathbf{v}_n - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_n)\,\mathbf{e}_n\right]^2 \\ &= \sum_n \left[\mathbf{v}_\odot - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\,\mathbf{e}_n + r_n \dot{\mathbf{e}}_n\right]^2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

oder entwickelt

$$Q(\mathbf{v}_\odot) = \sum_n \left[\mathbf{v}_\odot^2 - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)^2 + [r_n \dot{\mathbf{e}}_n]^2 + 2\,r_n(\dot{\mathbf{e}}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\right]. \tag{3.12}$$

[1] Moderner heutige Wert: 220 km/s

Aus der Extremalbedingung gemäß der Methode der kleinsten Quadrate (nach LEGENDRE-GAUSS) bezüglich $\mathbf{v}_\odot$ ergibt sich schließlich die Vektorgleichung

$$\boxed{\sum_n (\mathbf{v}_\odot - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\,\mathbf{e}_n) = -\sum_n r_n \dot{\mathbf{e}}_n.} \tag{3.13}$$

Alternativ können wir diese Gleichung zur Apexbestimmung auch in der Form

$$\sum_n \mathbf{e}_n \times (\mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_\odot) = \sum_n r_n \dot{\mathbf{e}}_n. \tag{3.14}$$

schreiben. Geometrisch bedeutet sie, dass die Summe der auf dem Sehstrahl senkrechten Geschwindigkeitskomponente der Sterne null sein muss. Ausgeschrieben lautet diese wichtige Vektorrelation (3.14)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \sum(e_{yn}^2 + e_{zn}^2) & -\sum e_{xn}e_{yn} & -\sum e_{xn}e_{zn} \\ -\sum e_{xn}e_{yn} & \sum(e_{xn}^2 + e_{zn}^2) & -\sum e_{yn}e_{zn} \\ -\sum e_{xn}e_{zn} & -\sum e_{yn}e_{zn} & \sum(e_{xn}^2 + e_{yn}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\odot x} \\ v_{\odot y} \\ v_{\odot z} \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \sum r_n \dot{e}_{xn} \\ \sum r_n \dot{e}_{yn} \\ \sum r_n \dot{e}_{zn} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Multiplizieren wir (3.13) skalar mit $\mathbf{v}_\odot$, so gilt für den „besten“ Apexvektor $\mathbf{v}_\odot$

$$\sum_n \left[\mathbf{v}_\odot^2 - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)^2\right] = -\sum_n r_n (\dot{\mathbf{e}}_n \circ \mathbf{v}_\odot) \tag{3.16}$$

Für den minimalen Wert der Quadratsumme (3.11) beim „günstigsten“ Apexvektor $\mathbf{v}_\odot$ gilt dann[2]

$$Q_{min} = \sum_n |r_n \dot{\mathbf{e}}_n|^2 + \sum_n r_n (\dot{\mathbf{e}}_n \circ \mathbf{v}_\odot) \tag{3.17}$$

Wegen (3.11) muss diese Quadratsumme etwas mit der mittleren *Geschwindigkeitsdispersion* der Sterne zu tun haben. Nehmen wir für die

[2] Eine ähnliche Formel für Q_{min} fand man auch im Nachlass von GAUSS; allerdings normierte GAUSS wegen fehlender Parallaxen alle Vektoren $r_n\,\dot{\mathbf{e}}_n$ auf Eins.

Geschwindigkeitsverteilung der Sterne die von Karl Schwarzschild gewählte Form

$$\mathbf{pdf}_S(\mathbf{v}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{v_x}{\sigma_{11}}\right)^2 + \left(\frac{v_y}{\sigma_{22}}\right)^2 + \left(\frac{v_z}{\sigma_{33}}\right)^2\right)\right]}{(2\pi)^{3/2}\sigma_{11}\,\sigma_{22}\,\sigma_{33}} \tag{3.18}$$

an, wo $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ den Geschwindigkeitsvektor und σ_{11}, σ_{22} und σ_{33} die Geschwindigkeitsdispersionen zu den drei orthogonalen Richtungen bezeichnen, so folgt für Q_{min}

$$Q_{min} = \frac{N}{4\pi}\int_K \left\{\int_{\mathbf{v}} \left(\mathbf{v}^2 - (\mathbf{e}\circ\mathbf{v})^2\right)\,\mathbf{pdf}_S[\mathbf{v}]\,d^3\mathbf{v}\right\}\,d\mathbf{e}, \tag{3.19}$$

wo $d\mathbf{e}$ eine Integration über die gleichmäßig mit Sternen belegte Himmelskugel bedeutet. Das Endergebnis lautet

$$\boxed{Q_{min} = \frac{2}{3}\,N\,\left[\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2\right].} \tag{3.20}$$

Der Wert ist also proportional der Spur des auf Hauptachsen transformierten Geschwindigkeitsellipsoiden. Die Beziehungen (3.13) sind im wesentlichen die *Gausschen Bedingungsgleichungen* aus dem Jahre 1822 zur Bestimmung des Sonnenapex aus Eigenbewegungen der Sterne. Im Briefwechsel mit Olbers wird aber nicht klar, wie Gauss auf diese Gleichungen gekommen ist. 1843 wurden sie unabhängig von Bravais[3] und 1860 von George Bidell Airy[4] aufgestellt. Sind die Sterne gleichmäßig

[3] Auguste Bravais (1811-1863). Auguste Bravais hatte Forschungsinteressen in Astronomie, Meteorologie, Geologie, Physik. Mit seinem Bruder Louis Bravais (1801-1843) Untersuchungen in der Botanik (Phyllotaxis: die Fibonacci-Zahlen und die spiralförmige Blattstellung von Pflanzen). Bekannt ist Auguste Bravais heute wegen seiner Entdeckungen in der Kristallographie (Reziproke Gittervektoren; 14 Einheitszellen der Kristalle (Bravais-Gitter) im 3D-Raum;)

[4] George Biddell Airy (1801-1892). Zu seiner Zeit war Airy ein bedeutender und einflussreicher Wissenschaftler. 46 Jahre (1835-1881) lang war er der *Astronomer Royal* und von 1872 bis 1873 *Präsident der Royal Society*. Bei der Entdeckung des Neptuns spielte er eine etwas unrühmliche Rolle. Er schrieb 518 wissenschaftliche Artikel und 11 Bücher über Themen aus Astronomie, Physik, klassischer Geschichte, Technik und Geophysik (Gezeitentheorie)

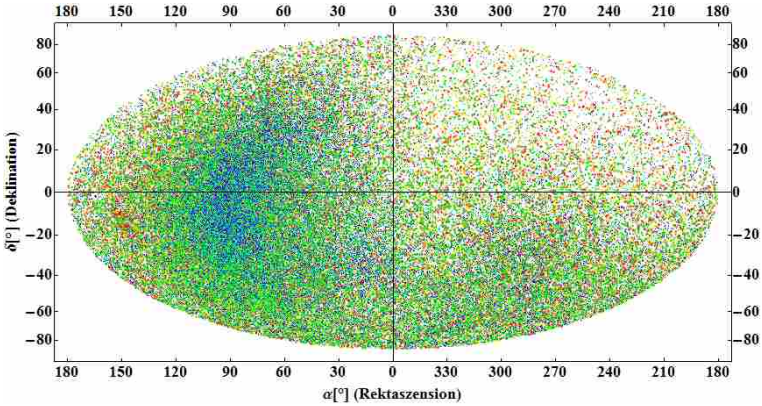


Fig. 3.1: *Die Richtungsverteilung der Eigenbewegungsvektoren* $\dot{\mathbf{e}}$ *von 113710 Sternen des HIPPARCOS Kataloges an der Himmelskugel. Im unteren Bild die gleiche Verteilung in galaktischen Koordinaten. Deutlich ist eine Häufung am Antapex-Punkt zu sehen. Doch bei dieser Datenmenge mit farbiger Entfernungscodierung sind auch Entfernungsabhängige Streueffekte zu erkennen. „Blaue“ Datenpunkte gehören zu Sternen mit der größten Entfernung, „rote“ zu sehr nahen Sternen. Die Kartenprojektion ist eine flächentreue Mollweide-Babinet Projektion*

über den Himmel verteilt, so folgt hieraus für große N ($\{N \to \infty\}$)

$$\boxed{\mathbf{v}_\odot = -\frac{3}{2N}\sum_n r_n \dot{\mathbf{e}}_n.} \tag{3.21}$$

Mit Hilfe der HIPPARCOS-Daten lassen sich die obigen Formeln direkt anwenden, da es heute relativ genaue Werte für die Entfernung r_n gibt. Die Entfernung in Metern folgt aus der geometrischen Parallaxe π_n zu

$$r_n[m] = \frac{AE[m]}{\pi_n[rad]}. \tag{3.22}$$

Im MKS-System hat die Winkelgeschwindigkeit $\dot{e}$ zunächst die Einheit [rad/s] (Bogenmaß pro Sekunde). Es gilt die Umrechnung

$$\dot{e}[rad/s] = \frac{1}{J[s]}\,\dot{e}[rad/J] \tag{3.23}$$

wobei $J[s]$ die Anzahl der Sekunden im siderischen Jahr bedeutet. Deshalb gilt nun auch (AE = Astronomische Einheit)

$$(r_n\,\dot{e}_n)\,[m/s] = \frac{AE[m]}{J[s]}\,\frac{\dot{e}_n[rad/J]}{\pi_n[rad]} \tag{3.24}$$

oder

$$(r_n\,\dot{e}_n)\,[km/s] = \frac{AE[km]}{J[s]}\,\frac{\dot{e}_n[rad/J]}{\Pi_n[rad]}. \tag{3.25}$$

Nun ist es egal, ob man Winkel in Bogenmaß oder in Millibogensekunden misst. Für die Apex-Geschwindigkeit der Sonne in km/s ergeben sich dann die modifizierten Gleichungen

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} \sum(e_{yn}^2+e_{zn}^2) & -\sum e_{xn}e_{yn} & -\sum e_{xn}e_{zn} \\ -\sum e_{xn}e_{yn} & \sum(e_{xn}^2+e_{zn}^2) & -\sum e_{yn}e_{zn} \\ -\sum e_{xn}e_{zn} & -\sum e_{yn}e_{zn} & \sum(e_{xn}^2+e_{yn}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\odot x} \\ v_{\odot y} \\ v_{\odot z} \end{pmatrix} \\ &= -4.74 \begin{pmatrix} \sum(\dot{e}_{xn}/\pi_n) \\ \sum(\dot{e}_{yn}/\pi_n) \\ \sum(\dot{e}_{zn}/\pi_n) \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Der Umrechnungsfaktor $4.74\,[km/s] \rightarrow AE[km]/J[s]$ garantiert, dass die Geschwindigkeit in km/s skaliert ist, wenn die Eigenbewegung in Milli-Bogensekunden pro Jahr und die Parallaxe in Milli- Bogensekunden gemessen wird. Die folgende Tabelle zeigt diese Geschwindigkeit **solar motion** für die 518 hellsten Sterne des HIPPARCOS-Kataloges[5] , rangiert nach steigender Entfernung: Die Variationen der Apexrichtung beschränken sich im galaktischen Koordinatensystem (l, b) nahezu auf die galaktische Länge l, ein Faktum, dass im 19. Jahrhundert gar nicht oder nicht genügend beachtet wurde. Der Wert mit den Rekordzahlen 1-100 stimmt fast mit dem heute gültigen **LSR** Wert der Sonne überein - drückt also wirklich die Abweichung von der lokalen galaktischen Kreisbahngeschwindigkeit aus. Nimmt man alles in ein System, so ergibt sich nach der Gauss-Bravais-Airy Methode der Apex zu

$$\alpha = \mathbf{269.88}^\circ \qquad \delta = +\mathbf{23.24}^\circ \qquad v_\odot = 22km/s \tag{3.27}$$

[5] An dieser Stelle muss ich mich insbesondere bei Günter Lay und Dr. Jochen Zönnchen vom AIFA in Bonn bedanken, die mir bei Fragen der Datenverarbeitung immer mit Rat und Tat zur Seite standen.

Nummer	$v_\odot$ [km/s]	$\alpha[°]$	$\delta[°]$	l [°]	b [°]
1-100	18.6	266.9	28.1	52.06	25.09
101-200	21.1	271.2	37.7	63.35	24.59
201-300	24.2	276.3	22.3	49.64	15.06
301-400	20.7	269.9	20.0	44.95	19.62
401-518	25.8	267.0	14.3	38.23	19.87

Tab. 3.1: *Der Sonnenapex und die Apexgeschwindigkeit aus einem Sternkatalog der hellsten Sterne der Sonnenumgebung mit zunehmender Entfernung.*

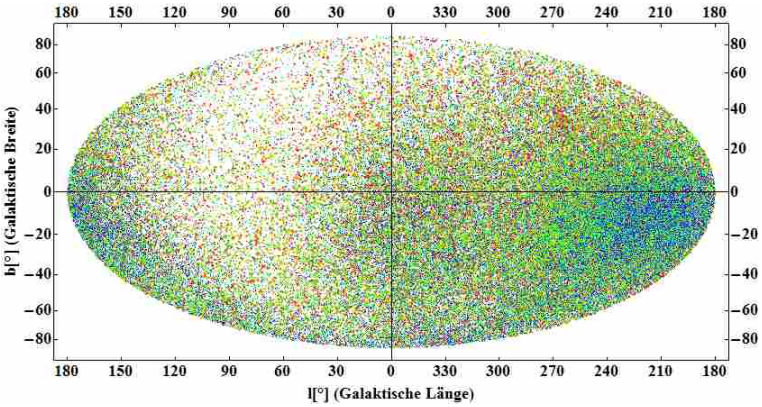


Fig. 3.2: *Die Richtungsverteilung der Eigenbewegungsvektoren* $\dot{\mathbf{e}}$ *von 113710 Sternen des HIPPARCOS Kataloges an der Himmelskugel – hier in galaktischen Koordinaten. Die Kartenprojektion ist eine flächentreue Mollweide-Babinet Projektion*

Für das Minimum der Quadratsumme Q_{min} gilt in den gleichen Skalierungen jetzt

$$Q_{min} = 4.74^2 \sum_n \left[\dot{\mathbf{e}}_n/\pi_n\right]^2 + 4.74 \sum_n (\dot{\mathbf{e}}_n \circ \mathbf{v}_\odot)/\pi_n \tag{3.28}$$

Da die Entfernungen der Sterne zur Sonne im 19. Jahrhundert nur schlecht oder zur Zeit von Herschel oder Gauss gar nicht bekannt waren, mussten die obigen Gleichungen weiter vereinfacht werden. Airy machte 1860 die “unerlaubte“ Approximation, die Entfernung umgekehrt proportional der Eigenbewegung zu setzen. Gauss nahm 1822 für den

Vektor $r_n \dot{\mathbf{e}}_n$ einen Einheitsvektor $\mathbf{c}_n$ an, der im Sinne der Eigenbewegung einen $\pi/2$ Abstand vom Sternort besitzt und auf dem Großkreis der Eigenbewegung liegt (Gauss-Punkt). Wir setzen nach Gauss (mit dem Index n)

$$A_n = \frac{\dot{\mathbf{e}}_{xn}}{|\dot{\mathbf{e}}_n|}; \quad B_n = \frac{\dot{\mathbf{e}}_{yn}}{|\dot{\mathbf{e}}_n|}; \quad C_n = \frac{\dot{\mathbf{e}}_{zn}}{|\dot{\mathbf{e}}_n|} \tag{3.29}$$

und

$$a_n = e_{xn}; \qquad b_n = e_{yn}; \qquad c_n = e_{zn} \tag{3.30}$$

Der Betrag des resultierenden Geschwindigkeitsvektors der Sonne (Apexvektor) hat dann natürlich nicht mehr die Dimension einer Geschwindigkeit, sondern er ist dann proportional dem Verhältnis der Sonnengeschwindigkeit zur mittleren Geschwindigkeit der betrachteten Sterngruppe. In dem entscheidenden Brief an Olbers vom 29. Januar 1822 schreibt Gauss die Formel (3.14) jetzt mit den obigen Bezeichnungen in der Form

$$\begin{pmatrix} \sum(b_n^2 + c_n^2) & -\sum a_n\, b_n & -\sum a_n\, c_n \\ -\sum a_n\, b_n & \sum(a_n^2 + c_n^2) & -\sum b_n\, c_n \\ -\sum a_n\, c_n & -\sum b_n\, c_n & \sum(a_n^2 + b_n^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum A_n \\ \sum B_n \\ \sum C_n \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Dies sind die Gausschen Gleichungen für den *Antapex*, die sich durch ein Minuszeichen von den Gleichungen (3.15) unterscheiden. Im Brief vom 29. Januar 1822 an Olbers heißt es unter anderem:

> *Fast muss ich mich schämen, Sie ... so oft mit meinem Geplauder über die eigne Bewegung der Fixsterne zu ermüden; aber noch einmal muss ich Ihre Nachsicht in Anspruch nehmen und eine Unrichtigkeit in meinem letzten Brief verbessern*[6]*...*
>
> *...Übrigens ist die Methode meines letzten Briefes noch großer Vervollkommnung fähig, wodurch sie wohl am Ende die* ***ächte*** *und am ungezwungesten mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu verknüpfende sein wird. Zugleich empfiehlt sie sich dann durch ihre große Einfachheit. Das wesentliche wäre folgendes...*

Im weiteren Verlauf des Briefes werden dann die obigen Gleichungen erläutert. Im Nachlass von Gauss fand sich auch die Funktion, die Gauss

[6] gemeint ist der Brief vom 22.-23. Januar 1822

mit dieser Methode zu einem Minimum machte wollte. Die Formel für den minimalen Wert der quadratischen Summe ließt sich

$$Q_{min} = N + \sum_n \left[A_n\,\xi + B_n\,\eta + C_n\,\zeta\right] \tag{3.32}$$

und ist das Analogon zu der „physikalischen Relation“ (3.17). Im Kapitel über die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Gausschen Apexrechnungen werden wir weiter unten eine Funktion angegeben, welche den Betrag $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ des so definierten Apexvektors in direkte Relation zum Verhältnis aus Sonnengeschwindigkeit zur mittleren Geschwindigkeit der Sterngruppe setzen.

Bis jetzt wurden keine Sternmassen in der Gauss - Bravais - Airy Methode betrachtet. Bravais hatte aber 1843 seine Apexmethode explizit mit Sternmassen formuliert. Die modifizierten Gleichungen mit den Sternmassen m_n lauten einfach

$$\begin{pmatrix} \sum m_n\,(e_{yn}^2+e_{zn}^2) & -\sum m_n\,e_{xn}e_{yn} & -\sum m_n\,e_{xn}e_{zn} \\ -\sum m_n\,e_{xn}e_{yn} & \sum m_n\,(e_{xn}^2+e_{zn}^2) & -\sum m_n\,e_{yn}e_{zn} \\ -\sum m_n\,e_{xn}e_{zn} & -\sum m_n\,e_{yn}e_{zn} & \sum m_n\,(e_{xn}^2+e_{yn}^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\odot x} \\ v_{\odot y} \\ v_{\odot z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \sum m_n\,r_n\dot{e}_{xn} \\ \sum m_n\,r_n\dot{e}_{yn} \\ \sum m_n\,r_n\dot{e}_{zn} \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Im Falle einer sehr großen Sternpopulation, wo die Massenverteilung nicht mit der Richtungsverteilung korreliert ist, gilt dann im Limes

$$\boxed{\mathbf{v}_\odot = -\frac{3}{2}\,\frac{\sum_n m_n\,r_n\dot{\mathbf{e}}_n}{\sum_n m_n}.} \tag{3.34}$$

Der Apexvektor, nach dieser Methode berechnet, ist also nicht *exakt identisch* mit demjenigen Wert, wo die Massen alle identisch gesetzt wurden.

3.3 Die Gaußsche Polygon - Methode

Graphische Methoden spielten in der Vergangenheit eine große Rolle, den Apex- oder Antapex-Punkt an der Himmelssphäre zu bestimmen. Ein erstes Verfahren stammte von Herschel (siehe letztes Kapitel). Ein anderes

Fig. 3.3: *Die Göttinger Sternwarte kurz nach ihrer Fertigstellung 1817, nach einem Aquarell von* Andreas Christian Besemann *(1760-1818). Im Wintersemester 1821/1822 las Gauss „Theoria motus cometarum“ und hatte als Zuhörer unter anderen auch den späteren Gymnasialprofessor in Hof,* Ludwig Christoph Schnürlein *(1792-1852), der Gauss bei den Apexrechnungen unterstützte ([33]).*

besteht darin, eine Karte der Richtungen der Eigenbewegungsvektoren $\dot{\mathbf{e}}_n$ am Himmel anzufertigen. Am Antapexpunkt sollte es dann charakteristische Häufungen geben. Eine eigene graphische Methode hat auch GAUSS 1822 entwickelt, nachdem sich zeigte, dass zwei seiner *vermeintlich äquivalenten Methoden* unterschiedliche Apexrichtungen ergaben. GAUSS teilt die Sterne jetzt in zwei Gruppen ein: in die *günstigen (prograden)* und die *ungünstigen (retrograden)* Sterne. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\odot \circ \dot{\mathbf{e}}_n &> 0; \qquad \text{ungünstige Sterne} \\ \mathbf{v}_\odot \circ \dot{\mathbf{e}}_n &< 0; \qquad \text{prograde (günstige) Sterne} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Durch jede Sternposition $\mathbf{e}_n$ und die Eigenbewegung $\dot{\mathbf{e}}_n$ wird ein Großkreisbogen

$$\mathbf{K}_n(\chi) = \mathbf{e}_n \cos(\chi) + \frac{\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n}{|\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n|} \sin(\chi) \tag{3.36}$$

definiert, der die Himmelssphäre in zwei Gebiete unterteilt. Die eine Hälfte enthält Punkte, von der sich der Stern mit Marke n entfernt, die andere diejenige, denen der Stern sich nähert. Zieht man diese größten Kreise für alle in Frage kommenden Sterne, so wird die ganze Kugelfläche in eine große Zahl von Polygonen unterteilt. Die $N(N-1)$ Eckpunkte dieser Polygone sind durch alle möglichen Zweierkombinationen von $\dot{\mathbf{e}}_n$ und $\dot{\mathbf{e}}_{n'}$ gemäß

$$\mathbf{P}_{n_1,n_2} = \frac{\dot{\mathbf{e}}_{n_1} \times \dot{\mathbf{e}}_{n_2}}{|\dot{\mathbf{e}}_{n_1} \times \dot{\mathbf{e}}_{n_2}|} \tag{3.37}$$

gegeben. Da GAUSS von BESSEL eine Tabelle von 71 Sternen mit Eigenbewegungen hatte, konnte er natürlich nicht alle 4970 Eckpunkte auf der Sphäre berechnen. Er beschränkte sich auf diejenigen Vektoren $\dot{\mathbf{e}}_n$, für die bei einem schon genähert bekanntem Apexort $\mathbf{v}_\odot$ sehr nahe

$$\mathbf{v}_\odot \circ \dot{\mathbf{e}}_n \approx 0 \tag{3.38}$$

ist. Sodann betrachtete er auf der Oberfläche der Einheitskugel mit $|\mathbf{x}| = 1$ die *Dichtefunktion* der Eigenbewegungsvektoren

$$\boxed{N_A[\mathbf{x}] = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{\Theta}[\mathbf{x} \circ \dot{\mathbf{e}}_n]} \tag{3.39}$$

als Funktion der Richtung $\mathbf{x}$ an der Himmelssphäre. In der heutigen mathematischen Schreibweise taucht hier die Heaviside-Funktion $\mathbf{\Theta}[z]$

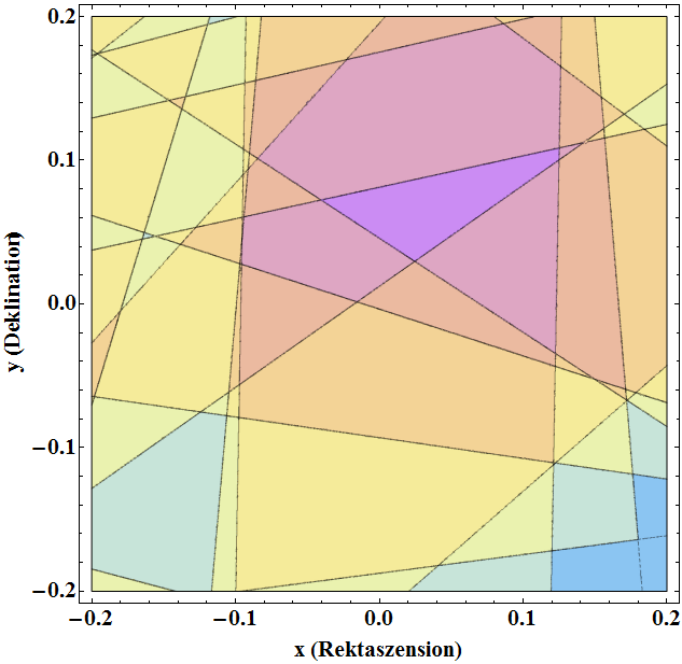


Fig. 3.4: *Das lokale Verhalten der Gausschen Funktion $N_A(\mathbf{x})$ an der Himmelssphäre in der Umgebung des Apex der Sonnenbewegung bei ($\alpha = 260°$, $\delta = 30°$), berechnet aus den 100 nahesten Sternen des HIPPARCOS Kataloges (Konturplot). Die Karte ist eine lokale tangentiale* ***gnomonische Projektion*** *in x - und y - Koordinaten an der Himmelskugel (siehe Text). In dieser Projektion sind Großkreise auf der Kugel einfache gerade Linien. Deutlich ist das Minimum von 24 Rückläufern von insgesamt 100 Sternen zu erkennen.*

auf, die als Integral der Dirac'schen Deltadistribution darstellbar ist und für $z > 0$ gleich 1, für $z < 0$ aber 0 ist. Es gilt

$$\mathbf{\Theta}[z] = \int_{-\infty}^{z} \delta[z]\, dz. \tag{3.40}$$

Anstatt der Heaviside - Funktion kann man auch einen Dirichlet - Faktor einführen, z.B. definiert durch

$$\mathbf{\Theta}[a] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[a\, u]}{u}\, du. \tag{3.41}$$

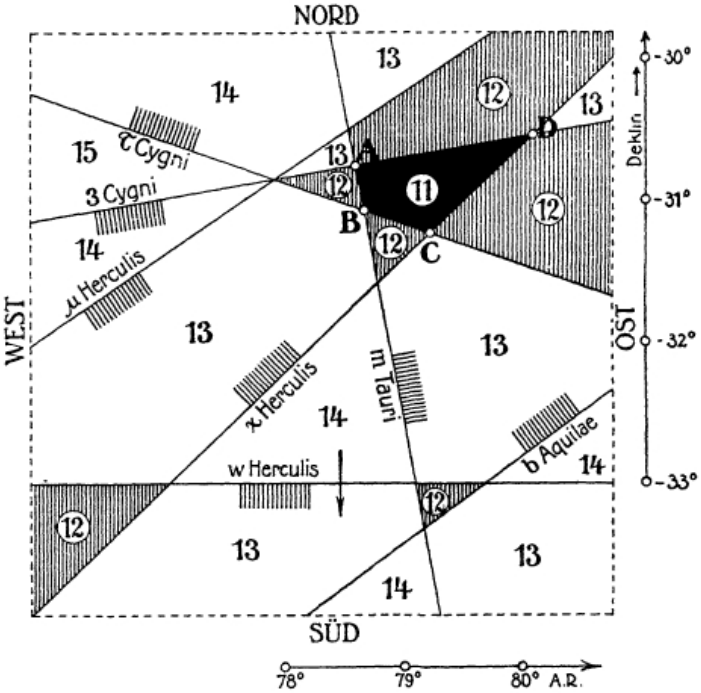


Fig. 3.5: *Die reproduzierte Originalskizze von* Gauss*, welche seine graphische Methode zur Apexbestimmung zeigt. Auf der äußeren Himmelskugel sieht man die Umgebung des Ant-Apex und Polygone mit den entsprechenden Zahlenwerten der „Functio discontinua“*

Dann lautet die wichtige **Gaußsche Kugelteilungsfunktion**

$$\boxed{N_A[\mathbf{x}] = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{\Theta}[\mathbf{x} \circ \dot{\mathbf{e}}_n].} \tag{3.42}$$

Gauss suchte nun denjenigen Punkt oder diejenige Richtung $\mathbf{x}$ auf, für welche die obige Dichtefunktion einen minimalen ganzzahligen Wert annimmt. In einem langen Brief vom 22. Januar 1822 erklärt Gauss sein Vorgehen gegenüber Olbers mit den Worten:

> *...Die Summe nach ihrem wahren Sinn ist eigentlich auf der Kugeloberfläche eine* ***functio discontinua*** *und ändert sich sprungweise von einer Figur zur anderen; indem man sich nämlich die ganze Kugeloberfläche durch die 71 größten Kreise, die durch die einzelnen Sterne senkrecht auf deren beobachteter Bewegung gezogen werden, in eine ungeheuer große Anzahl Dreiecke und andere Polygone zerlegt denkt. Es wird aber nicht schwer sein, das wahre P aufzufinden, wenn man sich die Mühe geben will, die Lage von etwa 6 oder 10 derjenigen dieser 71 größten Kreise zu bestimmen, die am nächsten bei dem oben gefundenen Punkte vorbeigehen...*

Doch schon eine Woche später, am 29. Januar 1822, schreibt Gauss unter anderem:

> *... Die genauere Prüfung des berechneten P meines letzten Briefes hat ergeben, dass nicht 12 sondern 13 Sterne sich von diesem Punkte entfernen, dass man aber zwei abhandeln kann, wenn man P in das Viereck (siehe Fig. 3.5) setzt, wo Rektaszension und Deklination der vier Ecken auf der äußeren Himmelskugel diese sind (für äquinoktium 1777.5)*

$$\begin{array}{lll} [A] & 78^\circ\,40' & -\,30^\circ\,40' \\ [B] & 78^\circ\,42' & -\,30^\circ\,57' \\ [C] & 79^\circ\,13' & -\,31^\circ\,09' \\ [D] & 80^\circ\,04' & -\,30^\circ\,32' \end{array}$$

In dieser Richtung ist somit die „Anzahldichte“ der Eigenbewegungsvektoren minimal. Die „Polygonmethode“ wurde somit zu einem wichtigen Test für die „wahre“ Richtung des Apex. Man muss nur diejenige Polygonfigur an der Himmelssphäre aufsuchen, für welche die *functio discontinua* $N_A[\mathbf{x}]$ minimale Werte annimmt.

Gnomonische Projektion: Gauss benutzte 1822 bei der Darstellung der Großkreise an der Himmelskugel eine lokale it gnomonische Projektion um den schon genähert bekannten Apexpunkt α_0 und δ_0. Die allgemeinen Formeln für eine solche Projektion lauten

$$X = \frac{\cos[\delta_0 + \Delta\delta]\,\sin[\Delta\alpha]}{\sin[\delta_0 + \Delta\delta]\,\sin[\delta_0] + \cos[\delta_0 + \Delta\delta]\,\cos[\delta_0]\,\cos[\Delta\alpha]}, \tag{3.43}$$

$$Y = \frac{\sin[\delta_0 + \Delta\delta]\ \cos[\delta_0] - \cos[\delta_0 + \Delta\delta]\ \sin[\delta_0]\ \cos[\Delta\alpha]}{\sin[\delta_0 + \Delta\delta]\ \sin[\delta_0] + \cos[\delta_0 + \Delta\delta]\ \cos[\delta_0]\ \cos[\Delta\alpha]}. \tag{3.44}$$

Die *gnomonischen* Koordinaten X und Y sind also Funktionen der Variablen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$. Da der Einheitsvektor $\mathbf{x}$ an der Himmelskugel jetzt die Darstellung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos[\alpha_0 + \Delta\alpha]\cos[\delta_0 + \Delta\delta] \\ \sin[\alpha_0 + \Delta\alpha]\cos[\delta_0 + \Delta\delta] \\ \sin[\delta_0 + \Delta\delta] \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

hat, lässt sich das Argument $\mathbf{x} \circ \dot{\mathbf{e}}_n$ des Dirichlet – Faktors durch die gnomonischen Koordinaten X, Y ausdrücken. Mit den orthonormierten Basisvektoren

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \cos[\alpha_0]\cos[\delta_0] \\ \sin[\alpha_0]\cos[\delta_0] \\ \sin[\delta_0] \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

und

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\sin[\alpha_0] \\ +\cos[\alpha_0] \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{3.47}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\cos[\alpha_0]\sin[\delta_0] \\ -\sin[\alpha_0]\sin[\delta_0] \\ \cos[\delta_0] \end{pmatrix} \tag{3.48}$$

ergibt sich einfach

$$\mathbf{x} \circ \dot{\mathbf{e}}_n = \frac{(\mathbf{x}^{(0)} \circ \dot{\mathbf{e}}_n) + (\mathbf{x}^{(1)} \circ \dot{\mathbf{e}}_n)\, X + (\mathbf{x}^{(2)} \circ \dot{\mathbf{e}}_n)\, Y}{\sqrt{1 + X^2 + Y^2}}. \tag{3.49}$$

Für einen bestimmten Stern der Marke n liefert also die Gaussche Apexfunktion $N_A(\mathbf{x})$ nur dann den Wert 1, wenn man sich in der $X - Y$ Ebene in einem Gebiet befindet, in der die Relation

$$(\mathbf{x}^{(0)} \circ \dot{\mathbf{e}}_n) + (\mathbf{x}^{(1)} \circ \dot{\mathbf{e}}_n)\, X + (\mathbf{x}^{(2)} \circ \dot{\mathbf{e}}_n)\, Y \geq 0 \tag{3.50}$$

erfüllt ist. Das Gleichheitszeichen in (3.50) definiert dann die „gnomonischen“ Geraden (Großkreise an der Himmelskugel), welche in den Figuren (3.4) und (3.5) für einzelne Sterne zu sehen sind. Mit

$$C_n = \sqrt{(\mathbf{x}^{(1)} \circ \dot{\mathbf{e}}_n)^2 + (\mathbf{x}^{(2)} \circ \dot{\mathbf{e}}_n)^2} \tag{3.51}$$

und den Abkürzungen

$$c_{xn} = (\mathbf{x}^{(1)} \circ \dot{\mathbf{e}}_n)/|C_n|, \tag{3.52}$$

$$c_{yn} = (\mathbf{x}^{(2)} \circ \dot{\mathbf{e}}_n)/|C_n|, \tag{3.53}$$

$$c_n = (\mathbf{x}^{(0)} \circ \dot{\mathbf{e}}_n)/|C_n| \tag{3.54}$$

lautet die *Hessenormalform* der kritische Geradengleichung

$$c_n + c_{xn}\, X + c_{yn}\, Y = 0. \tag{3.55}$$

Der Betrag von c_n ($\equiv |c_n|$) bezeichnet jetzt den Abstand der Geraden mit der Marke n vom Ursprung $(X, Y) = (0, 0)$ des lokalen Koordinatensystems. In Vektorform gilt für die Geraden $\mathbf{g}$

$$\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} -c_n\, c_{xn} + c_{yn}\, t \\ -c_n\, c_{yn} - c_{xn}\, t \end{pmatrix}, \tag{3.56}$$

wobei t einen freien Parameter darstellt. Aus dieser Darstellung wird ersichtlich, dass der Vektor $\{c_{xn}, c_{yn}\}$ *senkrecht* auf der Geraden steht und in die Richtung des *Antapex* zeigt; also in die Richtung, wo die Halbkugel der Gausschen Funktion den Wert eins hat. Auf diese Weise hat wohl auch Gauss 1822 entschieden, auf welcher Seite der Geraden die Bedingung (3.50) erfüllt ist. Die bevorzugte Methode von Gauss für Apexbestimmung war somit wohl (3.39), denn das Resultat dieser Betrachtung hält er für würdig, im Jahre 1828 Alexander v. Humboldt in Berlin auf einer Versammlung der Naturforscher mitzuteilen. Auch später, nämlich 1838, ist er sehr daran interessiert, seine schon Jahre zurückliegenden Rechnungen nun Argelander mitzuteilen ([26]). Der Grund dürfte wohl in ihrem *zahlentheoretisch - geometrischen* Charakter als auch in ihrer graphischen Anschaulichkeit liegen. Gauss hat 1838 das Tableau von Argelander[7] mit immerhin jetzt 390 Sternen nach der Methode (3.39) als auch nach (3.15) untersucht. Die eine rein rechnerische Methode lieferte einen ersten Zahlenwert für die Apexrichtung, deren Umgebung dann mit der anschaulichen Methode (3.39) genauer untersucht wurde. Am 16. Februar 1838 schrieb Gauss an Argelander einen

[7] Gauss vergleicht es wegen seiner numerischen Fehler mit einem Augiastall; allerdings hat Gauss selber bei der Auswertung Verwechselungen und kleine Rechenfehler begannen.

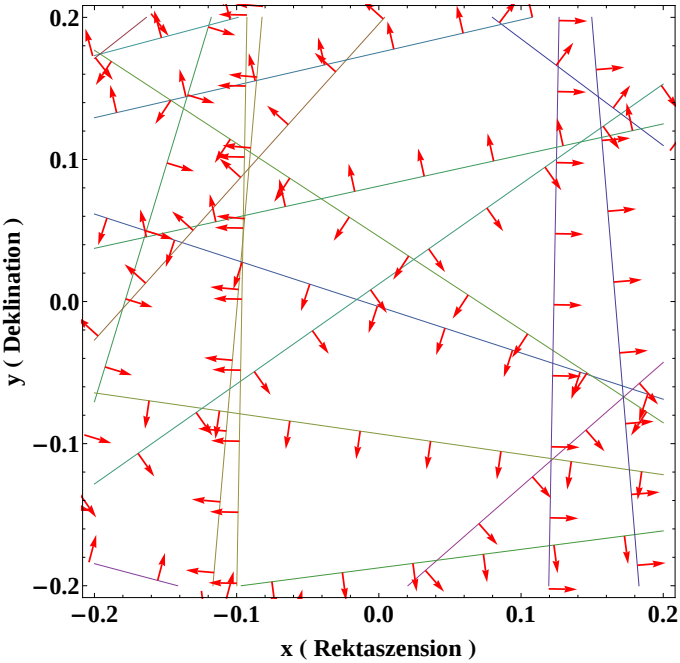


Fig. 3.6: *Die unterschiedlichen Geraden nach (3.55) in der gnomonischen Projektion an der Himmelssphäre in der Umgebung des Apex der Sonnenbewegung bei ($\alpha = 260°$, $\delta = 30°$), berechnet aus den 100 nahesten Sternen des HIPPARCOS Kataloges. Die roten Pfeile stellen die Vektoren (c_{nx}, c_{ny}) der jeweiligen Geraden (3.55) dar. Sie zeigen „grob“ in die Richtung des Antapex.*

sehr lobenden Brief zu seiner Arbeit über die Bestimmung der eigenen Bewegung des Sonnensystems aus den Eigenbewegungen der sogenannten „Fixsterne“:

> *Für das Geschenk, welches Sie mir mit Ihrer Schrift über die Bewegung des Sonnensystems gemacht haben, und für Ihren gütigen Brief habe ich Ihnen meinen verbindlichsten Dank abzustatten. Jene habe ich mit großem Vergnügen gelesen: ich glaube nicht, dass Sie einen einzigen Leser haben, der an dem Gegenstande ein lebhafteres Interesse nimmt, als ich. Ich glaube Ihnen mein Interesse nicht besser beweisen zu können,*

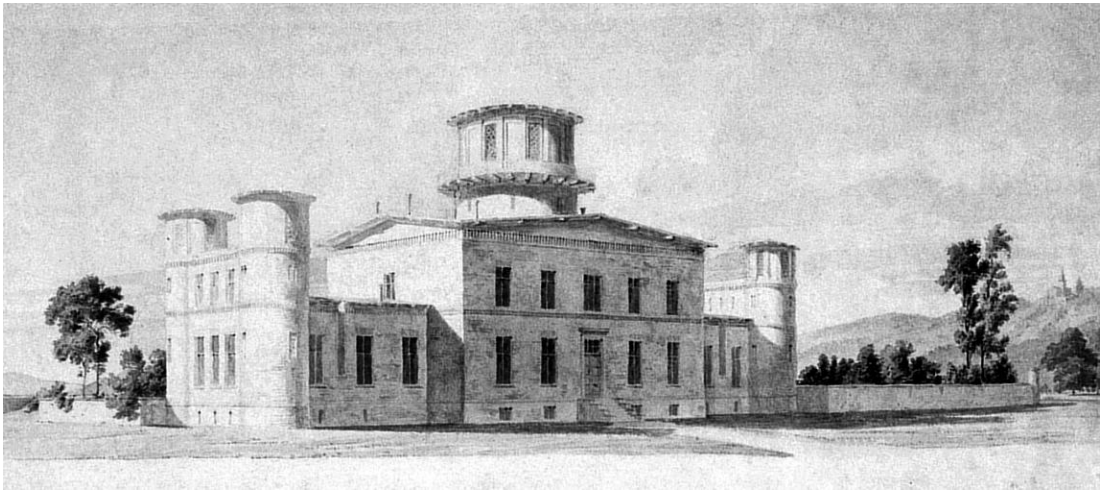


Fig. 3.7: *Die von 1840-1845 nach Entwürfen von P.J.* LEYDEL *und mit Korrekturen von K.F.* SCHINKEL *erbaute Bonner Sternwarte an der sogenannten „Alten Sandkaule". Im Jahre 1838 wurde F.W.A.* ARGELANDER *von Helsinki nach Bonn berufen. Seine einführende Habilitationsschrift betraf die rechnerisch aufwendige Bestimmung der eigenen Bewegung des Sonnensystem aus über 300 Eigenbewegungen heller Sterne. ([4]).(Bild: Entwurf Schinkel 1838)*

als wenn ich einiges von meinen früheren Versuchen über dieselbe Frage beifüge.

Sie wissen, dass 1819 auf meine Veranlassung dieselbe Untersuchung von der hiesigen Societät der Wissenschaften als Preisfrage aufgegeben war. Der Termin war Michaelis 1822. Zum Teil in der Absicht, mich im Voraus auf diesem Gebiete zu orientieren, um etwa einlaufende Konkurrenzschriften gründlich beurteilen zu können, zum Teil durch eine andere äußere Veranlassung, beschäftigte ich mich im Anfang dieses Jahres 1822 selbst mit Rechnungen darüber, nach den Daten, die damals zu Gebote standen; ich kam auf eine nicht unbeträchtliche Anzahl ***verschiedener*** *Methoden, nach denen das Problem sich behandeln ließ, und habe in Beziehung auf mehrere die Rechnung wenigsten provisorisch ausgeführt. Vieles von den meinigen damaligen Untersuchungen habe ich, gewissermaßen unmittelbar wie sie entstanden, dem Dr. Olbers in Briefen mitgeteilt: allein leider sind meine meisten Papiere darüber entweder nicht aufbewahrt, oder wenigstens jetzt nicht aufzufinden...*

In diesem Brief an Argelander zu Anfang des Jahres 1838 erwähnt Gauss auch eine modifizierte Abzählmethode, um den wahrscheinlichsten Ort des Apex zu bestimmen. Sie ist eine Art „gewichtete“ Polygonmethode. Minimiert werden soll die Funktion $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, definiert als

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N} \left(1 - (\mathbf{x} \circ \mathbf{e}_n)^2\right) \, \mathbf{\Theta}[\mathbf{x} \circ \dot{\mathbf{e}}_n].} \tag{3.57}$$

Gauss berichtet Argelander im obigen Brief weiter, dass er 1822 begonnen hätte, diese Funktion für die Himmelskugel zu berechnen. Aus Zeitmangel wurde sie dann aber abgebrochen. Geometrisch bedeutet diese Methode, auf der Himmelskugel die Funktion $\sum \sin[\vartheta_n]^2$ über die ungünstigen Sterne zum Minimum zu machen, wo der Winkel ϑ_n den Abstand eines Sternes vom Apex oder Antapex bezeichnet. Der Rechenaufwand ist hier natürlich höher als in der einfachen Polygonabzählmethode. Im Briefwechsel mit Olbers ist von dieser Methode aber

nie die Rede gewesen. Vielleicht hat GAUSS 1838 diese letztendlich unnötige „gewichtete“ Methode nur erwähnt, weil ARGELANDER selber eine „gewichtete“ Apexmethode mit den gleichen $\sin[\vartheta_n]^2$ Faktoren benutzt hat. Vom kinematisch - dynamischen Standpunkt aus sind aber diese Gewichtsfaktoren überflüssig. Auf die rechnerisch schwer durchführbare *Argelandersche* Apex - Methode wird noch in einem separaten Kapitel eingegangen.

Auch muss noch untersucht werden, warum die Gaussche Abzählmethode (Polygonaufteilung) tatsächlich den „richtigen“ Apex liefert. Ist diese Methode wirklich invariant gegenüber *anisotropen* Richtungsverteilungen und Geschwindigkeitsverteilungen der Sterne?

3.4 Die Gauss - Bessel - Kobold Methode

WILHELM HERSCHEL war einer der ersten, der aus nur wenigen bekannten Eigenbewegungen von Sternen ein „*Fluchtpunkt*“ der Sonnenbewegung an der Himmelssphäre abgeschätzt hat. Diese Methode war der Beginn einer Reihe von Verfahren, die man die eigentlich *astronomischen* Verfahren nennen könnte. Es sind rein geometrische Verfahren, die ohne den Begriff einer räumlichen Geschwindigkeit auskommen. Unterschiedliche Varianten wurden von OLBERS (1758-1840), BESSEL (1784-1846), ARGELANDER (1799-1875) und anderen angewendet. Die mathematisch anspruchsvollste Methode wurde aber von GAUSS, BESSEL und später von H. KOBOLD und P. HARZER formuliert[8]. Aus heutiger Sicht ist diese Methode aber nicht in der Lage, die Apexrichtung zu bestimmen, sondern sie macht eher eine Aussage über die *anisotropen* Geschwindigkeitsverteilungen und Richtungsverteilungen der Sterne in der Sonnenumgebung.

Nach der Gleichung (3.10) gilt

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_\odot) = r_n\,(\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n) \tag{3.58}$$

Multiplizieren wir nun (3.58) mit $\mathbf{v}_\odot$, so folgt unmittelbar

$$\mathbf{v}_\odot \circ (\mathbf{e}_n \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_\odot)) = \mathbf{v}_\odot \circ (\mathbf{e}_n \times (r_n \dot{\mathbf{e}}_n)) \tag{3.59}$$

oder, weil $\mathbf{v}_\odot$ senkrecht auf $\mathbf{v}_\odot \times \mathbf{e}_n$ steht, alternativ

$$\mathbf{v}_\odot \circ (\mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_n) = \mathbf{v}_\odot \circ (\mathbf{e}_n \times (r_n \dot{\mathbf{e}}_n)). \tag{3.60}$$

[8] ARGELANDER formulierte 1838 die mathematisch komplizierteste Apexmethode

Führen wir als Vereinfachung für ein dreifaches Vektorprodukt die Abkürzung

$$\mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \tag{3.61}$$

ein, so lauten die obigen Beziehungen

$$[\mathbf{v}_\odot, \mathbf{e}_n, \mathbf{v}_n] = [\mathbf{v}_\odot, \mathbf{e}_n, r_n \dot{\mathbf{e}}_n] \tag{3.62}$$

Nach unserer Prämisse sollen jetzt $\mathbf{v}_n$ und $\mathbf{e}_n$ völlig unkorrelierte statische Größen sein.[9], soll die linke Seite der obigen Identität ein quadratisches Minimum werden. Quadrieren dieser Gleichung und Summation über alle Sterne führt dann zur quadratischen Form $Q_G(\mathbf{v}_\odot)$ als Funktion von $\mathbf{v}_\odot$

$$\boxed{Q_G(\mathbf{v}_\odot) = \sum_{n=1}^{N} [\mathbf{v}_\odot, \mathbf{e}_n, \mathbf{v}_n]^2 \equiv \sum_{n=1}^{N} [\mathbf{v}_\odot, \mathbf{e}_n, r_n \dot{\mathbf{e}}_n]^2 \,.} \tag{3.63}$$

Der letzte Term kann jetzt ganz nach Gauss im Bild der „Sphärischen Astronomie“ an der Himmelskugel gedeutet werden. Führt man den Winkel θ ein, der hier den Kreisbogenabstand des konstanten Richtungsvektors $\mathbf{v}_\odot$ vom Großkeisbogen der Eigenbewegung $\dot{\mathbf{e}}$ eines Sterns darstellt, so folgt

$$\boxed{Q_G(\mathbf{v}_\odot) = |\mathbf{v}_\odot|^2 \sum_{n=1}^{N} |r_n \, \dot{\mathbf{e}}_n|^2 \, \sin^2[\theta_n].} \tag{3.64}$$

Die linke Seite stellt die physikalische Deutung der rechten astronomisch beobachtbaren Seite dar. Gauss suchte nun Anfang 1822 diejenige Richtung von $\mathbf{v}_\odot$ auf, welche die quadratische Form zu einem Minimum macht. In dieser Richtung sollte dann der Apex liegen. Unter welcher Prämisse diese Annahme richtig ist, kann man heute leicht zeigen. Wir nehmen für die $\mathbf{v}_n$ eine *isotrope* Geschwindigkeitsverteilung mit der Dichte

$$\mathbf{pdf}_M(\mathbf{v}) = \frac{8}{\pi^3 \, v_m^3} \, \exp\left[-\frac{4}{\pi} \, \frac{\mathbf{v}^2}{v_m^2}\right] \tag{3.65}$$

an. Dabei ist $\mathbf{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ und v_m bedeutet hier die mittlere Geschwindigkeit der Sterngruppe. Mit dem Einheitsvektor $\mathbf{x}$, definiert durch

$$\mathbf{v}_\odot = |\mathbf{v}_\odot| \, \mathbf{x},$$

[9] die Verletzung dieser wichtigen Bedingung in der Sonnenumgebung hatte Gauss 1822 zu einigen letztendlich unverstandenen Paradoxien geführt.

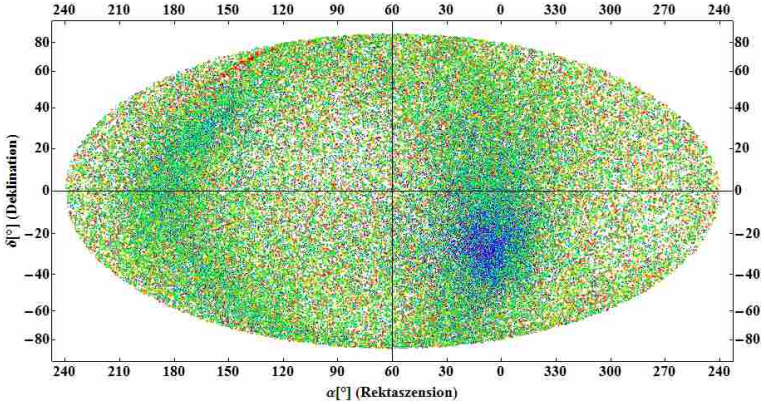


Fig. 3.8: *Die Richtungsverteilung der Besselpole* ($\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n$) *von 113710 Sternen des HIPPARCOS Kataloges an der Himmelskugel. Deutlich ist für Sterne kleiner Parallaxen (blaue Punkte) eine primäre Häufung dieser „Drehimpulsvektoren“ um den galaktischen Südpol zu erkennen. Daraus folgt sofort, dass unsere Galaxis mit dem Uhrzeigersinn rotiert. Deutlich ist auch eine sekundäre Häufung von „Besselpolen“ in Form eines „Gürtelringes“ aus Sternen mittlerer Parallaxen zu erkennen. Die mittige Achse dieses Haloringes bestimmt sehr grob die Apex – Antapexrichtung der Sonnenbewegung (Gauss – Kobold Methode), denn hier sollte* $Q_{Gauss}(\mathbf{x})$ *minimal werden (Isotrope Geschwindigkeitsverteilung). Der gesamte Sachverhalt und seine Komplikationen wurde im 19. Jahrhundert noch nicht richtig verstanden - auch nicht von H. Kobold 1893, der mit großer Sorgfalt eine erste Karte der Besselpole angelegt hatte. H. Kobold hatte noch nicht genügend Daten von weiter entfernten Sternen zu Verfügung. (Flächentreue Mollweide – Babinet Projektion).*

gilt für die normierte quadratische Form $Q_G(\mathbf{x})$

$$Q_G(\mathbf{x}) = \frac{N}{4\pi} \int \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{x}, \mathbf{e}, \mathbf{v}]^2 \; \mathbf{pdf}_M(\mathbf{v}) \, d^3\mathbf{v} \right) d\mathbf{e}, \qquad (3.66)$$

wobei über alle Geschwindigkeiten und die *gleichmäßig mit Sternen bedeckte Himmelskugel* integriert wird. Wir orientieren das Koordinatensystem so dass die x - Achse in die Richtung des Apexvektors $\mathbf{v}_\odot$ zeigt. Dann wird die quadratische Form $Q_G(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}$ auf Hauptachsen

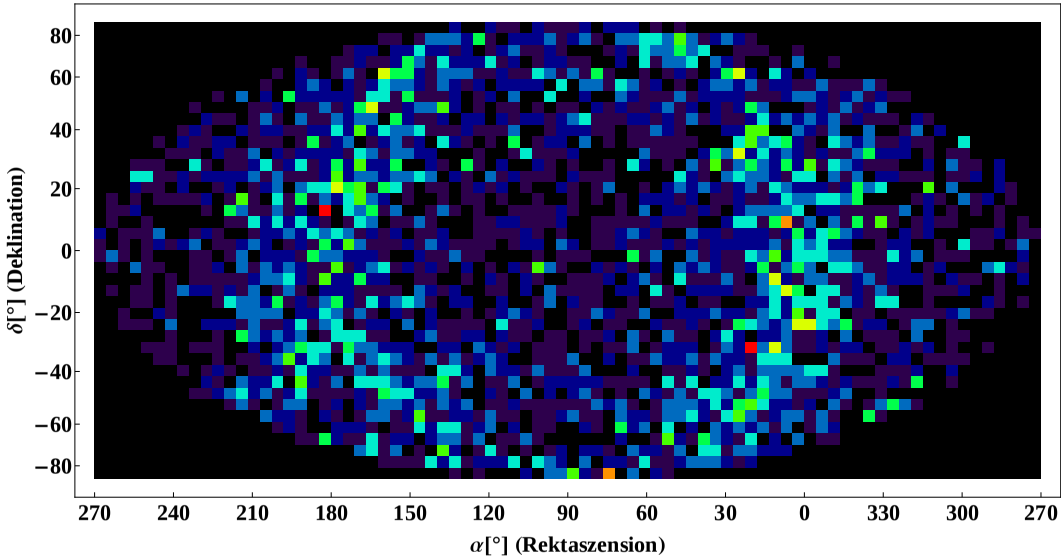


Fig. 3.9: *Die Dichteverteilung der Besselpole* ($\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n$) *von den 4000 nahesten Sternen des HIPPARCOS Kataloges an der Himmelskugel. Die Bin – Auflösung* ($5° \times 5°$) *entspricht in etwa der Arbeit von H.* KOBOLD *aus dem Jahre 1893. Im Jahre 1897 erhielt H.* KOBOLD *auf der Exposition Internationale de Bruxelles eine Bronzemedaille für eine entsprechende Ausarbeitung des Auwers - Bradley Kataloges. Ein leuchtender „Gürtelring“ von Besselpolen - bedingt durch die Eigenbewegung der Sonne - ist zu erkennen. Hinweise auf eine galaktische Rotation mit galaktischem Pol konnte man damals (1893 - 1897) noch nicht sicher erkennen. (Flächentreue Mollweide-Babinet Projektion)*

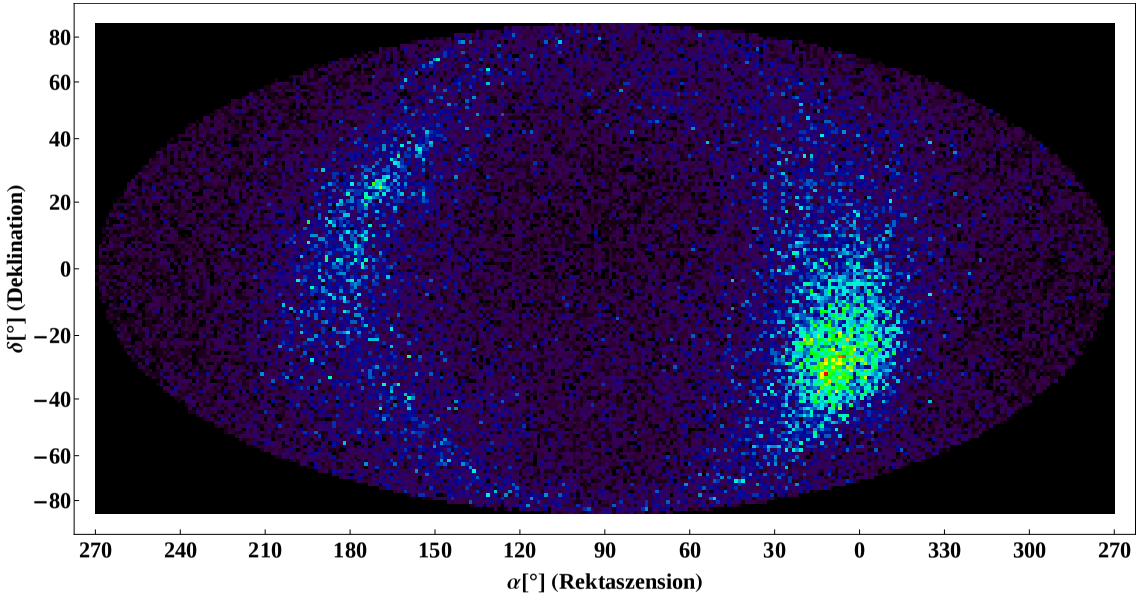


Fig. 3.10: *Dichteverteilung der Besselpole von 113710 Sternen des HIPPARCOS Kataloges. Zusätzlich zur Apexbewegung der Sonne (Gürtelring) ist nun auch primär der galaktische Südpol und sekundär auch der Nordpol zu erkennen - zur Zeiten von Kobold noch nicht auflösbar. Die Binzählungen in den Graphiken wurden mit der software Mathematica durchgeführt. (Flächentreue Mollweide-Babinet Projektion)*

transformiert und man erhält für eine große Anzahl N von Sternen

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{12} N\, v_m^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} N\, (\frac{\pi}{4} v_m^2 + \mathbf{v}_\odot^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} N\, (\frac{\pi}{4} v_m^2 + \mathbf{v}_\odot^2) \end{pmatrix}$$

Die entscheidende Matrix hat relle Eigenwerte mit der Reihenfolge

$$\lambda_{x_1} < \lambda_{x_2} \equiv \lambda_{x_3}. \tag{3.67}$$

Hier sieht man, dass der kleinste Eigenwert λ_{x_1} der Matrix in die Apex - Richtung (x_1 - Achse) fällt. Genau dies ist aber die Aussage von Gauss im Briefwechsel mit Olbers vom 15. Januar 1822. Durch den Vergleich der Eigenwerte kann Gauss auch eine erste Abschätzung zur Größe von $v_\odot$ im Vergleich zu v_m der Sterne machen. So liest man am Ende des Briefes:

> *Es scheint mir bemerkenswerth, dass jenes $\sum \sin(PT)^2$ zugleich die Summe der Quadrate der kleinsten wirklichen Bewegung der Sterne ist, womit man die beobachten erklären kann, die der $\odot = 1$ gesetzt; es würde aber für meinen heutigen Brief viel zu weitläufig werden, dies umständlich zu entwickeln..*

Auch eine weitere Briefstelle von Gauss an Olbers wird nun klar: Der kleinste Eigenwert hat etwas mit dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat der Sternpopulation zu tun. Denn es gilt

$$v_m = \sqrt{\frac{12\, \lambda_{x_1}}{\pi\, N}}. \tag{3.68}$$

Die *entscheidende* Voraussetzung für diese Apex - Methode ist aber leider die **perfekte Isotropie** der Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_n$ und auch der Richtungen $\mathbf{e}_n$. Zum Beispiel müssen die beiden anderen Eigenwerte exakt gleich sein. Abweichungen von diesem Befund deuten zumindest auf eine **anisotrope** Geschwindigkeitsverteilung der Sterne in der Sonnenumgebung hin. Doch es kommt noch schlimmer: E. Anding zeigte 1896 und 1901, dass die *Besselmethode*, wie sie um 1900 allgemein genannt wurde, nicht invariant gegenüber anisotropen Richtungsverteilungen der Sterne am Himmel ist. Eine schwere Kritik an den Arbeiten seines Zeitgenossen und Kollegen H. Kobold. Dieser schrieb in seiner Autobiographie in einer Rückschau:([48])

> *...Im Sommer 1887 nahm ich meine Untersuchungen über die Eigenbewegungen der Fixsterne wieder auf und berechnete die Pole der Eigenbewegungen für die Sternen des Auwersschen Fundamentalkataloges. Als ich diese Pole in dazu besonders geeignete Karten eintrug, machte ich die Entdeckung, dass die bisher nach Argelanders Bestimmung angenommene Richtung der Sonnenbewegung die weit überwiegende Zahl der Bewegungen durchaus nicht darstelle, wenn man diese Bewegungen als parallaktisches Abbild der Sonnenbewegung auffassen wolle. Unter dieser Voraussetzung musste der Zielpunkt um* 30° *verschieden werden*[10].

Hier stößt Kobold Ende des 19. Jahrhunderts auf das gleiche Problem, welches schon 1822 Olbers und 1838 Gauss intensiv beschäftigte. Zu einem endgültigen Schluss ist aber auch Gauss 1838 im Briefwechsel mit Argelander noch nicht durchgedrungen, obwohl seine beiden Hauptmethoden so unterschiedliche Richtungen ergaben. Kobold glaubte allerdings noch 1899, dass nur die „Bessel - Methode“ die wahre Apexrichtung liefere, aber schon Karl Schwarzschild hatte 1907 durch Einführung seiner „Ellipsoidverteilung“ das Dilemma zwischen der „Gauss - Airy - Bravais Methode“ und der „Gauss - Bessel - Kobold Methode“ prinzipiell zu Gunsten der Ersteren gelöst.

3.5 Die Olbers'sche Apexrechnung

Es ist interessant, zum Vergleich die beiden historischen Olbersschen Rechnungen zur wahrscheinlichsten Apexrichtung zu betrachten. Der inzwischen 63 - jährige Olbers hatte in einem Brief an Gauss vom 25. November 1821, an Bessel vom 24. Dezember 1821 und wieder an Gauss vom 29. Dezember 1821 seine Rechenmethode dargelegt. Er leitet zunächst die obige Gleichung (3.58)

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_\odot) = r_n \left(\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n\right) \tag{3.69}$$

[10] In seinem Buch *Der Bau des Fixsternsystems* von 1906 gilt nach Argelander für den Zielpunkt $\alpha = 270°$, $\delta = 30°$, nach Kobold aber $\alpha = 270°$, $\delta = 0°$

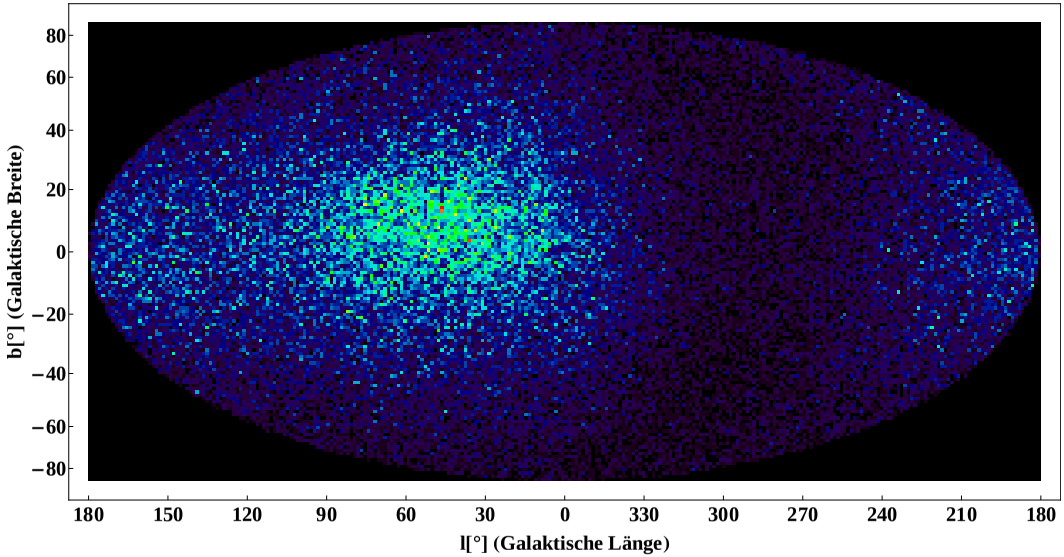


Fig. 3.11: *Die Dichteverteilung der von der Apexbewegung der Sonne befreiten tangentialen Geschwindigkeitsvektoren* $\mathbf{v}_\odot - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\,\mathbf{e}_n + r_n\,\dot{\mathbf{e}}_n$ *von 113710 Sternen des HIPPARCOS Kataloges an der Himmelskugel. Deutlich ist eine asymmetrische Polarität der Verteilung entlang des galaktischen äquators zu erkennen. Darum entstand 1904 die Kapteyn - Eddingtonsche Zweistromhypothese, wobei die damalige Beobachtung durch zwei entgegengesetzte Sternströme („star streams“) erklärt werden sollte. 1907 schlug dann* SCHWARZSCHILD *seine „ökonomischere“ Ellipsoidverteilung der Geschwindigkeiten vor. Außerdem ist die „Vertexabweichung“ zu erkennen, wodurch der Geschwindigkeitsellipsoid nicht exakt zum galaktischen Zentrum ausgerichtet ist. Ursache ist die spiralförmige und auch balkenförmige innere Struktur der Milchstraße. (Flächentreue Mollweide – Babinet Projektionen)*

Fig. 3.12: *Das noch in den 1890er Jahren stehende Wohnhaus von* Heinrich Wilhelm Olbers *(1758-1840) in Bremen im Domviertel, Sandstraße 15 (16). Zu sehen sind zwei hervorstehende Erkerzimmer, die nach Westen und nach Süden gerichtet sind. Nach dem Tod seiner Tochter Henriette Marie Dorothea Focke, geb. Olbers, (1786-1818) und seiner zweiten Ehefrau Anna Adelheid Lürssen (1765-1820) widmete sich der Arzt Olbers nur noch der Astronomie. (Quelle:* Wilhelm Schur*: Neue Reduktion der von Wilhelm Olbers im Zeitraume von 1795 bis 1831 auf seiner Sternwarte in Bremen angestellten Beobachtungen von Kometen und kleinen Planeten; Berlin Julius Springer, 1899.)*

ab. Die Endgleichung von OLBERS ergibt sich sehr einfach, wenn man (3.69) skalar mit dem Vektor $\mathbf{v}_\odot$ multipliziert. Dann gilt

$$[\mathbf{v}_\odot, \mathbf{e}_n, \mathbf{v}_n] = r_n\,[\mathbf{v}_\odot, \mathbf{e}_n, \dot{\mathbf{e}}_n] \tag{3.70}$$

OLBERS substituiert für den Apexvektor $\mathbf{v}_\odot$ den Ausdruck

$$\mathbf{v}_\odot = \mathbf{v}_{z\odot}\ (P,\, Q\,, 1) \tag{3.71}$$

Die Größen P und Q sind dann gegeben durch

$$P = \frac{\mathbf{v}_{x\odot}}{\mathbf{v}_{z\odot}}; \qquad Q = \frac{\mathbf{v}_{y\odot}}{\mathbf{v}_{z\odot}}. \tag{3.72}$$

Damit ergibt sich bei OLBERS die Bedingungsgleichung

$$[(P,\, Q\,, 1)\,, \mathbf{e}_n, \dot{\mathbf{e}}_n] = \frac{[\mathbf{v}_\odot, \mathbf{e}_n, \mathbf{v}_n]}{\mathbf{v}_{z\odot}\, r_n}, \tag{3.73}$$

die OLBERS in der Form $a\,P + b\,Q + c = \epsilon$ schreibt. Die Konstanten sind dabei durch die Vektoridentität $(a, b, c) = (\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n)$ gegeben. Der Vektor (a, b, c) bezeichnet also bei OLBERS den „Besselpol“ eines Sternes der Marke n. OLBERS versuchte nun zwei Methoden, um P und Q aus einem Datensatz von etwa 70 Sternen zu berechnen. 1). Er teilt die Sterne in zwei Gruppen ein, je eine Gruppe mit $c > 0$ und eine mit $c < 0$. Aus den sich durch Summation über die Sterne ergebenden zwei Gleichungen mit $\sum_n \epsilon_n = 0$ erhält er dann Werte für P und Q und für die Apexrichtung $(\alpha = +\mathbf{276}^\circ, \delta = +\mathbf{15}^\circ)$. 2). OLBERS wendet alternativ die Methode der kleinsten Quadrate an und minimiert die Funktion

$$F[P, Q]_{Olbers} = \sum_{n=1}^{N} [(P,\, Q\,, 1)\,, \mathbf{e}_n, \dot{\mathbf{e}}_n]^2. \tag{3.74}$$

Er erhält nun die deutlich abweichende Richtung $(\alpha = +\mathbf{269}^\circ, \delta = +\mathbf{69}^\circ)$. GAUSS vermutet sofort, warum bei der zweiten Methode eine höhere Deklination herauskommen könnte: Durch die Division mit $\mathbf{v}_{z\odot}$ wird eine größere Deklination der Apexrichtung bevorzugt - die Rechnung ist zudem nicht unabhängig von dem gewählten Koordinatensystem. Die Olberssche Apexrechnung basiert somit auf einem *reduzierten* GAUSS - KOBOLD Schema mit *gravierenden* methodischen Nachteilen.

3.6 Die Apexmethode von Argelander

Eine eigene Rechenmethode zur Apexbestimmung hat der aus Memel stammende ARGELANDER (1799-1875)[11] entwickelt. Sie unterscheidet sich sowohl von der GAUSS - KOBOLD Methode als auch von der GAUSS - BRAVAIS - Airy Methode, ist aber geradezu „komplementär“ zur Gausschen Abzähl - Polygonmethode. Bemerkenswert ist, dass ARGELANDER nicht auf die Diskrepanz der GAUSS - Bessel Methode stößt, nach der die Deklination des Apex wesentlich weiter südlich als der „wahre“ Wert von etwa +30° liegt. Kannte ARGELANDER durch seinen Lehrer BESSEL die Schwierigkeiten dieser Methode und hat somit bewusst nach einer Alternative gesucht? Noch merkwürdiger ist, dass GAUSS 1838 in seinem Brief an ARGELANDER nichts über diese methodischen Schwierigkeiten berichtet hat, auf die er selber ja schon 1822 gestoßen war. Im Folgenden soll daher etwas näher auf die Argelander'sche Methode eingegangen werden. genauer diskutiert wurde die Methode von ARGELANDER zum erstenmal 1851 in dem zur damaligen Zeit weit verbreiteten *Lehrbuch zur Sphärischen Astronomie* von F.F.W. Brünnow ([11]). In diesem Buch wurde allerdings 1851 nur diese Methode in recht umständlicher Form dargelegt (*Sphärische Trigonometrie*).

Ausgangspunkt für unsere Diskussion ist wieder die Gleichung (3.9). Sie lautet

$$\mathbf{v}_n - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_n)\,\mathbf{e}_n = \mathbf{v}_\odot - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\,\mathbf{e}_n + r_n \dot{\mathbf{e}}_n \tag{3.75}$$

Man kann überlegen, welche - in heutiger mathematischer Sprache - Eigenbewegungsvektoren $\dot{\mathbf{e}}_n$ die Sterne hätten, wenn sich in einem „absolutem Raum“ *nur* die Sonne, nicht aber die Sterne selber bewegen würden. Setzt man also in der obigen Beziehung $\mathbf{v}_n = 0$, so folgt für einen vorgegebenen Apexvektor $\mathbf{v}_\odot$

$$r_n \dot{\mathbf{e}}_n|_{v_n=0} = -\left(\mathbf{v}_\odot - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\,\mathbf{e}_n\right) \tag{3.76}$$

Die wirklichen Eigenbewegungsvektoren unterscheiden sich nun von den ersteren, da die Sterne eine damals noch weitgehend unbekannte stochastische Raumgeschwindigkeit haben. Da ARGELANDER die Entfernungen

[11] Friedrich Wilhelm August Argelander stammte aus Memel, wurde von BESSEL in Königsberg zur Astronomie gezogen. 1823 an der Sternwarte Abo und 1828 Professur in Helsinki. 1836 Professur in Bonn, gefördert durch den befreundeten König Friedrich Wilhelm IV. 1852-1859 führte ARGELANDER die erste *Bonner Durchmusterung* durch.

der Sterne noch nicht kannte, betrachtete er nicht die Quadratsumme der Differenzen - was *sofort* auf die GAUSS - BRAVAIS - Airy Methode führen würde - sondern er betrachtet die Winkeldifferenz zwischen den beiden Eigenbewegungsvektoren. Aus heutiger Sicht würde man einfach das Skalarprodukt bilden und erhält so

$$(r_n \dot{\mathbf{e}}_n) \circ (r_n \dot{\mathbf{e}}_n|_{v_n=0}) = -\mathbf{v}_\odot \circ (r_n \dot{\mathbf{e}}_n) \tag{3.77}$$

Wir führen wieder für die unbekannte Apexrichtung einen Einheitsvektor $\mathbf{x}$ an der Himmelkugel ein mit den Komponenten

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3); \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \tag{3.78}$$

Die mathematisch leicht modifizierte Methode von ARGELANDER besteht jetzt darin, die quadratische Form

$$\boxed{Q_{Argelander}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N} r_n^2 \, (\mathbf{x} \circ \dot{\mathbf{e}}_n)^2} \tag{3.79}$$

in der Richtung des Apex - Antapex **zum Maximum zu machen**. Man kann hier den Vektor $\mathbf{x}$ auch durch den Vektor $\mathbf{x}^\mathbf{e}$ ersetzen, für den gilt

$$\mathbf{x}^\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{e}_n \, (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{x}). \tag{3.80}$$

$\mathbf{x}^\mathbf{e}$ steht senkrecht auf der Richtung $\mathbf{e}_n$ zum Stern und zeigt in die Apex - Antapex Richtung. Das Verfahren birgt insofern eine Willkürlichkeit, da das Quadrat der Entfernungen r_n^2 als Gewichtsfaktor in (3.79) auch weggelassen werden könnte. ARGELANDER selbst kannte natürlich noch keine Entfernungen zu den Sternen und benutzte auch eine etwas andere recht unelegante mathematische Form für seine Ausgleichsrechnung, die aber in erster Näherung mit der obigen eleganten Form übereinstimmt. Es fällt sofort auf, dass die obige Methode *scheinbar* mit der Gaußschen Polygonmethode und auch mit (3.12) gut harmonisiert.

ARGELANDER maximiert seine quadratische Form iterativ - er setzt eine genäherte Richtung für $\mathbf{x}$ ein und untersucht den Gradienten der quadratischen Form. Er teilt die 390 brauchbaren Sterne (560 standen ihm damals eigentlich zur Verfügung) der Größe der Eigenbewegung nach in drei Klassen (21/50/319) ein und bestimmt für jede einzelne die

Apexrichtung. Nach zwei oder drei Iterationen findet er die endgültigen Lösungen.

Aus heutiger Sicht müssen aber einfach - wie in der GAUSS - BESSEL - Kobold Methode - nur die *Eigenwerte* und die *Eigenvektoren* der Matrix der quadratischen Form (3.79)

$$Q_{Arge}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3)\,\mathbf{M_A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3.81}$$

mit der Matrix

$$\mathbf{M_A} = \begin{pmatrix} \sum r_n^2\,\dot{\mathbf{e}}_{xn}^2 & \sum r_n^2\,\dot{\mathbf{e}}_{xn}\dot{\mathbf{e}}_{yn} & \sum r_n^2\,\dot{\mathbf{e}}_{xn}\dot{\mathbf{e}}_{zn} \\ \sum r_n^2\,\dot{\mathbf{e}}_{yn}\dot{\mathbf{e}}_{xn} & \sum r_n^2\,\dot{\mathbf{e}}_{yn}^2 & \sum r_n^2\,\dot{\mathbf{e}}_{yn}\dot{\mathbf{e}}_{zn} \\ \sum r_n^2\,\dot{\mathbf{e}}_{zn}\dot{\mathbf{e}}_{xn} & \sum r_n^2\,\dot{\mathbf{e}}_{zn}\dot{\mathbf{e}}_{yn} & \sum r_n^2\,\dot{\mathbf{e}}_{zn}^2 \end{pmatrix} \tag{3.82}$$

berechnet werden.

Der *Eigenvektor* mit dem *größten Eigenwert* zeigt dann in die Apex - Antapexrichtung. Eine Testrechnung mit den 500 nahesten Sternen der Sonnenumgebung liefert für den „Argelander“ - Apex das Ergebnis

$$\alpha = \mathbf{270.23}^\circ, \qquad \delta = +\mathbf{9.45}^\circ. \tag{3.83}$$

Auch hier ist die Deklination der Apexrichtung wieder etwas zu weit „südlich“ - die so definierte Argelandermethode ist somit **nicht** invariant gegenüber anisotropen Geschwindigkeitsverteilungen. Dies folgt auch sehr einfach analytisch durch Berechnung der quadratischen Form im Limes von unendlichen vielen Sternen. Die Argelander - Methode liefert wie die GAUSS - BESSEL - KOBOLD Methode zu „südliche“ Deklinationen für den Sonnenapex. ARGELANDER erhält aber 1839 mit seiner Rechenmethode Deklinationen von etwa +30 Grad, was wohl auf seinen modifizierten Gewichtsfaktor $\sin[\theta]^2$ und wohl glückliche „Fügung“ zurückzuführen ist. Historisch wäre die Frage interessant, ob ARGELANDER zunächst ohne den Gewichtsfaktor gerechnet hat. Zudem bleibt es rätselhaft, warum GAUSS 1838 seine erfolgreiche alte Polygon - Abzählmethode von 1822 plötzlich mit dem Gewichtsfaktor $\sin[\theta]^2$ abändern will.

4 Der Geschwindigkeitsellipsoid

Die Beziehung (3.68 ist ein rein theoretisches Resultat. In Wirklichkeit haben die Sterne der Sonnenumgebung eine stark *anisotrope* Geschwindigkeitsverteilung und die Prämissen von (3.68) sind nicht erfüllt. Wir gehen daher wie Karl Schwarzschild im Jahre 1907 von der Annahme aus, dass die Geschwindigkeitsverteilung der Sterne durch eine ellipsoidische „Maxwellverteilung“ beschreibbar ist. Wir gehen zurück zur Gleichung (3.60), quadrieren und summieren diese und erhalten

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= \sum_{n=1}^{N} [\mathbf{x}, \mathbf{e}_n, \mathbf{v}_n]^2 \\ &= \sum_{n=1}^{N} [\mathbf{x}, \mathbf{e}_n, r_n \dot{\mathbf{e}}_n + \mathbf{v}_\odot]^2 \,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Um die rechte Seite dieser Gleichung aus Beobachtungen (HIPPARCOS Satellit) zu berechnen, muss natürlich jetzt der Apexvektor $\mathbf{v}_\odot$ bekannt sein (z.B Gauss – Bravais – Airy Methode). Die Quadratsumme ist auch geometrisch nicht mehr mit der Gausschen Summe $\sum \sin^2[\theta]$ identisch, da nun die „Besselpole“ von der Apexbewegung der Sonne befreit sind.

Wir nehmen jetzt für die Dichteverteilung der $\mathbf{v}_n$ im Geschwindigkeitsraum eine an den Koordinatenachsen orientierte dreiachsige Geschwindigkeitsverteilung nach Schwarzschild[1]

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}(v_x, v_y, v_z) \\ &\quad = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{v_x}{\sigma_{11}}\right)^2 + \left(\frac{v_y}{\sigma_{22}}\right)^2 + \left(\frac{v_z}{\sigma_{33}}\right)^2\right)\right], \end{aligned} \tag{4.2}$$

[1] Karl Schwarzschild, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. zu Gött., Math. Phys. Klasse 1907, No. **5**, 614-632. Heute weiß man, dass eine Schwarzschild - Verteilung nur für eine bestimmte Generation von Sternen etwa gleichen Alters gültig ist. Historisch ist noch interessant, daß Schwarzschild 1907 eine eigene „lokale“ Methode zur Bestimmung des *Apex* und des *Vertex* deduziert hat, aber noch keine klare Vorstellung zu einer galaktischen Rotation hatte.

wo σ_{11}, σ_{22} und σ_{33} Geschwindigkeitsdispersionen zu den drei orthogonalen Richtungen bezeichnen. Für die quadratische Form $Q(\mathbf{x})$ gilt dann

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{N}{4\pi} \int \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{x}, \mathbf{e}, \mathbf{v}]^2 \; \mathcal{W}(v_x, v_y, v_z) \, d^3\mathbf{v} \right) d\mathbf{e}, \tag{4.3}$$

wobei über den Geschwindigkeitsraum und die Himmelskugel $d\mathbf{e}$ integriert wird. Analog zur Kapteyn'schen Zweistromhypothese wird die Richtung der größten Achse des Schwarzschildschen Ellipsoides als **Vertex** bezeichnet. Das Resultat der Integration lautet

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} N \left[(\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) \, x_1^2 + (\sigma_{33}^2 + \sigma_{11}^2) \, x_2^2 + (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) \, x_3^2 \right], \tag{4.4}$$

wobei N wieder die Anzahl der Sterne bezeichnet. Hier sieht man, dass wir jetzt in der Lage sind, eine Aussage über den Geschwindigkeitsellipsoiden und die Ausrichtung des *Vertex* dieser anisotropen Verteilung im Ortsraum zu machen. Die quadratische Form kann alternativ auch

$$Q(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3) \, \mathbf{M_Q} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

mit der Matrix

$$\mathbf{M_Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} N \, (\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} N \, (\sigma_{33}^2 + \sigma_{11}^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} N \, (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

geschrieben werden. Die Hauptmatrix ist also hier schon auf die Hauptachsen transformiert. Setzen wir nun

$$\sigma_{11} > \sigma_{22} > \sigma_{33}, \tag{4.7}$$

ist also in der x – Richtung die größte Geschwindigkeitsdispersion, so entspricht **diese Richtung dem Eigenvektor des kleinsten Eigenwertes der obigen Matrix.**

Um nun vollständig die Ausrichtung und Dimension des Geschwindigkeitsellipsoides zu bestimmen, muss man wie folgt vorgehen. Nachdem

der Apexvektor $\mathbf{v}_\odot$ mit der Gauss – Bravais – Airy Methode bestimmt worden ist, kann die quadratische Form

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N} [\mathbf{x} \circ (\mathbf{e}_n \times (r_n \dot{\mathbf{e}}_n + \mathbf{v}_\odot))]^2, \tag{4.8}$$

berechnet werden (später soll auch noch ein systematischer Effekt der galaktischen Rotation ausgefiltert werden). Mit den Abkürzungen für die modifizierten "Bessel – Pol – Vektoren" („Drehimpulse" ohne Apexanteil)

$$\mathbf{L}_n = \mathbf{e}_n \times (r_n \dot{\mathbf{e}}_n + \mathbf{v}_\odot)) \tag{4.9}$$

müssen die *Eigenwerte* und die *Eigenvektoren* der Matrix $\mathbf{M_L}$

$$\mathbf{M_L} = \begin{pmatrix} \sum Lx_n^2 & \sum Lx_n Ly_n & \sum Lx_n Lz_n \\ \sum Ly_n Lx_n & \sum Ly_n^2 & \sum Ly_n Lz_n \\ \sum Lz_n Lx_n & \sum Lz_n Ly_n & \sum Lz_n^2 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

berechnet werden. Unter der Prämisse

$$\sigma_{11} > \sigma_{22} > \sigma_{33} \tag{4.11}$$

entspricht dann nach der Formel (4.4) derjenige Eigenvektor, der zum kleinsten Eigenwert gehört, der Richtung zum **Vertex** des triaxialen Geschwindigkeitsellipsoiden. Die Minimum – Bedingung für die Apexrichtung bei Gauss wandelt sich hier in die Bedingung für die Vertex – Richtung um. Die drei Geschwindigkeitsdispersionen σ_{11}, σ_{22} und σ_{33} folgen mit den abgeleiteten Eigenwerten aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sqrt{\frac{3\,(-\lambda_{x_1} + \lambda_{x_2} + \lambda_{x_3})}{2N}}, \\ \sigma_{22} &= \sqrt{\frac{3\,(+\lambda_{x_1} - \lambda_{x_2} + \lambda_{x_3})}{2N}}, \\ \sigma_{33} &= \sqrt{\frac{3\,(+\lambda_{x_1} + \lambda_{x_2} - \lambda_{x_3})}{2N}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Mit Hilfe der Geschwindigkeitsdispersionen lässt sich ein wichtiger Parameter der lokalen Galaxiendynamik ableiten. Aus den ersten 50000 Sternen des Hipparcos - Kataloges, sortiert nach fallender Parallaxe, erhält man dann für die Richtung des Vertex

$$\alpha = \mathbf{270.7}^\circ \qquad \delta = -\mathbf{2o.8}^\circ \tag{4.13}$$

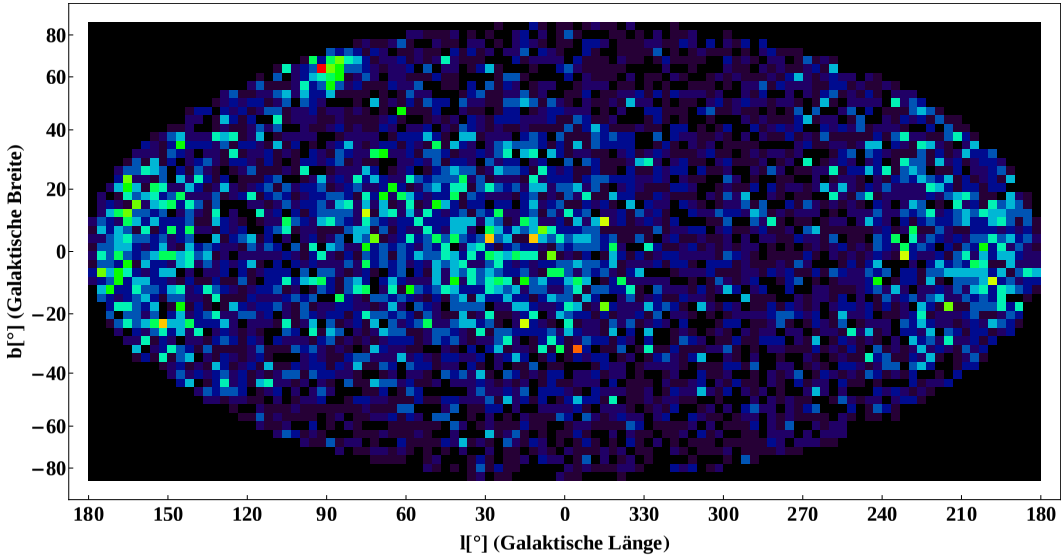


Fig. 4.1: *Die Graphik zeigt die von der Apexbewegung befreite Dichteverteilung der Eigenbewegungsvektoren* $\mathbf{v}_\odot - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\,\mathbf{e}_n + r_n\,\dot{\mathbf{e}}_n$ *aus den nahesten 10000 Sternen des HIPPARCOS Kataloges. Deutlich zeigt sich schon hier längs des galaktischen äquators eine bipolare Struktur. Aus dem diesem Faktum entwickelte Kapteyn 1904 die „Zweistromhypothese“ und Schwarzschild die „Ellipsoidhypothese“. Der Vertex, die große Achse des Ellipsoiden, zeigt NICHT genau zum galaktischen Zentrum bei* $l = 0°$ *und* $b = 0°$*. Aus diesem Faktum heraus hätte rein hypothetisch schon* KAPTEYN *oder* SCHWARZSCHILD *um 1905 auf eine differentielle Rotation mit einer störenden Spiralstruktur in einer galaktischen Scheibe schließen können.*

oder in galaktischen Koordinaten

$$l = \mathbf{9.3}^\circ \qquad b = +\mathbf{0.2}^\circ \tag{4.14}$$

und für den Ellipsoiden

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \mathbf{36.2}\, km/s, \\ \sigma_{22} &= \mathbf{27.8}\, km/s, \\ \sigma_{33} &= \mathbf{20.1}\, km/s. \end{aligned}$$

Gemäß der Epizykel - Theorie für schwach nicht-kreisförmige Bahnen in einem rotationssymmetrischen Potential mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega(R)$ gilt für das Verhältnis von tangentialer zu radialer Geschwindigkeitsdispersion die Beziehung

$$\boxed{\frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{11}^2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln R}} \tag{4.15}$$

Damit kann man eine wichtige Aussage bezüglich des lokalen Gradienten der Winkelgeschwindigkeit $\Omega(R_\odot)$ um das galaktische Zentrum machen. Bei Keplerscheiben mit $\Omega \propto R^{-3/2}$ ist das Verhältnis 1/4, bei Galaxien im Außenbereich aber eher 1/2. Mit Hilfe der obigen Zahlen ergibt sich zum Beispiel hier

$$\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln R} \approx -\mathbf{0.82}. \tag{4.16}$$

Die Rotationsgeschwindigkeit nimmt also sogar nach außen noch schwach zu. Die obige Beziehung steht im engen Zusammenhang mit den Oortschen Konstanten **A** und **B**, definiert durch

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\,\Omega(R)\,\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln R}, \tag{4.17}$$

$$\mathbf{B} = -\Omega(R)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln R}\right). \tag{4.18}$$

Die Bestimmung des Achsenverhältnisses des Geschwindigkeitsellipsoiden führt also direkt zur Festlegung einer fundamentalen Rotationskonstanten unserer Galaxis. Alternativ gilt also auch

$$\mathbf{A} = \left(1 - \frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{22}^2}\right)\mathbf{B}. \tag{4.19}$$

Gelingt es mit einer anderen Methode, die Konstante **B** zu bestimmen, so folgt **A** aus der obigen Formel mit den bekannten Werten des Geschwindigkeitsellipsoiden.

Es ist daher historisch interessant, dass GAUSS *unwissentlich* mit seiner ersten „Apex“ - Methode, bei der eine quadratische Form auf ihre Hauptachsen transformiert werden musste, schon sehr nahe die Richtung zum Zentrum unserer Galaxis bestimmt hat.[2]. GAUSS's Enttäuschung war natürlich groß, als er entdeckte, daß sich die vermeintliche Apexrichtung, nach dieser Methode bestimmt, deutlich (um etwa 30 Grad) von der Richtung nach HERSCHELoder der Methode von BRAVAIS-Airy (3.15) unterschied. Er hat darauf mehrere Varianten dieser Methode 1822 angewendet, die sich aber nicht zwanglos aus den Grundgleichungen herleiten lassen.

Wenden wir diese erste Gaussche Methode auf den Datensatz von 518 Sternen an, so erhalten wir für die *Vertex* – Richtung den Wert

$$\alpha = \mathbf{268.8}^\circ \qquad \delta = +\mathbf{8.7}^\circ \tag{4.20}$$

Berechnet man das Eigensystem für die Matrix von 117000 Sternen aus, so folgt

$$\alpha = \mathbf{272.5}^\circ \qquad \delta = +\mathbf{2.0}^\circ. \tag{4.21}$$

Wir erhalten also gegenüber den früheren Ergebnissen die gleiche Diskrepanz in der Deklination wie schon GAUSS 1822 oder HERMANN KOBOLD 1893[3]. KOBOLD, der von HARZER[4] 1893 darauf hingewiesen wurde, dass sein vermeidlich neues Verfahren mathematisch äquivalent einer Hauptachsentransformation einer quadratischen Matrix ist, war zunächst der

[2] Die reinen Zahlenrechnungen für die Elemente der Hauptmatrix wurden wohl auch zum Teil von L.C.Schnürlein (1792 – 1852) durchgeführt, der Stipendiat bei GAUSS war und später als Mathematiklehrer am Jean-Paul Gymnasium in Hof wirkte

[3] HERMANN KOBOLD (1858-1942). KOBOLD gehörte noch zu den letzten Astronomen des 19. Jahrhunderts, die visuell Galaxien im Coma-Haufen entdeckt und vermessen haben. Er erstellte eine Karte der Besselpole von etwa 3000 Sternen und war 30 Jahre lang Redakteur der Astronomischen Nachrichten in Kiel

[4] PAUL HERMANN HARZER (1857-1932). Beherrschte mehrere Sprachen und war ausgezeichneter Kopfrechner, Mathematiker und Orgelspieler. Ließ den größten Meridiankreis Deutschlands 1901 in Kiel montieren, der aber wissenschaftlich ein Fehlschlag war. 1938 stürzte das Instrument bei Wartungsarbeiten zu Boden und wurde 1950 endgültig verschrottet. HARZER beschäftigte sich mehr mit Problemen der Navigation (Marine), der Geschichte der Mathematik in Japan und der Durchbiegung des Radkranzes von Meridiankreisen als mit der Dynamik von Sternen in unserer Galaxis. Siehe auch FELIX LÜHNING ([32])

Meinung, dass diese Methode die „wahre Position“ des Apex liefere. Schon 1901 wurde er von Kapteyn deswegen kritisiert, der wiederum mit einem alternativen Verfahren für den Apex den klassischen Ort erhielt, denselben wie zuvor schon die GAUSS-BRAVAIS-Airy Methode. Die umfangreichen Rechnungen von GAUSS kannte KOBOLD noch nicht, erahnte aber ihren Umfang, als 1909 ein Brief von GAUSS an ARGELANDER aus einem Nachlass auftauchte. Erst mit der Veröffentlichung des Bandes **XI/1** 1917 der gesammelten Gauss-Werke wurden diese allgemein bekannt wurden. Auch war KOBOLD die Arbeit von BRAVAIS völlig unbekannt, denn er nennt als alternatives Rechenverfahren nur die Airy'sche Methode. Kapteyn dagegen wurde 1901 von Newcombe auf die Arbeit von BRAVAIS hingewiesen. Als Vergleich seien hier noch die Ergebnisse von KARL SCHWARZSCHILD bezüglich seiner „Vertex – Richtung“ aus dem Jahre 1907 angegeben. Sie lauten

$$(\alpha, \delta) = (\mathbf{273.0}^\circ, \mathbf{-6.0}) \qquad (l, b) = (\mathbf{23.4}^\circ, \mathbf{5.4}^\circ) \tag{4.22}$$

und alternativ aus einer „graphischen“ Methode

$$(\alpha, \delta) = (\mathbf{272.0}^\circ, \mathbf{+3.0}^\circ) \qquad (l, b) = (\mathbf{+31.0}^\circ, \mathbf{+11.0}^\circ). \tag{4.23}$$

Diese Vertex – Richtungen stimmen ironischerweise mit der von GAUSS 1822 bestimmten „ersten Apex“-Position gut überein, an dessen Realität GAUSS aber immer wieder mit Recht gezweifelt hatte.

Zusammenfassung Aus heutiger Sicht ist es klar, warum die „erste“ Methode von GAUSS zur Apexbestimmung versagen musste. Denn mit dem Geschwindigkeitsellipsoiden ergibt sich für die von GAUSS postulierte quadratische Form im Falle *gleichmäßiger* Sternverteilung der Ausdruck

$$Q_G(\mathbf{x}) = \frac{N}{4\pi} \int \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{x}, \mathbf{e}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_\odot]^2 \; \mathcal{W}(v_x, v_y, v_z) \, d^3\mathbf{v} \right) d\mathbf{e}, \tag{4.24}$$

wobei der Vektor $\mathbf{v}_\odot$ im Koordinatensystem des Geschwindigkeitsellipsoiden gemessen wird. Es ergibt sich

$$Q_G(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3) \, \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

mit der Matrix $\mathbf{M} = \frac{N}{3}\,\mathbf{m}$, wobei $\mathbf{m}$ durch

$$\begin{pmatrix} v_{\odot y}^2 + v_{\odot z}^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 & -v_{\odot x}v_{\odot y} & -v_{\odot x}v_{\odot z} \\ -v_{\odot x}v_{\odot y} & v_{\odot z}^2 + v_{\odot x}^2 + \sigma_z^2 + \sigma_x^2 & -v_{\odot y}v_{\odot z} \\ -v_{\odot x}v_{\odot z} & -v_{\odot y}v_{\odot z} & v_{\odot x}^2 + v_{\odot y}^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

gegeben ist. Nur für den isotropen Fall $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \equiv \sigma$ zeigt der Eigenvektor des kleinsten Eigenwertes in die Apex - Antapex Richtung. Im allgemeinen Fall liegt aber der zum kleinsten Eigenwert zugehörige Eigenvektor der Matrix $\mathbf{M}$ irgendwo zwischen der wahren Apexrichtung und der Vertexrichtung.

Ernst Anding hat 1896 bei einer kritischen Betrachtung der Koboldschen Arbeit über die Apexrichtung bemerkt, dass die Besselsche Methode auch von einer *anisotropen Richtungsverteilung der Sterne an der Himmelkugel* abhängig ist. Heutzutage würde man die Dichte der Sterne auf der Himmelskugel in eine Reihe nach Kugelflächenfunktionen entwickeln und so den Einfluss dieser Anisotropie quantifizieren. Einfacher kann man den Effekt sofort an der quadratischen Form

$$Q_G(\mathbf{x},\mathbf{e}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{x},\mathbf{e},\mathbf{v}-\mathbf{v}_\odot]^2 \;\; \mathbf{W}[\mathbf{v}]\, d^3\mathbf{v} \tag{4.27}$$

einsehen. Beschränkt man sich hier auf eine „punktförmige“ Sterngruppe in der Richtung $\mathbf{e}$, so hat die dazugehörige Matrix als kleinsten Eigenwert den Wert Null, und der Eigenvektor und damit die Apexrichtung zeigt in die Richtung von $\mathbf{e}$. Die Besselmethode oder die „erste“ Gaußmethode ist somit weder gegenüber einer anisotropen Geschwindigkeitsverteilung noch gegenüber einer entsprechenden Sternverteilung an der Himmelskugel *invariant*.

Eddington (1882-1944) drückt dies Resultat 1914 in seinem Buch *Stellar Movements* so aus: *„...But if the individual motions follow some other law, the reult may be altogether incorrect. In the light of modern knowledge..., Bessel's method can no longer be regarded as an admissible way of finding the solar apex; but it is interesting historically, for in Kobold's hands it first foreshadowed the existence of the peculiar distribution of stellar motions...“*

Was Eddington aber 1914 hier noch nicht wusste, ist die Tatsache, daß zusätzlich zum „Gürtelring“ als Häufungsregion der Besselpole es für Sterne größerer Entfernung eine Häufung der Besselpole um die beiden

galaktischen Pole geben sollte. Doch für eine *galaktische differentielle Rotation* gab es selbst 1914 noch keine sicheren Hinweise.

5 Stochastische Funktionen

5.1 Die Gaußsche Wahrscheinlichkeit

Gauss teilte Olbers am 29.1.1822 und Argelander am 16.2.1838 eine bemerkenswerte Formel bezüglich der Häufigkeit von „ungünstigen“ Sternen mit, die sich scheinbar in gleicher Richtung wie die Sonne durch den Raum bewegen [1]. Mit dieser Formel gelingt es, aus dem Verhältnis von „ungünstigen“ Sternen zu der Gesamtzahl der Sterne eine Aussage über die Sonnengeschwindigkeit $\mathbf{v}_\odot$ relativ zur mittleren Geschwindigkeit der Sterngruppe zu machen, wenn eine *isotrope* Geschwindigkeitsverteilung vorliegt (was in Wirklichkeit aber nicht erfüllt ist, wie man wesentlich später feststellte).

Ungünstige Sterne sind nach Gauss definiert durch die Bedingung

$$\mathbf{v}_\odot \circ \dot{\mathbf{e}}_n > 0, \tag{5.1}$$

das heißt ihr Vektor der Eigenbewegung bildet mit dem Apex-Vektor einen Winkel kleiner $\pi/2$. Nun gilt aber nach Definition

$$\mathbf{v}_\odot \circ (r_n \dot{\mathbf{e}}_n) = \mathbf{v}_\odot \circ \left[(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_\odot) - \mathbf{e}_n((\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_\odot) \circ \mathbf{e}_n)\right]. \tag{5.2}$$

Damit lautet die Bedingung für die „ungünstigen“ Sterne

$$\mathbf{v}_\odot \circ [\mathbf{v}_n - \mathbf{e}_n(\mathbf{v}_n \circ \mathbf{e}_n)] > \mathbf{v}_\odot \circ (\mathbf{v}_\odot - \mathbf{e}_n(\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}_n)) \tag{5.3}$$

Die linke Seite der obigen Ungleichung ist nun invariant unter der Vertauschung von $\mathbf{v}_n$ und $\mathbf{v}_\odot$. Daher gilt auch

$$\mathbf{v}_n \circ [\mathbf{v}_\odot - \mathbf{e}_n(\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}_n)] > \mathbf{v}_\odot \circ [\mathbf{v}_\odot - \mathbf{e}_n(\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}_n)]. \tag{5.4}$$

Die rechte Seite kann weiter vereinfacht werden zu

$$\mathbf{v}_n \circ [\mathbf{v}_\odot - \mathbf{e}_n(\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}_n)] > \mathbf{v}_\odot^2 - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)^2. \tag{5.5}$$

[1] Durch Plummer und Kobold wurde diese Formel erst ab 1907 der Öffentlichkeit bekannt ([37])

Diese Ungleichung lässt sich nun trigonometrisch deuten. Man erhält zunächst

$$v_n\, v_\odot\, \sin[\Theta]\cos[\Theta] > v_\odot^2\, \sin^2[\theta]. \tag{5.6}$$

Dabei bedeutet θ den Winkelabstand des Sternes vom Apex und Θ den Winkelabstand vom Ort, wohin sich der Stern bewegt, und dem Punkt, der einen $\pi/2$ Abstand vom Sternort über den Apex hat. Das Letztere sieht man ein, wenn man die Identität

$$\mathbf{e}_n \circ [\mathbf{v}_\odot - \mathbf{e}_n(\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}_n)] = 0 \tag{5.7}$$

betrachtet.

Haben alle Sterne gleiche Geschwindigkeit $|\mathbf{v}_n| = v_m$, so vereinfacht sich die Ungleichung für die ungünstigen Sterne zu

$$\boxed{\cos[\Theta] > \gamma\, \sin[\theta],} \tag{5.8}$$

mit

$$\gamma = \frac{v_\odot}{v_m} \tag{5.9}$$

Der Winkel Θ bezeichnet dabei einen Winkel im Geschwindigkeitsraum, der Winkel θ dagegen im Ortsraum. Im Geschwindigkeitsraum sind nun alle diejenigen Sterne ungünstig, die im Winkelbereich $0 < \Theta < \Theta'$ liegen, wobei $\cos(\Theta') = \gamma\, \sin[\theta]$ ist. Die Wahrscheinlichkeitsdichte für ungünstige Sterne mit festem Winkel θ ist dann nach Gauss identisch dem Oberflächenverhältnis der Kugelkalotte zur Gesamtoberfläche im Geschwindigkeitsraum. Es gilt

$$\mathbf{pdf}_G[\theta, \gamma] = \frac{1}{2}(1 - \cos[\Theta']) = \frac{1}{2}(1 - \gamma \sin[\theta]) \tag{5.10}$$

Als letztes muss nun noch über die ganze Himmelssphäre integriert werden. Für den Fall $\gamma < 1$ folgt dann

$$p_G[\gamma] = \frac{\int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \gamma \sin[\theta]) \sin[\theta]\, d\theta}{\int_0^\pi \sin[\theta]\, d\theta} \tag{5.11}$$

Im Falle $\gamma > 1$ gibt es dagegen im Ortsraum einen Grenzwinkel β, gegeben durch

$$1 = \gamma\, \sin[\beta]. \tag{5.12}$$

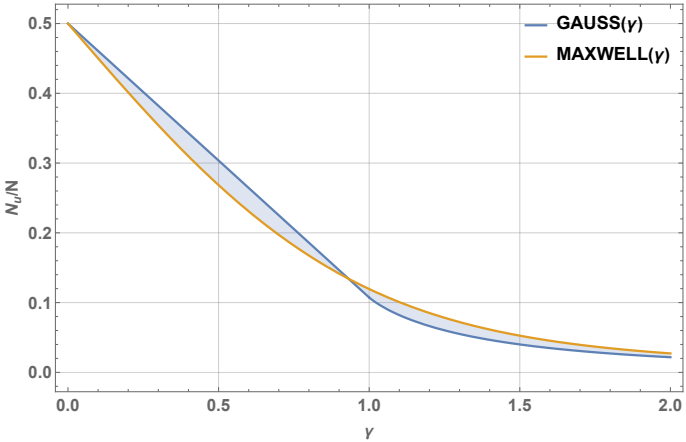


Fig. 5.1: *Die Anzahl der ungünstigen Sterne N_{retro}, dividiert durch die Gesamtzahl der Sterne als Funktion von γ, dem Verhältnis der Sonnengeschwindigkeit zur mittleren Geschwindigkeit der Sterne in der Sonnenumgebung. Die blau berandete Kurve nimmt gleiche Geschwindigkeit der Sterne an, aber unabhängige Richtungen (Hypothese von* Gauss*), während die rot berandete Kurve isotrope Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung voraussetzt.*

In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit für die „ungünstigen“ Fälle gegeben durch

$$p_G[\gamma] = \frac{\int_0^\beta \frac{1}{2}(1-\gamma\sin[\theta])\sin[\theta]\,d\theta}{\int_0^{\pi/2}\sin[\theta]\,d\theta} \tag{5.13}$$

Damit ergeben sich die endgültigen Resultate

$$\frac{N_u}{N} = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\,\gamma\right); & \gamma < 1; \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\cos[\beta]-\frac{\beta}{2\sin[\beta]}\right); & \gamma > 1. \end{cases} \tag{5.14}$$

Diese Formeln hatte Gauss schon 1822 abgeleitet.

Eine analoge Rechnung kann man heute auch für eine *isotrope* Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung durchführen. Es gilt für die Dichte

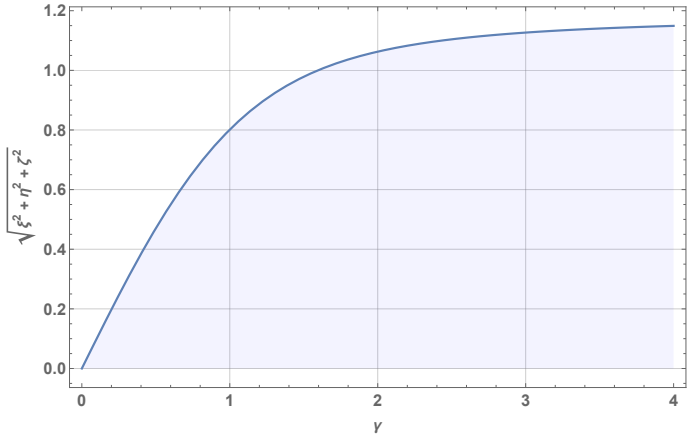


Fig. 5.2: *Der Betrag $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ der normierten Gauss – Bravais – Airy Methode als Funktion von γ, dem Verhältnis der Sonnengeschwindigkeit zur mittleren Geschwindigkeit der Sterne in der Sonnenumgebung. Siehe Formel (5.30).*

im Geschwindigkeitsraum

$$\begin{aligned} \mathbf{pdf}_M[\mathbf{v}] &= \frac{8}{\pi^3\, v_m^3}\, \exp\left[-\frac{4}{\pi}\,\frac{\mathbf{v}^2}{v_m^2}\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\,\sigma^3}\, \exp\left[-\frac{\mathbf{v}^2}{2\,\sigma^2}\right] \end{aligned} \tag{5.15}$$

wo $\mathbf{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ ist, v_m die mittlere Geschwindigkeit der Sterngruppe und σ die Geschwindigkeitsstreuung bezeichnet. Es gilt

$$v_m = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\,\sigma \tag{5.16}$$

Als Nächstes muss die Bedingung für ungünstige Sterne in kartesische Koordinaten umgerechnet werden. Legt man den Vektor der Apexbewegung in die positive z-Richtung, so lautet die Bedingung für die ungünstigen Sterne

$$v_z(1-e_z^2) - v_x\, e_x\, e_z - v_y\, e_y\, e_z \geq v_\odot(1-e_z^2) \tag{5.17}$$

Der Anteil der ungünstigen Sterne in einer bestimmten Himmelsrichtung

ist dann durch das Integral

$$p[v_\odot, \mathbf{e}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{\Theta}[a[\mathbf{v}, \mathbf{e}]]\, \mathbf{pdf}_M[\mathbf{v}]\, \mathbf{d^3v} \tag{5.18}$$

gegeben, wo $\mathbf{\Theta}[a[\mathbf{v}, \mathbf{e}]]$ ein geeigneter Dirichletfaktor ist, welcher für die ungünstigen Sterne 1, sonst aber null ist. Dieser lautet

$$\mathbf{\Theta}[a] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[a\, u]}{u}\, du. \tag{5.19}$$

mit

$$a[\mathbf{v}, \mathbf{e}] = v_z(1 - e_z^2) - v_x\, e_x\, e_z - v_y\, e_y\, e_z - v_\odot(1 - e_z^2) \tag{5.20}$$

Die Integration im Geschwindigkeitsraum ist nun elementar durchführbar und man erhält nach Integration über die Hilfsvariable u als Zwischenergebnis

$$p[\gamma, e_z] = \frac{1}{2}\left(1 - \mathbf{Erf}\left[\tfrac{2}{\sqrt{\pi}}\gamma\, \sqrt{1 - e_z^2}\right]\right). \tag{5.21}$$

Mit dem Winkel θ vom Apex ergibt sich dann der Bruchteil ungünstiger Sterne zu

$$p[\gamma, \theta] = \frac{1}{2}\, \mathbf{Erfc}\left[\tfrac{2}{\sqrt{\pi}}\gamma\, \sin[\theta]\right], \tag{5.22}$$

wobei $\mathbf{Erfc}(z)$ die Fehlerfunktion bzw. die komplementäre Fehlerfunktion darstellt. Diese Beziehung ist der Gausschen Beziehung für konstante Geschwindigkeiten äquivalent , gilt aber nun einheitlich für alle Werte von γ.

Eine Integration über die gesamte Himmelssphäre

$$p[\gamma] = \frac{\int_0^\pi \frac{1}{2}\, \mathbf{Erfc}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\gamma\, \sin[\theta]\right] \sin[\theta]\, d\theta}{\int_0^\pi \sin[\theta]\, d\theta} \tag{5.23}$$

liefert dann das Endresultat für die Anzahl der „ungünstigen“ Sterne bei Annahme einer isotropen Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung

$$p[\gamma] = \frac{1}{2}\left(1 - \gamma\, \exp(-\frac{2}{\pi}\gamma^2)\left(\mathbf{I}_0\left[\tfrac{2}{\pi}\gamma^2\right] + \mathbf{I}_1\left[\tfrac{2}{\pi}\gamma^2\right]\right)\right) \tag{5.24}$$

oder kompakter

$$p[\gamma] = \frac{1}{2}\,\left(1 - \gamma\,{}_1\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{2}; 2; -\tfrac{4}{\pi}\gamma^2\right]\right). \tag{5.25}$$

$\mathbf{I}_0[z]$ und $\mathbf{I}_1[z]$ bezeichnen modifizierte Besselfunktionen. Ausführlich geschrieben gilt also ($\gamma = v_\odot/v_m$)

$$\boxed{N_u = \frac{1}{2}\,N\,\left(1 - \gamma\,{}_1\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{2}; 2; -\tfrac{4}{\pi}\,\gamma^2\right]\right).} \tag{5.26}$$

Hier bezeichnet ${}_1\mathbf{F}_1[1/2, 2, z]$ eine spezielle konfluente hypergeometrische Funktion.

Eine analoge Rechnung lässt sich auch für den Betrag des Vektors $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ in der speziellen Gaußschen Methode durchführen, wenn alle Eigenbewegungsvektoren auf 1 normiert sind. Maßgebend für den Betrag $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ ist hier das Integral

$$-\frac{3}{8\pi}\oint\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{v}_\odot) - \mathbf{e}\,(\mathbf{e}\circ(\mathbf{v}-\mathbf{v}_\odot))}{|(\mathbf{v}-\mathbf{v}_\odot) - \mathbf{e}\,(\mathbf{e}\circ(\mathbf{v}-\mathbf{v}_\odot))\,|}\,\mathcal{W}[\mathbf{v}]\,d^3\mathbf{v}\right)\,d^2\mathbf{e}. \tag{5.27}$$

Mit dem Kunstgriff der Integraldarstellung

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\,u^2}\,du \qquad a > 0 \tag{5.28}$$

erhält man im Falle einer isotropen Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung das Zwischenergebnis

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \frac{3}{4}\int\limits_0^\pi \gamma\,\sin[\theta]^3\,{}_1\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{2}; 2; -\tfrac{4}{\pi}\,\gamma^2\sin[\theta]^2\right]\,d\theta. \tag{5.29}$$

Daraus folgt endgültig

$$\boxed{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \gamma\,{}_1\mathbf{F}_1\left[\tfrac{1}{2}; \tfrac{5}{2}; -\tfrac{4}{\pi}\,\gamma^2\right].} \tag{5.30}$$

Für $\gamma \to \infty$ geht der Betrag des Vektors – unabhängig von einer speziellen isotropen Geschwindigkeitsverteilung – asymptotisch gegen den Wert

$3\pi/8$. Genauer gilt

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \frac{3\pi}{8} - \frac{3\pi^2}{64\gamma^2} + \ldots \qquad \gamma \to \infty \tag{5.31}$$

Siehe auch Figur (5.2). Die Formeln (5.25) und (5.29) lassen vermuten, dass ganz allgemein bei isotropen Verteilungsfunktionen der Geschwindigkeiten die eine Wahrscheinlichkeit aus der anderen berechnet werden kann. Ein Vergleich ergibt die Identität

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \frac{3}{2}\int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - w(\gamma\,\sin[\theta])\right)\sin[\theta]^2\,d\theta. \tag{5.32}$$

Ist die Formel für die Gaußsche Wahrscheinlichkeit $w(\gamma)$ *„ungünstige Sterne“* bekannt, so lässt sich mit (5.32) der Erwartungswert für $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ relativ leicht berechnen.

Gauss nahm 1822 für die Sterne identische Geschwindigkeiten, aber zufällige isotrope Richtungen an. In diesem Fall folgt aus dem Integral (5.32) und (5.14)

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}\,\gamma; & \gamma < 1; \\[2ex] \dfrac{3\pi}{8} - \dfrac{\pi}{8\gamma^2} + \ldots; & \gamma > 1. \end{cases} \tag{5.33}$$

Beide Gültigkeitsbereiche konnten durch eine Simulation einer künstlichen Himmelskugel mit isotroper Verteilung der Sternpositionen und identischen, aber zufälligen Richtungen der Geschwindigkeiten bestätigt werden. Auch eine numerische Berechnung des Integrals (5.27) mit Hilfe einer adaptiven Monte Carlo Methode (*Wolfram Mathematica 9*) bestätigte innerhalb der statistischen Schwankungen das obige analytische Resultat. Diese Ergebnisse korrigieren ein Resultat von Gauss, welches er in einem Brief vom 22. Januar 1822 an Olbers mitteilte. Dort schrieb Gauss:

> *„... Der Quotient $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}/\mathbf{m}$ wird dann zugleich die mittlere Geschwindigkeit der Fixsterne mit der unserer Sonne zu vergleichen dienen“.*

Mit der Größe $\mathbf{m}$ meint Gauss hier wohl die Anzahl der Sterne, aus denen er den Apex zu bestimmen sucht[2]. Doch dies muss falsch oder ein Versehen von Gauss sein, denn nach den obigen Rechnungen folgt, solange die Geschwindigkeit der Sonne kleiner als das Mittel der sie umgebenden Sterne ist ($\gamma < 1$), dass dieser Parameter $\mathbf{m} = \pi/4$ und nicht $\mathbf{m} \equiv N$ ist! Haben die Sterne eine isotrope Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung, ist dieser Faktor asymptotisch sogar 1 (siehe Gleichung (5.30))!

Auch die verallgemeinerte Gaußsche *Kugelteilungsfunktion* $N_A(\mathbf{x})$ für beliebige Richtungen $\mathbf{x}$ lässt sich im Grenzfall sehr vieler Sterne und isotroper Geschwindigkeitsverteilung relativ einfach als ein 4-fach Integral mit einem Dirichletfaktor

$$N_A(\mathbf{x}) = \frac{N}{4\pi} \oint \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{\Theta}\left[a(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_\odot)\right] \mathcal{W}(\mathbf{v})\, d^3\mathbf{v} \right) d^2\mathbf{e} \tag{5.34}$$

schreiben. Für das Argument des Dirichletfaktors gilt

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_\odot) = \mathbf{x} \circ \left[(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\odot) - \mathbf{e}\ (\mathbf{e} \circ (\mathbf{v} - \mathbf{v}_\odot))\right] \tag{5.35}$$

Dieser Ausdruck kann alternativ auch als

$$a(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_\odot) = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_\odot) \circ \left[\mathbf{x} - \mathbf{e}\ (\mathbf{e} \circ \mathbf{x})\right] \tag{5.36}$$

geschrieben werden. Das Integral über den Geschwindigkeitsraum lautet nun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8}{\pi^3\, v_m^3}\ \exp\left[-\tfrac{4}{\pi}\,\frac{\mathbf{v}^2}{v_m^2}\right] \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[((\mathbf{v} - \mathbf{v}_\odot) \circ \mathbf{x}^e)\, u]}{u}\, du\right] d^3\mathbf{v} \tag{5.37}$$

Ausgerechnet liefert das für den Bruchteil der ungünstigen Sterne

$$w_A[\mathbf{x}] = \frac{1}{2}\ \mathbf{Erfc}\left[\frac{2\,\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{x}_e}{\sqrt{\pi}\, v_m\, |\mathbf{x}_e|}\right] \tag{5.38}$$

mit dem Vektor $\mathbf{x}_e$

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{x} - \mathbf{e}\ (\mathbf{e} \circ \mathbf{x})\,, \tag{5.39}$$

[2] Die Vermutung liegt nahe, dass vielleicht auch ein Lesefehler des Originalbriefes vorliegen könnte. In einer späteren Abschrift der Olber'schen Briefe 1826 hat Gauss aber den Buchstaben „m“ wieder übernommen.

der senkrecht auf der Himmelsrichtung $\mathbf{e}$ steht und die Richtung zum Punkt $\mathbf{x}$ an der Himmelskugel anzeigt. Das Argument in der Fehlerfunktion lässt sich zweckmäßig umformen und es gilt alternativ für den Bruchteil der „ungünstigen“ Sterne bei gegebener Apexrichtung $\mathbf{v}_\odot$ in der Himmelsrichtung $\mathbf{x}$, wenn man sich zunächst auf die „Quellregion“ in der Richtung $\mathbf{e}$ beschränkt, die Formel

$$w_A[\mathbf{x}] = \frac{1}{2}\,\mathbf{Erfc}\left[\frac{2\,(\mathbf{v}_\odot \times \mathbf{e}) \circ (\mathbf{x} \times \mathbf{e})}{\sqrt{\pi}\,v_m\,||\mathbf{x} \times \mathbf{e}||}\right]. \tag{5.40}$$

Diese Formel ist eine Verallgemeinerung der früher erhaltenen Beziehung im Spezialfall $\mathbf{x}$ parallel zu $\mathbf{v}_\odot$, wo die Funktion ihren minimalen Wert an. Dies gilt nun für jede Richtung $\mathbf{e}_n$ an der Himmelskugel. Im Falle einer isotropen Geschwindigkeitsverteilung gilt somit für die Gaussche Funktion bei Summation über alle „Sterngruppen“ in den „anisotropen“ Richtungen $\mathbf{e}_n$

$$N_A[\mathbf{x}] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{Erfc}\left[\frac{2\,(\mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_\odot) \circ (\mathbf{e}_n \times \mathbf{x})}{\sqrt{\pi}\,v_m\,||\mathbf{e}_n \times \mathbf{x}||}\right] \tag{5.41}$$

Jetzt ist klar, warum die Gaussche Polygonmethode unempfindlich gegenüber anisotropen Richtungsverteilungen der Sterne am Himmel ist. Die Methode liefert also keine Mssßweisung, nur weil die südlicheren Sterne im 19. Jahrhundert nicht berücksichtigt werden konnten oder die Sterne an der Himmelssphäre zu irregulären Gruppen gehäuft sind.

Im Grenzfall vieler Sterne gleichmäßig über den Himmel verteilt gilt natürlich das Integral

$$N_A[\mathbf{x}] = \frac{N}{8\pi}\int \mathbf{Erfc}\left[\frac{2\,(\mathbf{e} \times \mathbf{v}_\odot) \circ (\mathbf{e} \times \mathbf{x})}{\sqrt{\pi}\,v_m\,||\mathbf{e} \times \mathbf{x}||}\right]\,d\mathbf{e}. \tag{5.42}$$

Obwohl Gauss nie eine „Kugelteilungsfunktion“ der Besselpole diskutiert hat, wollen wir diese hier als Komplement zu $N_A(\mathbf{x})$ einführen. Wieder mit dem Dirichletfaktor $\mathbf{\Theta}(z)$ definieren wir jetzt

$$\boxed{N_B[\mathbf{x}] = \sum_{n=1}^{N}\mathbf{\Theta}[\mathbf{x} \circ (\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n)].} \tag{5.43}$$

Aufgrund der kinematischen Beziehung (3.59) lässt sich dies auch als

$$N_B[\mathbf{x}] = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{\Theta}[(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_\odot) \circ (\mathbf{x} \times \mathbf{e}_n)] \tag{5.44}$$

schreiben. Analog zur obigen Integration über die Geschwindigkeiten für die Kugelteilungsfunktion $N_A(\mathbf{x})$ gilt jetzt

$$w_B[\mathbf{x}] = \frac{1}{2}\,\mathbf{Erfc}\left[\frac{2\,\mathbf{v}_\odot \circ (\mathbf{x} \times \mathbf{e})}{\sqrt{\pi}\,v_m\,||\mathbf{x} \times \mathbf{e}||}\right]. \tag{5.45}$$

Es ist aber leicht einzusehen, dass die „Kugelteilungsfunktion“ der Besselpole an der Himmelskugel immer den Wert 1/2 hat, solange man nicht eine *galaktische Rotation* mit Scherströmung in der galaktischen Sternscheibe berücksichtigt. Doch davon später.

5.2 Die Eddingtonsche Funktion

1905 machte J.C. Kapteyn eine Entdeckung, die zuvor schon vielfach vermutet wurde: Die Sterne der Sonnenumgebung haben **keine isotrope Geschwindigkeitsverteilung**, sondern folgen eher zwei entgegengesetzten „Strömungen“. Als diagnostisches Hilfsmittel zu dieser Entdeckung diente eine Häufigkeitsuntersuchung der Richtungen der Eigenbewegungen der Sterne in einer kleinen Umgebung einer vorgegebenen Richtung $\mathbf{e}$ an der Himmelskugel. Schon Gauss hatte 1838 eine Funktion für diese Richtungswahrscheinlichkeit unter der Voraussetzung gleicher Geschwindigkeiten und isotroper Richtungen angegeben, aber nie veröffentlicht. 1906 berechnete der britische Astrophysiker A. Eddington (1882 - 1944) diese Funktion zunächst auf der Grundlage einer isotropen Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung, später auch mit einer triaxialen ellipsoidischen Verteilung, wie sie von K. Schwarzschild schon 1906 vorgeschlagen wurde. A. Eddington fasste 1914 die bis dahin erzielten Ergebnisse der Beobachtungen sowie der Theorien in seinem Buch *Stellar Movements and the Structure of the Universe* zusammen ([13], [14]).

Ausgangspunkt für eine lokale statistische Untersuchung der Eigenbewegung von Sternen an der Himmelskugel ist wieder die Gleichung (2.13)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\odot + \dot{r}\mathbf{e} + r\dot{\mathbf{e}}. \tag{5.46}$$

Ausführlicher lautet diese Beziehung aber wegen (2.3)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\odot + \dot{r}\,\mathbf{e}^{(1)} + r\,\cos[\delta]\,\dot{\alpha}\,\mathbf{e}^{(2)} + r\,\dot{\delta}\,\mathbf{e}^{(3)}. \tag{5.47}$$

Mit den neuen Geschwindigkeitskomponenten

$$w_1 = \dot{r}; \qquad w_2 = r\,\cos[\delta]\,\dot{\alpha}; \qquad w_3 = r\,\dot{\delta}, \tag{5.48}$$

folgt unmittelbar

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\odot + w_1\,\mathbf{e}^{(1)} + w_2\,\mathbf{e}^{(2)} + w_3\,\mathbf{e}^{(3)}. \tag{5.49}$$

w_1 bedeutet also jetzt die Radialgeschwindigkeit eines Sternes in der Richtung $\mathbf{e}^{(1)} \equiv \mathbf{e}$, w_2 die Geschwindigkeitskomponente der Eigenbewegung parallel zu den Deklinationskreisen, w_3 parallel zu den Rektaszensionskreisen. Aus der Definition folgt sofort

$$d\mathbf{v}^2 = dw_1^2 + dw_2^2 + dw_3^2 \tag{5.50}$$

und damit auch

$$dv_x\,dv_y\,dv_z = dw_1\,dw_2\,dw_3. \tag{5.51}$$

Damit gilt für Wahrscheinlichkeit, einen Stern mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ anzutreffen,

$$d\,P[w_1, w_2, w_3] = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\,\sigma^3}\,\exp\left[-\frac{\mathbf{v}^2}{2\sigma^2}\right]\,dw_1\,dw_2\,dw_3, \tag{5.52}$$

wobei σ die Dispersionsgeschwindigkeit der betrachteten Sterngruppe bezeichnet. Für $\mathbf{v}^2$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}_\odot^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + 2(\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}^{(1)})\,w_1 \\ + 2(\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}^{(2)})\,w_2 + 2(\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}^{(3)})\,w_3.\end{aligned} \tag{5.53}$$

Da man die Radialgeschwindigkeit astrometrisch nicht messen kann, wird über alle w_1 integriert und man erhält für die Wahrscheinlichkeit im Geschwindigkeitsraum (w_2,w_3)

$$dP[w_2, w_3] = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\,\exp\left[-\frac{\mathbf{v}_\odot^2 - (\mathbf{e}\circ\mathbf{v}_\odot)^2}{2\sigma^2}\right] \times \exp\left[-\frac{Q(w_2,w_3)}{2\sigma^2}\right]\,dw_2\,dw_3$$

mit

$$Q[w_2, w_3] = w_2^2 + w_3^2 + 2(\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}^{(2)})\, w_2 + 2(\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}^{(3)})\, w_3.$$

Führt man jetzt Polarkoordinaten in der (w_2, w_3) Himmelsebene gemäß

$$w_2 = w\, \cos[\varphi],\; w_3 = w\, \sin[\varphi],\; dw_2\, dw_3 = w\, dw\, d\varphi \tag{5.54}$$

ein, so folgt

$$Q[w, \varphi] = w^2 + 2(\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}^{(2)})\, w\, \cos[\varphi] + 2(\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}^{(3)})\, w\, \sin[\varphi].$$

Mit der Hilfsvariablen

$$\xi = \frac{(\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}^{(2)})\, \cos[\varphi] + (\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}^{(3)})\, \sin[\varphi]}{\sqrt{2}\, \sigma} \tag{5.55}$$

gilt dann für die Wahrscheinlichkeit

$$dP[w, \varphi] = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\, \exp\left[-\frac{\mathbf{v}_\odot^2\, \sin^2[\theta]}{2\sigma^2}\right] \times \exp\left[-\frac{w^2 + 2\sqrt{2}\, \xi\, \sigma\, w}{2\sigma^2}\right]\, w\, dw\, d\varphi$$

Mit der Substitution $w = \sigma\, \eta$ ergibt sich nach Integration über η von Null bis Unendlich

$$dP[\varphi] = \frac{1}{2\pi}\, \exp\left[-\frac{\mathbf{v}_\odot^2\, \sin^2[\theta]}{2\sigma^2}\right] \times \mathbf{f}_E\, [\xi]\; d\varphi \tag{5.56}$$

mit der *Eddington'schen Funktion*[3]

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_E[\xi] &= \int_0^\infty \eta\, \exp\left[-\frac{\eta^2 + 2\sqrt{2}\, \xi\, \eta}{2}\right]\, d\eta, \\ &= 1 - \sqrt{\pi}\, \xi\, e^{\xi^2}\, \mathbf{Erfc}[\xi] \\ &= \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n}{\Gamma\left[\frac{n+1}{2}\right]}. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Die Vektoren $\mathbf{v}_\odot$ und die Richtung $\mathbf{e}$ schließen den Winkel θ ein. Die Bedeutung der Variablen ξ wird durch eine alternative Darstellung deutlicher. Offensichtlich ist ξ invariant bei einer Vertauschung von $\mathbf{v}_\odot$ mit

$$\mathbf{v}_\odot^e = \mathbf{v}_\odot - \mathbf{e}\, (\mathbf{e} \circ \mathbf{v}_\odot)\,, \tag{5.58}$$

[3] A. Eddington selber definierte 1914 die modifizierte Funktion $\mathbf{f}[\xi] = \mathbf{f}_E[-\xi]/\sqrt{\pi}$ und berechnete eine Tabelle des Logarithmus dieser Funktion auf vier Dezimalstellen.

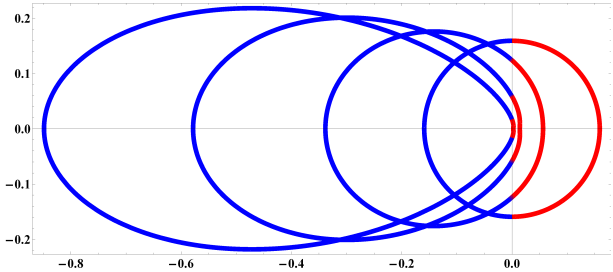


Fig. 5.3: *Die Graphik zeigt die Richtungscharakteristik der Eigenbewegungen von Sternen bei Annahme einer Normalverteilung der Geschwindigkeiten in einer lokalen Umgebung der Himmelskugel. Dargestellt ist der Radiusvektor $r(a, \psi)$ nach Formel (5.66) für die Werte $a = \{0, 0.5, 1.0, 1.5\}$ vom Ursprung (0,0). Je stärker die Apexbewegung der Sonne, desto mehr zeigen die Eigenbewegungen zum Antapex. Die Kurve ist rot für Richtungen zum Apex, blau für Richtungen zum Antapex. Zum erstenmal hat A. Eddington diese Kurven 1906 berechnet ([13]).*

einem Vektor, der senkrecht auf $\mathbf{e}$ steht und in die Richtung des Apex zeigt. Damit gilt also auch

$$\xi = \frac{(\mathbf{v}^e_\odot \circ \mathbf{e}^{(2)})\,\cos[\varphi] + (\mathbf{v}^e_\odot \circ \mathbf{e}^{(3)})\,\sin[\varphi]}{\sqrt{2}\,\sigma}. \tag{5.59}$$

Diese Gleichung kann aber sofort geometrisch interpretiert werden. Denn es gilt wegen der Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^e_\odot \circ \mathbf{e}^{(2)} &= v_\odot\,\sin[\theta]\,\cos(\varphi_A), \\ \mathbf{v}^e_\odot \circ \mathbf{e}^{(3)} &= v_\odot\,\sin[\theta]\,\sin(\varphi_A). \end{aligned} \tag{5.60}$$

Der Winkel φ_A zeigt zum Apex. Mit alledem lässt sich die Variable ξ schreiben als

$$\xi = \frac{v_\odot\,\sin[\theta]\,\cos(\psi)}{\sqrt{2}\,\sigma}, \tag{5.61}$$

wobei $\psi = \varphi_A - \varphi$ die Winkelabweichung zur Apexrichtung bezeichnet. Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Richtungen gilt also

$$dP[\psi] = \frac{1}{2\pi}\,\exp\left[-\frac{v_\odot^2\,\sin^2[\theta]}{2\sigma^2}\right] \times \mathbf{f}_E\left[\frac{v_\odot\,\sin[\theta]\,\cos(\psi)}{\sqrt{2}\,\sigma}\right]\,d\psi. \tag{5.62}$$

$\psi = 0$ bedeutet dann die Apexrichtung, $\psi = \pi$ die Antapexrichtung. Führt man anstatt der Streuung σ wieder die mittlere Geschwindigkeit

vm (*motus peculiaris*) ein, so lautet die wichtige lokale Eddingtonsche Wahrscheinlichkeits - Dichteverteilung der Eigenbewegungen an der Himmelssphäre

$$\boxed{\mathbf{pdf}_E[\gamma,\theta,\psi] = \frac{1}{2\pi}\,\exp\left[-\tfrac{4}{\pi}\,\gamma^2\,\sin^2[\theta]\right]\,\times\mathbf{f}_E\left[\tfrac{2}{\sqrt{\pi}}\,\gamma\,\sin[\theta]\,\cos(\psi)\right].} \tag{5.63}$$

Diese Dichteverteilung beschreibt somit die Anzahl von Sternen, die sich in einer Himmelsregion im Winkelabstand θ vom Apex befinden und sich lokal an der Himmelskugel in eine Richtung bewegen, die mit der Apexrichtung einen Winkel zwischen ψ und $\psi + d\psi$ bilden. Nach Gauss sind nun alle Sterne mit Bewegungsrichtungen $-\pi/2 < \psi < +\pi/2$ „ungünstig“, da bei $\psi = 0$ die Apexrichtung liegt.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbf{pdf}_E[\gamma,\theta,\psi]$ ist normiert, denn es gilt für alle $a > 0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-a^2}\,\mathbf{f}_E[a\,\cos[\psi]]\,d\psi = 1. \tag{5.64}$$

Aufgrund der Integralrelation

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{-a^2}\,\mathbf{f}_E[a\,\cos[\psi]]\,d\psi = \frac{1}{2}\,\mathbf{Erfc}[a] \tag{5.65}$$

folgt aus der Eddington'schen Wahrscheinlichkeitsverteilung der Richtungen natürlich sofort die Gaußsche Formel für die Wahrscheinlichkeit „ungünstiger“ Sterne (5.22).

Die Dichteverteilung w_E beschreibt die Richtungscharakteristik der Eigenbewegungen der Sterne an einer bestimmten Stelle an der Himmelskugel. Mit dem Parameter $a = 2\,\gamma\,\sin[\theta]/\sqrt{\pi}$ definieren wir die Polargleichung

$$\begin{aligned} r(a,\psi) &= \frac{1}{2\pi}\,e^{-a^2}\,\mathbf{f}_E\,[a\,\cos(\psi)] \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\left(1-\sqrt{\pi}\,a\,\cos(\psi)+a^2\,\cos(2\psi)+\ldots\right) \end{aligned} \tag{5.66}$$

Der Radiusvektor $r(a, \psi)$ in irgendeiner Richtung ψ ist damit proportional der Anzahl der Sterne, die sich in diese Richtung bewegen. In der Figur (5.3) ist diese Polarkurve für einige Parameter von a dargestellt. Im Februar 1838 hat GAUSS für den Fall von gleichen Sterngeschwindigkeiten – aber zufälligen Richtungen – eine vereinfachte, aber analoge Formel wie (5.66) für die Häufigkeit der Positionswinkel der Eigenbewegungen aufgestellt. Diese Ergebnisse wurden aber nie veröffentlicht.

5.2.1 Die Zweistromhypothese

Ab etwa 1904 erkannte insbesondere Kapteyn, dass die Geschwindigkeitsverteilung der Sterne in der Sonnenumgebung nicht isotrop sein kann. Es gibt im *Geschwindigkeitsraum* zwei bevorzugte Richtungen (Vertex I und Vertex II), in welche die höheren Geschwindigkeiten gerichtet sind, nachdem man den Anteil der Sonnenbewegung abgezogen hatte. EDDINGTON versuchte 1906, mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion („two star streams“, „drift theory“)

$$\mathbf{pdf}_{KE}(\mathbf{v}) = \frac{q_1}{(2\pi)^{3/2}\,\sigma_1^3}\,\exp\left[-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{v_1})^2}{2\sigma_1^2}\right] + \frac{q_2}{(2\pi)^{3/2}\,\sigma_2^3}\,\exp\left[-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{v_2})^2}{2\sigma_2^2}\right] \tag{5.67}$$

die Beobachtungsbefunde in Einklang zu bringen. Hier bezeichneten $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ die „Vertex“ - Richtungen der beiden „Sternströme“und $q_1 = N_1/(N_1 + N_2)$ sowie $q_2 = N_2/(N_1 + N_2)$. Berechnet man mit dem obigen Ausdruck das Vektorintegral

$$\oint \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathbf{v} - \mathbf{v}_\odot - \mathbf{e}\left((\mathbf{v} - \mathbf{v}_\odot) \circ \mathbf{e}\right)\right] \mathbf{pdf}_{KE}(\mathbf{v})\, d^3\mathbf{v}\, d\mathbf{e}, \tag{5.68}$$

so erhält man den Ausdruck

$$\frac{2}{3}\left\{N_1\,\mathbf{v}_1 + N_2\,\mathbf{v}_2 - (N_1 + N_2)\,\mathbf{v}_\odot\right\}. \tag{5.69}$$

Die GAUSS - Airy - BRAVAIS Methode liefert also nur dann den „richtigen“ Apex, wenn die Nebenbedingung

$$N_1\,\mathbf{v}_1 + N_2\,\mathbf{v}_2 = 0 \tag{5.70}$$

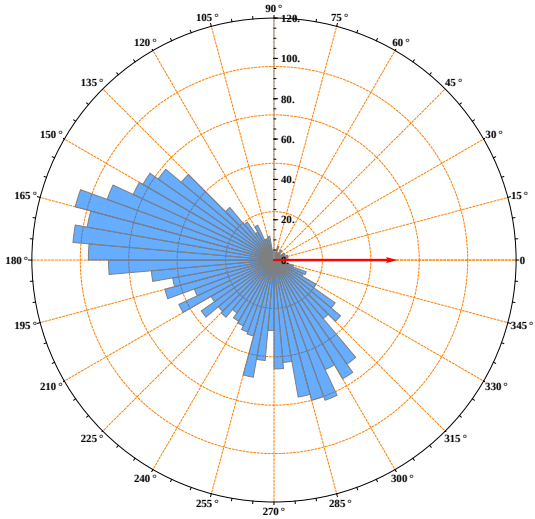


Fig. 5.4: *Die Graphik zeigt die Richtungscharakteristik der Eigenbewegungen von Sternen aus dem HIPPARCHOS Katalog in der Himmelsregion mit Rektaszension* $\alpha = 0°$ *und Deklination* $\delta = +50°$*. Der halbe Öffnungswinkel des lokalen Sichtkegels beträgt* $10°$*. Der rote Pfeil zeigt die Richtung zum Apex beim Winkel* $\psi = 0$*. Eine ähnlichkeit mit der theoretisch zu erwartenden Kurve in Figur (5.3) ist kaum zu sehen. Daraus folgt zwingend, dass die Geschwindigkeitsverteilung stark anisotrop sein muss. Diese Entdeckung wurde 1905 auf einer Tagung in Südafrika von Kapteyn bekanntgegeben.*

erfüllt ist. Damit zeigt sich auch, dass die Gauss - Airy Bravais Methode *unabhängig* von der Annahme der Isotropie der Sterngeschwindigkeiten ist. Eddington hat die 9 unabhängigen Parameter dieser Zweistromhypothese mit zwei Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Form (5.66) den damaligen Beobachtungen angepasst und insbesondere eine leichte Asymmetrie ($N_1 \neq N2$) festgestellt. Lagen die Richtungen der beiden „Driften“ an der Himmelskugel fest, so folgte die eigentliche Apexrichtung aus der Relation

$$\mathbf{v}_\odot = \frac{N_1\,\mathbf{v}_1 + N_2\,\mathbf{v}_2}{N_1 + N_2}. \tag{5.71}$$

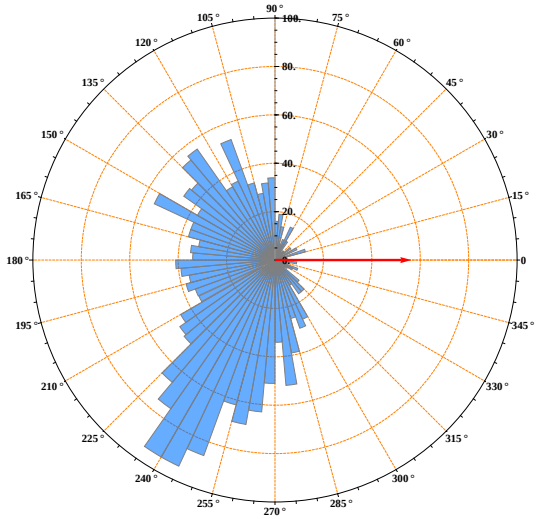


Fig. 5.5: *Die Graphik zeigt die Richtungscharakteristik der Eigenbewegungen von Sternen aus dem HIPPARCHOS Katalog in der Himmelsregion mit Rektaszension* $\alpha = 300°$ *und Deklination* $\delta = +17°$*. Der halbe Öffnungswinkel des lokalen Sichtkegels beträgt wieder* $10°$*. Der rote Pfeil zeigt die Richtung zum Apex beim Winkel* $\psi = 0$*. Jede Himmelsregion hat ihre „eigene“ Charakteristik und eine ähnlichkeit mit der isotropen Kurve in Figur (5.3) ist nicht zu sehen.*

Doch mit den Jahren hat sich dann doch herausgestellt, dass die Schwarzschild'sche Hypothese einer ellipsoidischen Verteilung mathematisch einfacher ist und die Beobachtungen auch physikalisch besser beschreiben kann. Die „Zweistromhypothese“ hat also nur noch „historischen Wert“, der aber erkenntnistheoretisch nicht zu unterschätzen ist.

5.2.2 Die Ellipsoidverteilung

Ab etwa 1907 machte K. Schwarzschild (1873 - 1916) in Göttingen den Versuch, die *anisotrope Geschwindigkeitsverteilung* der Sterne in unmittelbarer Sonnenumgebung durch eine zu drei orthogonalen Achsen proportionale Gaußverteilung mit unterschiedlichen Streuungen zu be-

schreiben Die verallgemeinerte Form (3.18) dieser Verteilungsfunktion lautet

$$\mathbf{pdf}_S(\mathbf{v}) = \frac{j_1\, j_2\, j_3}{(\pi)^{3/2}}\, \exp\left[-\sum_{i=1}^{i=3} j_i^2\, (\mathbf{n_i} \circ \mathbf{v})^2\right], \tag{5.72}$$

Die Richtungsvektoren $\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}$ und $\mathbf{n_3}$ stellen ein orthonormiertes Basissystem dar und zeigen in die Richtungen der großen Achsen des Ellipsoiden an der Himmelskugel. Die Größen j_1, j_2, j_3 hängen mit den Geschwindigkeitsstreuungen über die Beziehungen

$$j_k = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma_k} \qquad \{k = 1, 2, 3\} \tag{5.73}$$

zusammen.

Die früheren Rechnungen für den isotropen Fall könne jetzt für den allgemeineren Fall analog wiederholt werden. Wir beabsichtigen, diese mehr *historische* Untersuchung in der Zukunft auszuführen.

6 Galaktischer Apex aus Kugelsternhaufen

Eine völlig neue Fragestellung ergab sich zu Beginn des 20. Jahrhunderts, als erste Radialgeschwindigkeiten von einigen Kugelsternhaufen gemessen werden konnten. Es gelang mit Cepheiden - Veränderlichen, sogar die Entfernung von einigen Kugelhaufen abzuschätzen. Shapley machte so 1917 die Hypothese, den möglichen *Zentroid* der betrachteten Kugelhaufen mit dem Zentrum des Milchstraßensystems zu identifizieren und so die Entfernung Sonne - galaktisches Zentrum zu bestimmen. Da er aber die Eichung der Perioden - Leuchtkraftbeziehung falsch einschätzte, waren die Entfernungen der Kugelhaufen um den Faktor 3 zu hoch. Dies führte 1920 zwischen Shapley und Curtis zur „großen Debatte“, ob die Spiralnebel wirklich „Extragalaktische Weltinseln“ sind.[1]

Die Bestimmung des galaktischen Zentrums bei Shapley ist einfach zu skizzieren. Ausgangspunkt ist Gleichung (2.10), die jetzt lautet

$$\mathbf{R}_\odot = -\frac{\sum_n M_n\, r_n\, \mathbf{e}_n}{m_\odot + \sum_n M_n}. \tag{6.1}$$

Hier bedeutet M_n die Masse des Kugelhaufens der Marke n, r_n seine Entfernung und $\mathbf{e}_n$ seine Richtung. Unter der Annahme, dass die Massen der Kugelhaufen ungefähr gleich sind und die Masse der Sonne vernachlässigt werden kann, folgt sofort

$$\mathbf{R}_\odot = -\frac{1}{N} \sum_n r_n\, \mathbf{e}_n. \tag{6.2}$$

[1] Frank Shu schreibt 1982 in seinem Buch *The Physical Universe*: *The Shapley-Curtis debate makes interesting reading even today. It is important, not only as a historical document, but also as a glimpse into the reasoning processes of eminent scientists engaged in a great controversy for which the evidence on both sides is fragmentary and partly faulty. This debate illustrates forcefully how tricky it is to pick one's way through the treacherous ground that characterizes research at the frontiers of science.*

Problematisch ist an dieser Abschätzung für das galaktische Zentrum $\mathbf{Z}_{GC} = -\mathbf{R}_\odot$ natürlich die Tatsache, dass der Datensatz vollständig sein muss - also ein Auswahleffekt durch Nichtsichtbarkeit von Kugelhaufen in niedrigen galaktischen Breiten wirklich ausgeschlossen ist. Genau dies ist aber der Fall.

äußerst interessant ist das Problem der Apexbewegung der Sonne *relativ* zum System der Kugelhaufen im galaktischen Halo. Beschränkt man sich auf Radialgeschwindigkeiten, so folgt unmittelbar für $\dot{\mathbf{R}}_\odot = \mathbf{V}_\odot$

$$\sum_n \left(\mathbf{e}_n \circ \mathbf{V}_\odot\right) \mathbf{e}_n = -\sum_n \dot{r}_n \mathbf{e}_n. \tag{6.3}$$

Nun liegen seit Jahren auch Eigenbewegungen von einigen wenigen Kugelsternhaufen vor. NUR aus Eigenbewegungen der Kugelhaufen folgt aber der galaktische Apex zu (Gauss - Bravais - Airy)

$$\sum_n (\mathbf{V}'_\odot - \left(\mathbf{e}_n \circ \mathbf{V}'_\odot\right) \mathbf{e}_n) = -\sum_n r_n \dot{\mathbf{e}}_n. \tag{6.4}$$

Nun entsteht eine Frage, die bei der klassischen Apexbewegung der Sonne bezüglich ihrer lokalen Sternumgebung nicht auftrat: Welcher physikalische (dynamische oder kinematische) Unterschied besteht zwischen den so bestimmten Geschwindigkeiten $\mathbf{V}_\odot$ und $\mathbf{V}'_\odot$? Kann man eine Aussage über die eigene ABSOLUTE Geschwindigkeit bezüglich des Zentroiden der Kugelhaufen machen, wenn man NUR Radialgeschwindigkeiten oder NUR Eigenbewegungen messen kann - aber über die Bewegungsverhältnisse der Kugelhaufen selbst nichts weiß - z.B könnte das Halo der Kugelhaufen eine Nettodrehimpuls bezüglich des gewählten Zentroiden haben - dann aber würde man nur die Eigengeschwindigkeit $\mathbf{V}_\odot$ RELATIV zu einem rotierenden System aus den Radialgeschwindigkeiten ableiten können[2].

Noch komplizierter werden die Verhältnisse, wenn es zwei oder mehrere Kugelhaufen - Populationen gibt - eventuell auch mit retrograder Rotation um das galaktische Zentrum. Dann kann man nur aus den wirklichen Raumbewegungen der Kugelhaufen den „galaktischen Apex“ bestimmen.

[2] Das klassische Problem der Astronomie: Mit welcher Minimalhypothese konnte Kepler die Bahnen von Mars und Erde vermessen? Die notwendige Hypothese war: Nach einem Marsjahr stand der Mars immer wieder an der gleichen Stelle im Raum - nach einem Erdjahr steht die Erde immer wieder am gleichen Raumpunkt

7 Die Bestimmung der galaktischen Rotation

Nach Vorarbeiten im 19. Jahrhundert gelang es schließlich J. Oort[1] 1927, mit den theoretischen Vorstellungen von Lindblad die differentielle Rotation der Milchstraße aus Radialgeschwindigkeiten und den Eigenbewegungen überzeugend abzuleiten. Damit war endgültig klar, dass das Milchstraßensystem eine scheibenartig flache Struktur mit einem speziellen Rotationsgesetz darstellt. Ausgangspunkt der Oortschen Methode ist wieder die Gleichung der von der Apexbewegung der Sonne befreiten „Besselpole“

$$\mathbf{e} \times \mathbf{v} = \mathbf{e} \times (r\,\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{v}_{\odot}). \tag{7.1}$$

Diese Vektorgleichung wird nun im galaktischen Koordinatensystem (l,b) in der Hillschen Approximation betrachtet. In dieser Näherung ist das lokale Geschwindigkeitsfeld eine lineare Scherströmung der Form (Näherung hier: $\mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\Omega\, y \\ (1-2\beta)\,\Omega\, x \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2\beta\,\Omega\, x \\ 0 \end{pmatrix}_{shear} + \begin{pmatrix} -\Omega\, y \\ \Omega\, x \\ 0 \end{pmatrix}_{rot} \end{aligned} \tag{7.2}$$

[1] Jan Hendrick Oort(1900 - 1992). Subrahmanyan Chandrasekhar bemerkte nach seinem Tod 1992: *The great oak of Astronomy has been felled, and we are lost without its shadow*

wo Ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation und β den Scherströmparameter, definiert durch

$$\beta = -\frac{1}{2}\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln R}, \tag{7.3}$$

bedeuten. In einem Keplerpotential wäre $\beta = 3/4$. (siehe Appendix A) Auch im Falle $\beta = 0$ (keine differentielle Rotation) existiert ein Strömungsfeld (Wirbelfeld), da man ja noch die allgemeine Rotation im Inertialsystem um das galaktische Zentrum mitmacht.

Mit dem Richtungsvektor (dem Richtungskosinus) $\mathbf{e} = (e_x, e_y, e_z)$ und den Sternpositionen $x = r\,e_x$ und $y = r\,e_y$ ergibt sich dann für die z - Komponente der Besselpole

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{v})_z = (1 - 2\beta)\,\Omega\,r\,e_x^2 + \Omega\,r\,e_y^2 \tag{7.4}$$

Da für die Richtungskosinusse $e_x = \cos(l)\cos(b)$ und $e_y = \sin(l)\cos(b)$ gilt, folgt unmittelbar

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{v})_z = [(1 - \beta)\,\Omega\,r\, - \beta\,\Omega\,r\,\cos(2l)]\cos(b)^2. \tag{7.5}$$

Das Vorzeichen von Ω kann hier positiv als auch negativ sein - je nach Rotationssinn. Positiv ist Ω, wenn der Rotationssinn gegen den Uhrzeigersinn erfolgt. Ort selbst definiert nun die beiden Konstanten

$$\mathbf{A} = \beta\,|\Omega|; \qquad \mathbf{B} = -(1 - \beta)\,|\Omega| \tag{7.6}$$

folgt dann

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{v})_z = -r\,[\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\cos(2l)]\cos(b)^2. \tag{7.7}$$

Mit dem normierten Drehimpulsvektor $\mathbf{N} = \boldsymbol{\omega}/|\boldsymbol{\omega}|$ der Galaxies, der zum „eigentlichen“ Nordpol zeigt(astronomisch aber als der „Südpol“ bezeichnet wird), folgt dann sofort

$$\mathbf{N} \circ (\mathbf{e} \times \mathbf{v}) = -r\,[\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\cos(2l)]\cos^2(b). \tag{7.8}$$

Dies wiederum kann durch die beobachtbaren Bewegungsgrößen eines Sterns der Marke n

$$\boxed{[\mathbf{N}, \mathbf{e}_n, \dot{\mathbf{e}}_n + \mathbf{v}_\odot/r_n] = -\,[\mathbf{A}\,\cos(2l_n) + \mathbf{B}]\cos^2(b_n)} \tag{7.9}$$

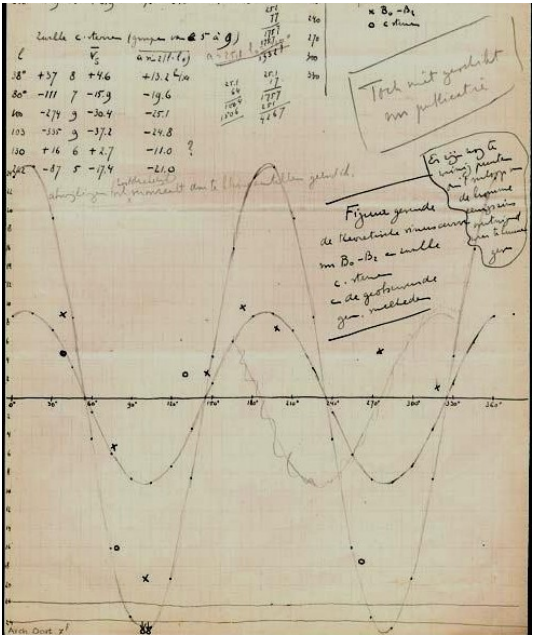


Fig. 7.1: *Erste Notizen von J. Oort im Jahre 1927, um aus dem systematischen Gang der Radialgeschwindigkeiten einiger Sterne längst der galaktischen Länge die lokale Rotationskonstante* **A** *unserer Galaxis abzuleiten. Bemerkung oben rechts: „Noch nicht geeignet zur Publikation“.*

ausgedrückt werden. Dies ist die koordinateninvariante Darstellung der Oortschen Methode zur Bestimmung der Rotationskonstanten **A** und **B**. Für jeden Stern wird die Projektion seines Drehimpulsvektors $\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}}$ auf den auf eins normierten Richtungsvektor des Drehimpulses der Galaxis als Funktion der galaktischen Länge betrachtet. Dabei muss sich wegen $\cos(2l)$ eine „Doppelwelle“ in den so projizierten Eigenbewegungen ergeben. Da Winkelgeschwindigkeiten wie **A** oder **B** wieder in *km/s/kpc* angegeben werden, muss (7.9) noch umgeschrieben werden in die Form

$$\boxed{4.74\ [\mathbf{N}, \mathbf{e}_n, \dot{\mathbf{e}}_n] + [\mathbf{N}, \mathbf{e}_n, \mathbf{v}_\odot]\ \pi_n = -\,[\mathbf{A}\ \cos(2l_n) + \mathbf{B}]\cos^2(b_n).} \tag{7.10}$$

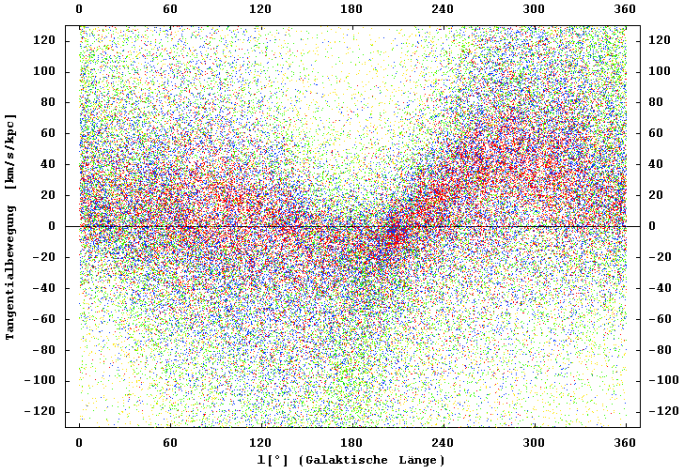


Fig. 7.2: *Die Oortsche Doppelwelle der Tangentialgeschwindigkeiten von 110000 Sternen des HIPPARCOS Kataloges, berechnet aus dem vektoriellen Spatprodukt* $[\mathbf{N}, \mathbf{e}_n, 4.74\,\dot{\mathbf{e}}_n + \mathbf{v}_\odot\,\pi_n]$*, wo* $\mathbf{N}$ *der Einheitsvektor zum galaktischen Südpol (Richtung des Drehimpulsvektors) darstellt und* $\dot{\mathbf{e}}_n$ *in Millibogensekunden pro Jahr und* π_n *in Bogensekunden gemessen wird. Die roten Punkte bezeichnen Sterne mit Parallaxen kleiner 3 ma. Die Doppelwelle als Funktion der galaktischen Länge ist mehr oder weniger gut zu erkennen.*

Anhand der Abbildung (7.2) sieht man deutlich die Anisotropie der Eigenbewegungen längs des galaktischen äquators. Doch für die Bestimmung der Rotationskonstanten ist ein solcher Plot nur bedingt geeignet. Im nächsten Kapitel soll eine andere Methode für dieses Problem diskutiert werden.

7.1 Der Helmholtzsche Satz

Helmholtz stellte in seiner berühmten Arbeit über die Wirbelbewegung in der Hydrodynamik aus dem Jahre 1858 ([27]) den Satz auf, dass die allgemeine, klein gedachte (nötigenfalls auf eine kleine Zeit Δt beschränkte) Ortsveränderung eines deformierbaren ausgedehnten Körpers sich für ein hinreichend kleines Volumen desselben darstellen lässt als Summe von drei Termen:

1. einer *Translation*

2. einer *Rotation*

3. einer *Expansion/Kompression nach drei orthogonalen Richtungen*

Das Ganze folgt aus einer Taylorentwicklung des Geschwindigkeitsfeldes im hydrodynamischen Kontinuum. Der Translation entspricht dann die Apexbewegung der Sonne. Der Rotation könnte nun Teil einer lokalen Scherströmung (*galactic shear*) entsprechen, beobachtet in einem Inertialsystem. Der dritte Term schließlich entspräche einer Kompression oder allgemeiner einer Deformation der Sterndichte in der Sonnenumgebung (*z.B. Sonne läuft in eine spiralförmige Dichtewelle*).

Mathematisch gilt nun für die zeitliche Veränderung eines Mediums in erster Taylorscher Näherung

$$\boxed{\mathbf{v}_n + r_n\left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_n\right) + r_n\left(\mathbf{H} \otimes \mathbf{e}_n\right) = \mathbf{v}_\odot + \dot{r}_n \mathbf{e}_n + r_n \dot{\mathbf{e}}_n} \tag{7.11}$$

Auf der linken Seite steht zunächst die irreguläre Geschwindigkeit $\mathbf{v}_n$ des Sternes. Dann kommen zwei systematische *quasi - hydrodynamische* Anteile hinzu: Ein *Wirbelfeld* und ein *Deformationssfeld*. Der axiale Vektor $\boldsymbol{\omega}$ hat die drei Komponenten

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{7.12}$$

und stellt den hypothetischen Wirbelvektor der Scherströmung dar. $\mathbf{H}$ dagegen ist ein symmetrischer Tensor (*Deformationsstensor („Hubble - Tensor“)*) und es gilt

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} & h_{xz} \\ h_{yx} & h_{yy} & h_{yz} \\ h_{zx} & h_{zy} & h_{zz} \end{pmatrix}, \qquad h_{ik} = h_{ki} \tag{7.13}$$

Die Größen h_{xx}, h_{yy}, h_{zz} beschreiben die longitudinale Deformation (Dehnung oder Stauchung pro Zeiteinheit), die Größen h_{xy}, h_{yz}, h_{xz} die transversale Deformation (Scherung pro Zeiteinheit) und die Summe $h_{xx} + h_{yy} + h_{zz}$ beschreibt die relative Volumenänderung oder Dilatation pro Zeiteinheit. Die physikalischen Dimensionen der 6 unabhängigen Komponenten sind daher Frequenzen oder Winkelgeschwindigkeiten. Im Prinzip

ist es zunächst egal, ob wir die kinematischen Gleichungen (7.11) auf *Sterne* in der Sonnenumgebung, auf *Kugelhaufen* um unsere Galaxis oder auf *Galaxien* in einem **expandierenden und rotierenden** Universum anwenden.[2]

Wendet man die obige Zerlegung auf die lokale galaktische Umgebung der Sonne an, so ist der Betrag des Wirbelvektors gleich der zweiten Oortschen Rotationskonstanten $\mathbf{B}$. Es gilt also $|\boldsymbol{\omega}| = \mathbf{B}$. Unter der Voraussetzung, dass das lokale galaktische Scherströmfeld „divergenzfrei“ ist, wie es Oort 1927 angenommen hat, sind andererseits die Eigenwerte des Deformationstensors $\mathbf{H}$ identisch gleich $\lambda_1 = \mathbf{A}, \lambda_2 = -\mathbf{A}, \lambda_3 = 0$. $\mathbf{A}$ ist hier die erste Oortsche Rotationskonstante und prinzipiell bestimmbar. Es wird sich aber zeigen, dass $\mathbf{A}$ nicht **willkürfrei** aus **reinen** Eigenbewegungen zu bestimmen ist.

Die obige Zerlegung gilt sehr allgemein. Wenn für zahlreiche Feldgalaxien oder Galaxienhaufen Radialgeschwindigkeiten und die wesentlich unsicheren Entfernungen bekannt sind, kann der Apexvektor der Sonne bezüglich eines globalen kosmischen Hintergrundes und der Tensor $\mathbf{H}$ (“*Hubble-Tensor*“) aus der quadratischen Form

$$Q(\mathbf{v}_\odot, \mathbf{H}) = \sum_n \left[\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}_n - r_n \left(\mathbf{H} \otimes \mathbf{e}_n\right) \circ \mathbf{e}_n + \dot{r}_n\right]^2 \tag{7.14}$$

durch Minimierung nach $\mathbf{v}_\odot$ und $\mathbf{H}$ bestimmt werden. Die Zahl der unbekannten Parameter ist hier 9. In der Praxis beschränkt man sich wegen der extrem unsicheren Entfernungen der Galaxien auf einen *isotropen* Expansionstensor mit verschwindenden Nicht-Diagonalelementen, also auf eine *einzige Hubblekonstante*.

Carl Wilhelm Wirtz (1876 - 1939) fand nach dem Ende des Ersten Weltkrieges, nachdem er an die Kieler Sternwarte berufen worden war, in den Jahren 1922 und 1924 zwei entscheidende „kosmologische“ Beziehungen, zuerst die zwischen Helligkeit und Radialgeschwindigkeit, dann die zwischen Winkeldurchmesser und Radialgeschwindigkeit von „Spiral - Nebeln“. Zuvor hatte er schon den Zielpunkt (Apex) der Sonnenbewegung bezüglich der Kugelhaufen und den „kosmischen“ Zielpunkt der Sonne bezüglich der „Nebel“ aus einem spärlichen Datenmaterial abgeleitet.

[2] Der Helmholtzsche Satz bezüglich der Zerlegung kleiner infinitesimaler Bewegungen in einem hydrodynamischen Geschwindigkeitsraum wurde von dem Astronomen S.V.M. Clube 1972 und 1973 bei der Diskussion des FKS3 konsequent angewandt.[12]

Beide Zielpunkte unterschieden sich von dem „klassischen“ Apex der Sonnenumgebung. Schon 1922 bemerkt WIRTZ auch die Möglichkeit einer *anisotropen* Expansionsbewegung der Nebel, motiviert wohl aber durch einen Auswahleffekt bezüglich der galaktischen Ebene (Dunkelwolken).

7.2 Die erweiterte Gauss-Bravais-Airy Methode

Wir wollen nun zeigen, wie zwanglos man einen wichtigen *systematischen* Effekt bei der GAUSS – BRAVAIS – Airy Methode berücksichtigen kann. Dieser Effekt eines lokalen *Wirbelfeldes* konnte erst 100 Jahre nach den Gausschen Rechnungen von der Beobachtung und der Theorie herausgefiltert werden. Um also den Einfluss eines galaktischen Wirbelfeldes hier zu untersuchen, setzten wir für den Expansions - Deformationstensor $\mathbf{H}$ zunächst $\mathbf{H} = 0$ und multiplizieren (7.11) skalar mit $\mathbf{e}_n$, um für die Radialgeschwindigkeit einen Ausdruck zu bekommen, der wiederum in die Gleichung eingesetzt wird. Nach Summation über alle Sterne ergibt sich für den Apex gegenüber früher die modifizierte Gleichung

$$\boxed{\sum_n (\mathbf{v}_\odot - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\,\mathbf{e}_n) = -\sum_n r_n(\dot{\mathbf{e}}_n - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_n))} \tag{7.15}$$

Wie zu erwarten, werden von der Eigenbewegung eines Sternes die systematische Komponente abgezogen. Sind aber die Sterne relativ gleichmäßig über die Himmelskugel verteilt, dürfte der Einfluss des Wirbelfeldes in der GAUSS-BRAVAIS-Airy Methode auf den Apex nur gering sein. Betrachtet man allerdings Sterne mit nur sehr geringer Eigenbewegung, so kann der Effekt des Wirbelfeldes schon merklich werden. 1838 findet GAUSS anhand der Argelanderschen Messungen wohl erste Hinweise darauf, dass ein unbekannter systematischer Effekt die Bewegung der Sterne überlagert. Er unterteilt die Sterne in Gruppen nach der Größe der Eigenbewegung (noch nicht Spektralklassen, Parallaxen oder nach den galaktischen Koordinaten) und auch in unterschiedliche Himmelszonen und findet mit der “Bravais-Airy Methode“ bei kleiner werdenden Eigenbewegungen systematisch südlichere Apexpositionen. GAUSS vermutet **eine** Ursache in einer fehlerhaften Präzessionskonstanten. OTTO STRUVE war dann wohl der Erste, der aus Eigenbewegungsdaten sowohl den Apex der Sonne als auch eine Korrektur der Präzessionskonstanten bestimmte.[46]

Im Folgenden soll nun, wieder ganz im "Geiste" von GAUSS, BRAVAIS oder AIRY, eine Methode entwickelt werden, um gleichzeitig die Apexbewegung $\mathbf{v}_\odot$ der Sonne als auch eine eventuell vorhandene lokale "galaktische" Wirbelbewegung, beschrieben durch den Wirbelvektor $\boldsymbol{\omega}$, aus den Eigenbewegungen einer Sterngruppe abzuleiten. Ziel soll es sein, die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{\omega}$ zu bestimmen. Der Betrag dieses Vektors ist mit dem Betrag der zweiten Oortschen Konstanten $\mathbf{B}$ identisch.

Die relevante Quadratsumme lautet mit einem Wirbelfeld $\boldsymbol{\omega}$ wie folgt

$$\sum_n [\mathbf{v}_\odot - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\,\mathbf{e}_n + r_n \dot{\mathbf{e}}_n - r_n(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_n)]^2 \tag{7.16}$$

Die zu minimierende reduzierte Summe lautet jetzt

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{v}_\odot, \boldsymbol{\omega}) = \sum_n [\mathbf{v}_\odot^2 - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)^2 + 2\,r_n(\dot{\mathbf{e}}_n \circ \mathbf{v}_\odot) + r_n^2 \left(\boldsymbol{\omega}^2 - (\mathbf{e}_n \circ \boldsymbol{\omega})^2\right) \\ - 2\,r_n \mathbf{v}_\odot \circ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_n) - 2\,r_n^2\,\boldsymbol{\omega} \circ (\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n)] \end{aligned} \tag{7.17}$$

Für ein Extremum muss sowohl der partielle Gradient nach $\mathbf{v}_\odot$ als auch nach $\boldsymbol{\omega}$ null sein. Diese Bedingungen führen zu zwei gekoppelten Vektorgleichungen, einer verallgemeinerten **Apexgleichung** und einer neuen **Vortexgleichung** (*Vortex* = Wirbel). Es gilt also

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}_\odot}\, Q(\mathbf{v}_\odot, \boldsymbol{\omega}) &= 0 \quad \text{(Apexgleichung);} \\ \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\omega}}\, Q(\mathbf{v}_\odot, \boldsymbol{\omega}) &= 0 \quad \text{(Vortexgleichung).} \end{aligned} \tag{7.18}$$

Die verallgemeinerte **Apexgleichung** und die neue **Vortexgleichung** lauten dann

$$\boxed{\sum_n [\mathbf{v}_\odot - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\,\mathbf{e}_n] = -\sum_n r_n\,[\dot{\mathbf{e}}_n - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_n)]} \tag{7.19}$$

$$\boxed{\sum_n r_n^2\,[\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{e}_n \circ \boldsymbol{\omega})\,\mathbf{e}_n] = \sum_n r_n\,[r_n\,(\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n) + (\mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_\odot)]} \tag{7.20}$$

Diese beiden Vektorgleichungen benötigen zu ihrer Auswertung genau die Daten, die HIPPARCOS gemessen hat: *Position, Eigenbewegung und*

Parallaxe. Auf der linken Seite der neuen Vortexgleichung[3] steht physikalisch der räumliche **Trägheitstensor** der Sterngruppe, multipliziert mit dem Wirbelvektor $\boldsymbol{\omega}$, auf der rechten Seite der um die Apexbewegung korrigierte **Drehimpuls** des Systems, wobei hier die "Besselpole" die wichtige Rolle spielen. Die Vortexgleichung ist eine "Drehimpulsgleichung", in der notwendig die Entfernungen der Sterne eingehen müssen. Denn sie folgt auch direkt aus (7.11) durch vektorielle Multiplikation mit $r_n \mathbf{e}_n$ bei Streichung des Dehnungstensors zu

$$r_n\,(\mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_n) + r_n^2\,[\mathbf{e}_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_n)] = r_n\,(\mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_\odot) + r_n^2\,(\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n) \quad (7.21)$$

Der erste Term stellt aber nach Summation über alle Sterne den Drehimpuls der irregulären Geschwindigkeitskomponente der Sterne im Bezug auf den *Zentroid* der Sterngruppe dar. Da diese Komponente null sein soll, folgt sofort die Vortexgleichung. Die Apexgleichung folgt also aus einer Impulsbilanz, die Vortexgleichung aus einer Drehimpulsbilanz bezüglich der irregulären Komponenten der Sternbewegungen. Neben der Richtung des Apex kann nun auch der Wirbelvektor $\boldsymbol{\omega}$, welcher die *lokale galaktische Scherströmung* bezüglich des lokalen kosmischen "Inertialsystems" beschreibt, bestimmt werden. Als Erweiterung der Gausschen Formel für den Minimalwert der Quadratsumme gilt jetzt

$$Q_{min} = \sum_n [[r_n\,\dot{\mathbf{e}}_n]^2 + r_n(\dot{\mathbf{e}}_n \circ \mathbf{v}_\odot) - r_n\,\boldsymbol{\omega} \circ (\mathbf{e}_n \times \mathbf{v}_\odot) - r_n^2\,(\boldsymbol{\omega} \circ (\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n))] \quad (7.22)$$

Die erweiterte APEX-Gleichung lautet nun in den üblichen Skalierungen

$$\sum_n [\mathbf{v}_\odot - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\,\mathbf{e}_n] = -4.74 \sum_n [\dot{\mathbf{e}}_n - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_n)]/\pi_n \quad (7.23)$$

Die physikalische Dimension des Wirbelvektors $\boldsymbol{\omega}$ ist hier wie für die Eigenbewegungen *Millibogensekunden pro Jahr*. In der Literatur werden aber wegen größerer Anschaulichkeit Winkelgeschwindigkeiten oder Frequenzen in *km/(s kpc)*, also in Kilometern pro Sekunde pro Kiloparsec angegeben. es gilt dann

$$\omega\,[km/(s\,kpc)] = \frac{AE[km]}{J[s]}\,\omega[mas/J] \equiv 4.74\,\omega[mas/J]. \quad (7.24)$$

[3] Momentan ist unklar, ob diese Gleichung je in der Literatur diskutiert wurde. In dem Buch von Smart (1938) taucht sie nicht auf. Bis jetzt ist auch unklar, ob diese Vortexgleichung bei Bravais oder bei Airy zu finden ist.

Alternativ gilt also in dieser modifizierten Skalierung

$$\sum_n \left[\mathbf{v}_\odot - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\,\mathbf{e}_n\right] = -4.74 \sum_n (\dot{\mathbf{e}}_n/\pi_n) + \left(\boldsymbol{\omega} \times \sum_n (\mathbf{e}_n/\pi_n)\right) \tag{7.25}$$

Hier gilt dann für die Skalierung der "galaktischen Rotation" $\boldsymbol{\omega} \to \omega[km/(s\,kpc)]$, wenn die Sonnengeschwindigkeit in Kilometern pro Sekunde [km/s], die Eigenbewegungen in Millibogensekunden pro Jahr [ma/J] und die Parallaxen in Millibogensekunden [mas] gemessen werden. Da die Entfernungen r_n durch $r_n = 1[kpc]/\pi_n[ma]$ gegeben sind, für die Tangentialgeschwindigkeit in *km/s* $\mathbf{v}_{Tn} = r_n\,\dot{\mathbf{e}}_n = 4.74\,\dot{\mathbf{e}}_n[mas/J]/\pi_n[mas]$ gilt, folgt analog für die Vortexgleichung in *derselben Skalierung*

$$\sum_n \left[\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{e}_n \circ \boldsymbol{\omega})\,\mathbf{e}_n\right]/\pi_n^2 = 4.74 \sum_n (\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n)/\pi_n^2 + \left(\sum_n (\mathbf{e}_n/\pi_n) \times \mathbf{v}_\odot\right). \tag{7.26}$$

Die Vortexgleichung lässt sich "physikalisch" als

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\Theta}\,\boldsymbol{\omega} \tag{7.27}$$

schreiben, wobei der Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}$ der Sterngruppe durch

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} \sum(e_{yn}^2 + e_{zn}^2)/\pi_n^2 & -\sum(e_{xn}e_{yn})/\pi_n^2 & -\sum(e_{xn}e_{zn})/\pi_n^2 \\ -\sum(e_{xn}e_{yn})/\pi_n^2 & \sum(e_{xn}^2 + e_{zn}^2)/\pi_n^2 & -\sum(e_{yn}e_{zn})/\pi_n^2 \\ -\sum(e_{xn}e_{zn})/\pi_n^2 & -\sum(e_{yn}e_{zn})/\pi_n^2 & \sum(e_{xn}^2 + e_{yn}^2)/\pi_n^2 \end{pmatrix} \tag{7.28}$$

gegeben ist. Die Vortexgleichung unterscheidet sich also von der Gausschen Apexgleichung, weil in den obigen "Trägheitstensor" die wirklichen Koordinaten der Sterne (Massen normiert auf 1) eingehen. Die gekoppelten Vektorgleichungen (7.25) und (7.26) sind die Schlüsselgleichungen, um *sowohl* den Apexvektor der Sonne *als auch* den Wirbelvektor der scheinbaren lokalen galaktischen Rotation zu bestimmen. Wir wenden sie nun auf unseren mit Argelander vergleichbaren Sternkatalog von 518 Sternen heller als 4mag an – ohne Rücksicht auf Spektraltyp, OB-Assoziationen oder anderer Gruppenzugehörigkeit. Mit der Hypothese $\boldsymbol{\omega} = 0$ ergibt zunächst die Apexgleichung

$$\alpha = \mathbf{269.88}^\circ, \qquad \delta = +\mathbf{23.24}^\circ, \qquad v_\odot = 21.95\,km\,s^{-1} \tag{7.29}$$

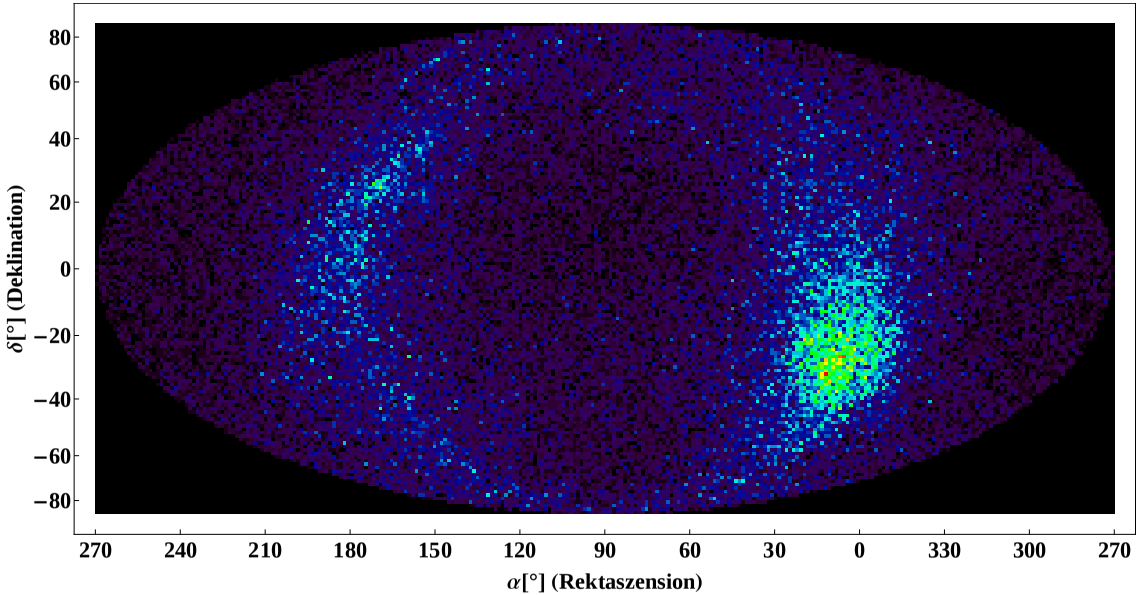


Fig. 7.3: *Die Dichteverteilung der Besselpole* ($\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n$) *aller Sterne des HIPPARCOS Kataloges. Neben dem „Gürtelring“, der durch die Sonnenbewegung relativ zur lokalen Umgebung entsteht, erkennt man deutlich zwei diametral gegenüberliegende Anhäufungen. Sie werden von weit entfernteren Sternen erzeugt und haben offenbar etwas mit der galaktischen Rotation zu tun. Die Kartenprojektion ist wieder eine flächentreue Mollweide – Babinet Projektion.*

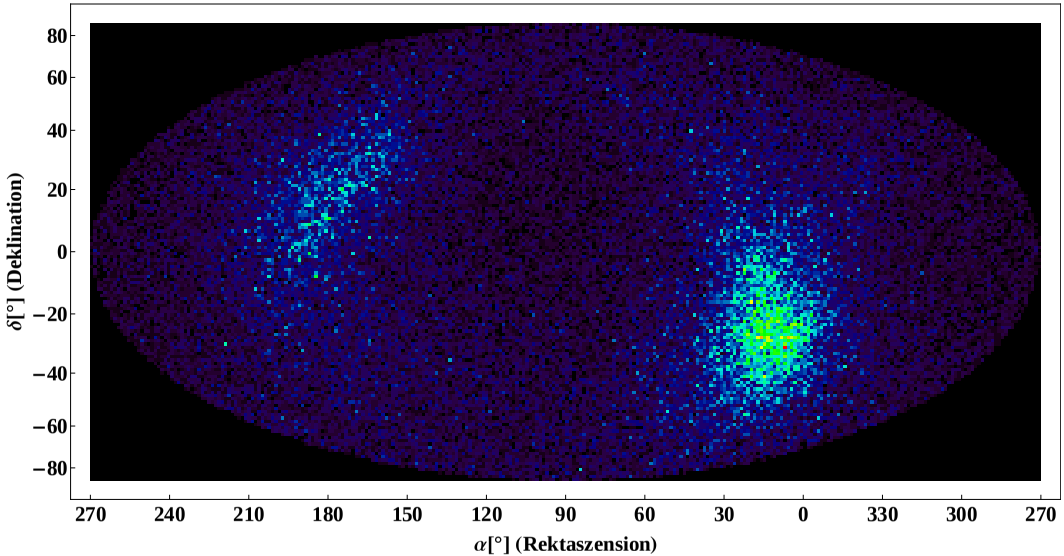


Fig. 7.4: *Die Dichteverteilung der von der Apexbewegung der Sonne befreiten „Besselpole“* $\mathbf{e}_n \times (r_n \dot{\mathbf{e}}_n + \mathbf{v}_\odot)$ *aller Sterne des HIPPARCOS Kataloges. Jetzt ist der „Gürtelring“ fast verschwunden und man sieht deutlich nur noch den galaktischen „Südpol“ und – diffuser und schwächer – den galaktischen Nordpol. Ursache hierfür ist die differentielle Rotation in der galaktischen Scheibe – eine Entdeckung, die erst 1926 durch Lindblad und Oort gelang. Nur bei einer starren Rotation würden bei verschwindender Pekuliarbewegung alle Drehimpulse in die gleiche Richtung zeigen. Die Asymmetrie dieser Verteilung ist somit asymptotisch ein Maß für die Stärke der Scherströmung in der Scheibe. Die Kartenprojektion ist wieder eine flächentreue Mollweide – Babinet Projektion.*

Das gekoppelte System liefert dagegen zunächst für den Apex

$$\alpha = \mathbf{270.77}^\circ, \qquad \delta = +\mathbf{23.38}^\circ, \qquad v_\odot = 21.62\, km\, s^{-1} \tag{7.30}$$

also fast mit der Hypothese $\boldsymbol{\omega} = 0$ identisch. Für den Betrag des Wirbelvektors ergibt sich nun

$$\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \mathbf{12.11}\ \ km\, s^{-1}\, kpc^{-1}. \tag{7.31}$$

Dieser Wert, aus nur 518 Sterne der näheren Sonnenumgebung abgeleitet, stimmt genähert mit dem negativen Wert der zweiten Oortschen Konstanten ([15]) : $\mathbf{B} = (-12.37 \pm 0.64)\, km\, s^{-1}\, kpc^{-1}$, abgeleitet mit der klassischen Oortschen „Fit-Methode“ (**Doppelwelle der Eigenbewegungen längs des galaktischen äquators**, siehe Abb. 7.1), überein. Es gilt also

$$|\mathbf{B}| = \sqrt{\boldsymbol{\omega} \circ \boldsymbol{\omega}} \equiv \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \tag{7.32}$$

Allerdings steht dieser lokale Wirbelvektor nicht genau senkrecht auf der galaktischen Ebene, wie man vielleicht erwartet hätte, sondern zeigt mehr in Richtung des galaktischen Südpols Die Koordinaten des Pols des lokalen Wirbelvektors aus dem speziellen Datensatz von 518 Sternen sind

$$\omega_\alpha = \mathbf{313.16}^\circ, \qquad \omega_\delta = +\mathbf{8.59}^\circ. \tag{7.33}$$

Der galaktische Südpol ist dagegen durch $\alpha_s = \mathbf{12.25}^\circ$, $\delta_s = -\mathbf{27.4}^\circ$ gegeben. Damit ist es gelungen, nicht nur den Betrag, sondern auch die Richtung des Wirbelvektors aus nur wenigen (518) Eigenbewegungen *testweise* zu bestimmen. Im Kapitel über die *Gauss - Bessel - Kobold* Methode wurde schon ein Zusammenhang der „Oortschen Konstanten“ mit den Dispersionen des Geschwindigkeitsellipsoiden erwähnt. Für die lokale Winkelgeschwindigkeit $\Omega(R_\odot)$ der Sonne um das galaktische Zentrum gilt nämlich jetzt

$$\Omega(R_\odot) = -\frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{22}^2}\, \mathbf{B} \tag{7.34}$$

oder

$$\Omega(R_\odot) = \frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{22}^2} \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \tag{7.35}$$

Daraus folgt, dass die Winkelgeschwindigkeit $\Omega(R_\odot)$ der Sonne um das galaktische Zentrum größer als der Betrag des lokalen „Wirbelvektors“ ist.

Man kann die Geschwindigkeitskomponenten der Sonne in das galaktische Koordinatensystem umrechnen, um die Richtung bezüglich des galaktischen Zentrums richtig einzuordnen. Die Eulersche Drehmatrix ist $EulerM[282.25°, 62.6°, -33.0°]$. Dann gelten für die galaktischen Geschwindigkeits-Komponenten der Apexbewegung die Werte

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \approx \{\mathbf{13}, \mathbf{15}, \mathbf{7}\}\ km/s \tag{7.36}$$

Das Sonnensystem bewegt sich also in Richtung des galaktischen Zentrums (positive u - Komponente), es bewegt sich etwas schneller als der lokale Zentroid um die Galaxis (positive v - Komponente) und es bewegt sich durch die galaktische Ebene zum galaktischen Nordpol (positive w - Komponente).

Man kann in der Vortexgleichung auch den Grenzübergang $N \to \infty$ durchführen, bei dem sehr viele Sterne gleichmäßig über die Himmelskugel verteilt sind. Beschränkt man sich auf eine Kugelschale mit eng begrenzten *Entfernungen* der Sterngruppe, so folgt – ganz analog zur Apexgleichung – für den Wirbelvektor $\boldsymbol{\omega}$ die Abschätzung ($\{r_n \approx konstant, N \to \infty\}$)

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} \approx \frac{3}{2\,N} \sum_n (\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n).} \tag{7.37}$$

Mit dieser Formel hätte man schon gegen Ende des 19. Jahrhunderts die Größenordnung und Richtung eines eventuell vorhandenen galaktischen Wirbelfeldes abschätzen können, wenn genügend Daten von weiter entfernten Sternen vorgelagen hätten. Man sieht nun auch im Rahmen der erweiterten *Gauss-Bravais-Airy* Methode, dass die Besselpole, also die Vektorprodukte $\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n$, *physikalisch* nichts mit dem Apex zu tun haben, sondern mit der galaktischen Rotation korreliert sind. Diese Tatsache ist eine methodische Schwierigkeit der *Gauss - Bessel - Kobold* Apexmethode. [4]

[4] Tatsächlich erwähnt Hermann Kobold am Ende seiner Arbeit von 1893 die Möglichkeit, dass eine Häufung der „Besselpole“ vielleicht eher etwas mit einer galaktischen Rotation zu tun haben könnte. Hermann Kobold schreibt in seinen Lebenserinnerungen: *„Wenn er (Klinkerfues) spät am Abend nach Hause kam und sah, daß ich beobachtete, kam er zuweilen in die Sternwarte, um sich mit mir über ein Thema zu unterhalten. Der breite Pfeiler des Mauerquadranten diente dabei als Schreibtafel; ein Stückchen Kreide lag immer bereit. Im Bibliotheksaal stand ein Zeichnerglobus, auf dem einige Punkte bezeichnet waren. Auf meine Frage,*

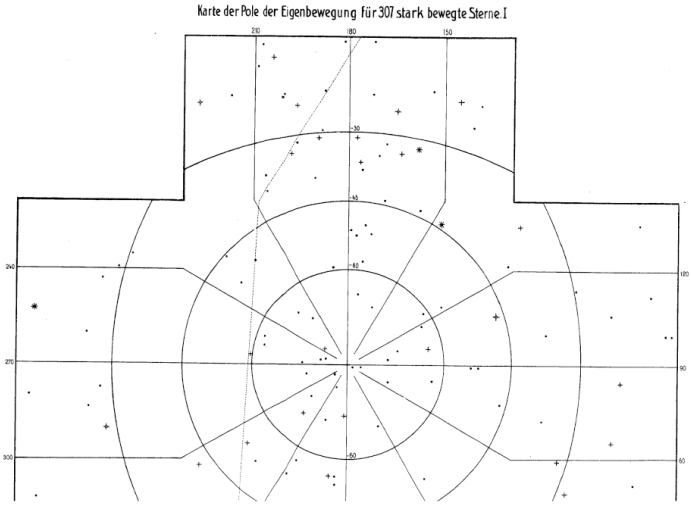


Fig. 7.5: *ähnlich wie Gauss hat auch Kobold die Besselpole durch eine gnomonische Tangential-Projektion der Kugel auf die sechs Flächen des sie umgebenden Würfels betrachtet. Großkreise sind hier Geraden, die beim Übergang auf eine andere Würfelfläche einen Knick erleiden. Aus dem Buch ([25]).*

Ganz in Analogie zur Gausschen Abzählmethode bei der Apexbestimmung kann man jetzt eine Funktion $N_B(\mathbf{x})$ auf der Himmelskugel definieren, welche als eine Dichte-Verteilungsfunktion der Besselpole aufgefasst werden kann. Jeder Stern zerteilt demnach wieder die Himmelskugel durch seinen „Drehimpulsvektor“ in zwei Teile: Einen galaktischen „Nordpol“, auf dessen Kugelhälfte die Funktion den Wert 1 annimmt, und einen galaktischen „Südpol“ mit dem Wert 0. In Analogie zur Gausschen

---

was diese Punkte bezeichneten, sagte mir Prof. Klinkerfues, daß es die Pole der Eigenbewegung einiger Hauptsterne seien. Dadurch wurde ich angeregt zur Berechnung der Pole der Eigenbewegung des Mädler-Katalogs der Bradley-Sterne. Den Katalog dieser Pole habe ich nach Vollendung Prof. Klinkerfues übergeben“. Kobold bemerkt weiterhin, dass auch Eduard Schönfeld, Nachfolger von Argelander an der Sternwarte Bonn, versucht hat, eine galaktische Rotation aus den Eigenbewegungen der Sterne abzuleiten. Über seine Methode ließ sich aber nichts finden. Allerdings hat 1890 Oscar Stumpe (1862-1897) eine Dissertation zu diesem Problem in Bonn angefertigt.

Fig. 7.6: *In seinen Lebenserinnerungen schreibt H. Kobold: „ Das Problem der Eigenbewegungen stand auch in der späteren Zeit im Vordergrund meines wissenschaftlichen Interesses. Es beschäftigte mich noch in mehreren Beiträgen zu den Astronomischen Nachrichten. Zur Beantwortung einer für die Brüsseler Weltausstellung (Exposition Internationale de Bruxelles 1897) gestellten Preisaufgabe sandte ich meine Arbeiten ein und erhielt einen Preis von 1000 Mark und die bronzene Medaille“. ([48], Seite 40).*

Apexmethode mit den abzählbaren Polygonen können wir nun für die Besselpole die schon früher definierte Dichtefunktion

$$\boxed{N_B(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{\Theta}[\mathbf{x} \circ (\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n)]} \tag{7.38}$$

einführen. Die Funktion $\mathbf{\Theta}[z]$ bezeichnet wieder den Dirichletfaktor und $\mathbf{x}$ einen Richtungsvektor zur Himmelskugel (Einheitskugel). Das Dreierprodukt $[\mathbf{x}\,\mathbf{e}_n\,\dot{\mathbf{e}}_n]$ ist wieder das "Spatprodukt" der drei betreffenden Vektoren.

In den Abbildungen (7.3) und (7.4) ist die Dichteverteilung der Besselpole einmal ohne und einmal mit Apexkorrektur dargestellt. Durch seine Berechnung der Dichte der Besselpole konnte Hermann Kobold um 1893 noch nicht die galaktische Rotation erkennen. Leider versuchte er noch gegen Ende des 19. Jahrhunderts vergeblich, mit Hilfe der Besselpole den „wahren" Apex der Sonnenbewegung zu bestimmen.

7.3 Die galaktische Beschleunigung des Sonnensystems

Seit 2020 ist es mit den Daten des astrometrischen GAIA- Satelliten möglich, aus der *säkularen Aberration* der Positionsdaten von fernen Quasaren den Beschleunigungsvektor $\mathbf{a}$ des Baryzentrums unseres Sonnensystems bezüglich dieses Inertialsystems zu bestimmen. Es ist damit möglich, den lokalen Beschleunigungsvektor festzulegen, der mehr oder weniger auf das galaktische Zentrum zeigen sollte. Denn differenzieren wir (2.8) nach der Zeit, dann erhalten wegen $\dot{\mathbf{e}} = 0$ das Resultat

$$c\,\dot{\mathbf{e}}_A = \mathbf{a} - (\mathbf{e} \circ \mathbf{a})\,\mathbf{e} \equiv \mathbf{e} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{e}). \tag{7.39}$$

Voraussetzung für die Anwendung dieser Gleichung ist, dass man alle kurzperiodischen Verschiebungen aus den Daten schon ausgefiltert hat. Erste Ideen zu diesem Konzept scheint der englische Astronom John Pond gehabt zu haben. In dem 1833 herausgekommenen Sternkatalog *Catalogue of 1112 stars, reduced from observations made at the Royal Observatory at Greenwich*, bemerkt er zu dem Problem ([38]):

> ...So long as the motion of the Sun continues uniform and rectilinear, this aberration or distortion from their true places will be constant: it will not affect our observations; nor am I aware that we possess any means of determining whether it exist or not. If the motion of the Sun be uniformly accelerated, or uniformly retarded,...the effects of either of these suppositions would be to produce uniform motion in every star according to its position, and might in time be discoverable by our observations, if the stars had no proper motions of their own...But it is needless to enter into further speculation on questions that appear at present not likely to lead to the least practical utility, though it may become a subject of interest to future ages...

Doch erst mit dem Daten des Satelliten GAIA ist es nach fast 200 Jahren möglich, einen Effekt der *säkularen Aberration* bei den $\dot{e}$ der als sehr weit entfernt angenommen Quasaren zu messen. In Analogie zu der Gleichung (3.13) ergeben sich mit (7.39) die Normalgleichungen

$$\sum_n (\mathbf{a} - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{a})\ \mathbf{e}_n) = c \sum_n \dot{\mathbf{e}}_n, \tag{7.40}$$

wobei hier über alle momentanen Quasarpositionen $\mathbf{e}_n$ summiert werden muss. Sind die N Standardquellen gleichmäßig über das Himmelsgewölbe verteilt, so gilt die asymptotische Formel

$$\mathbf{a} = \frac{3\,c}{2N} \sum_n \dot{\mathbf{e}}_n. \tag{7.41}$$

Wir wollen hier kurz die Ergebnisse diskutieren. Für die Beschleunigung des Baryzentrums des Sonnensystems erhält man[5]

$$|\mathbf{a}| = (\mathbf{2.32} \pm \mathbf{0.16}) \times \mathbf{10^{-10}}\ \ m\,s^{-2} \tag{7.42}$$

Die maximale scheinbare säkulare Eigenbewegung der Quasare beträgt dabei

$$|\dot{\mathbf{e}}| = \mathbf{5.05} \pm \mathbf{0.35}\ \ \mu as/J, \tag{7.43}$$

wobei $\mu as/J$ Mikrobogensekunden pro Jahr bedeutet. Solche extrem kleinen Winkeländerungen können seit 2020 aus den Daten des Satelliten

[5] Gaia EDR3 Kollaboration 2020

GAIA abgeleitet werden. Der Beschleunigungsvektor zeigt nicht genau in das vermeintliche Zentrum unserer Galaxie, weil aufgrund ihrer Balkenstruktur und der Spiralarme Abweichungen zu erwarten sind. Sein Wert liegt im Bereich dessen, was man im Außenbereich unserer Milchstraße erwartet.

8 Bestimmung des H - Tensors

Da HIPPARCOS keine Radialgeschwindigkeiten messen konnte, müssen wir nun untersuchen, ob eine erweiterte *Gauss-Bravais-Airy* Methode auch in der Lage ist, die Richtung zum galaktischen Zentrum und den Oort'schen Parameter **A** zu bestimmen. Dieses Problem scheint schwieriger als „nur“ die Bestimmung des galaktischen Pols und den dazugehörigen Oort'schen Parameter **B** zu sein.

Befindet sich die Sonne in einem lokalen Geschwindigkeitsfeld mit *konstanter Scherströmung ohne Kompression oder Expansion*, so kann man zeigen, daß das Geschwindigkeitsfeld durch den Ausdruck (siehe Anhang C)

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_n + 2\,r_n\,[\mathbf{g}\circ(\boldsymbol{\Omega}_\odot\times\mathbf{e}_n)]\,\mathbf{g} + (1-2|\mathbf{g}|^2)\,r_n\,(\boldsymbol{\Omega}_\odot\times\mathbf{e}_n) = \\ \mathbf{v}_\odot + \dot{r}_n\mathbf{e}_n + r_n\dot{\mathbf{e}}_n\end{aligned} \tag{8.1}$$

gegeben ist. Auf der linken Seite steht zunächst wieder die irreguläre Geschwindigkeit $\mathbf{v}_n$ des Sternes. Dann kommen zwei systematische *quasi - hydrodynamische* Anteile hinzu, die durch den Vektor **g** und den Rotationsvektor $\boldsymbol{\Omega}_\odot$ dargestellt werden. Die anderen Größen haben ihre übliche Bezeichnung. Mit dem allgemeineren Helmholtz'schen Satz hängt diese spezialisierte Darstellung über die beiden Formeln

$$\mathbf{H}\otimes\mathbf{r} \equiv 2\,[\mathbf{g}\circ(\boldsymbol{\Omega}_\odot\times\mathbf{r})]\,\mathbf{g} - |\mathbf{g}|^2\,(\boldsymbol{\Omega}_\odot\times\mathbf{r}) \tag{8.2}$$

und

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \equiv (1-|\mathbf{g}|^2)\,(\boldsymbol{\Omega}_\odot\times\mathbf{r}) \tag{8.3}$$

zusammen. Die erste äquivalenz stellt dann wegen $\mathbf{g}\circ\boldsymbol{\Omega}_\odot = 0$ den wirbelfreien, die zweite äquivalenz dagegen den wirklichen Wirbelfeld – Anteil dar. Für den Betrag des Vektors **g** gilt

$$|\mathbf{g}|^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial\ln\Omega_\odot}{\partial\ln R_\odot}. \tag{8.4}$$

Die zweite Oort'sche Rotationskonstante $\mathbf{B}$ ist dann definiert durch

$$\mathbf{B} = -(1 - |\mathbf{g}|^2)\,|\mathbf{\Omega}_\odot| \equiv -(1-\beta)\,|\mathbf{\Omega}_\odot| \equiv -|\boldsymbol{\omega}|. \tag{8.5}$$

Sie muss aus Eigenbewegungen der Sterne bestimmt werden. Da die Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes invariant gegenüber der Transformation $\mathbf{g} \to -\mathbf{g}$ ist, kann man bei einer möglichen Bestimmung von $\mathbf{g}$ nicht unterscheiden, ob die Richtung zum galaktischen Zentrum bei $+\mathbf{g}$ oder bei $-\mathbf{g}$ liegt. Hierzu sind also zusätzliche Informationen nötig.

Skalare Multiplikation von (8.1) mit $\mathbf{e}_n$ führt auf die wichtige Gleichung

$$\mathbf{v}_n \circ \mathbf{e}_n + 2\,r_n\,[\mathbf{g} \circ (\mathbf{\Omega}_\odot \times \mathbf{e}_n)]\,(\mathbf{g} \circ \mathbf{e}_n) = \mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}_n + \dot{r}_n. \tag{8.6}$$

Die obige Beziehung ist die Basis, nur aus *Radialgeschwindigkeiten* den Apex der Sonne, die lokale Rotation und die Scherung zu bestimmen.

Die zu minimierende algebraische Form im Falle von *nur Radialgeschwindigkeiten* lautet jetzt

$$\begin{aligned} Q[\mathbf{v}_\odot, \mathbf{\Omega}_\odot, \mathbf{g}, \lambda] = \sum_n [\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}_n + \dot{r}_n - \\ -2\,r_n\,[\mathbf{g} \circ (\mathbf{\Omega}_\odot \times \mathbf{e}_n)]\,(\mathbf{g} \circ \mathbf{e}_n)]^2 - \\ -\lambda\,(\mathbf{g} \circ \mathbf{\Omega}_\odot). \end{aligned} \tag{8.7}$$

λ stellt hier einen *Lagrange'schen Multiplikator* dar, denn die Algebraische Form muss unter der Randbedingung $\mathbf{g} \circ \mathbf{\Omega}_\odot = 0$ minimiert werden. Die Normalgleichungen sind aber komplizierte algebraische Gleichungen, deren Lösungsaufwand in keinem Verhältnis zu dem zu erwarteten Ergebnis mit seinen Prämissen steht.

In ähnlicher Weise verhält es sich mit der Bestimmung von $\mathbf{g}$ *nur aus Eigenbewegungen*. Die zu minimierende algebraische Form lautet jetzt

$$\begin{aligned} Q[\mathbf{v}_\odot, \mathbf{\Omega}_\odot, \mathbf{g}, \lambda] = \sum_n [\mathbf{v}_\odot - (\mathbf{e}_n \circ \mathbf{v}_\odot)\,\mathbf{e}_n + r_n \dot{\mathbf{e}}_n + \\ +2\,r_n\,[\mathbf{g} \circ (\mathbf{\Omega}_\odot \times \mathbf{e}_n)]\,(\mathbf{g} \circ \mathbf{e}_n)\,\mathbf{e}_n - \\ -2\,r_n\,[\mathbf{g} \circ (\mathbf{\Omega}_\odot \times \mathbf{e}_n)]\,\mathbf{g} - \\ -(1 - 2|\mathbf{g}|^2)\,r_n\,(\mathbf{\Omega}_\odot \times \mathbf{e}_n)]^2 - \lambda\,(\mathbf{g} \circ \mathbf{\Omega}_\odot). \end{aligned} \tag{8.8}$$

Die Schwierigkeit sind hier noch höher als im Falle von *reinen Radialgeschwindigkeiten*. Es erscheint daher wenig sinnvoll, die Richtung und den

Betrag der lokalen galaktischen Parameter aus den obigen algebraischen Funktionen durch Minimierung zu gewinnen. Wesentlich natürlicher ist es, zunächst ganz allgemein den Tensor $\mathbf{H}$ einzuführen, seine Komponenten zu bestimmen, dann seine Eigenwerte und Eigenvektoren und letztendlich so die Richtung zum galaktischen Zentrum zu deduzieren.

Sind *Positionen, Parallaxen, Radialgeschwindigkeiten* und *Eigenbewegungen* bekannt, so kann man den allgemeinen lokalen „hydrodynamischen“ Deformationstensor $\mathbf{H}$ und den lokalen Wirbelvektor $\boldsymbol{\omega}$ ohne Einschränkungen vollständig bestimmen. Die zu minimierende Quadratsumme lautet dann (siehe (7.14)

$$Q[\mathbf{v}_\odot, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{H}] = \sum_n [\mathbf{v}_\odot + \dot{r}_n\, \mathbf{e}_n + r_n \dot{\mathbf{e}}_n - r_n(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_n) - r_n(\mathbf{H} \otimes \mathbf{e}_n)]^2 \quad (8.9)$$

Der Deformationstensor $\mathbf{H}$ ist jetzt definiert durch

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} & h_{xz} \\ h_{yx} & h_{yy} & h_{yz} \\ h_{zx} & h_{zy} & h_{zz} \end{pmatrix}, \quad (8.10)$$

mit der Bedingung

$$h_{xy} = h_{yx}, h_{xz} = h_{zx}, h_{zy} = h_{yz}. \quad (8.11)$$

Er enthält 6 unabhängige Parameter, nämlich die drei “Divergenz“-Terme h_{xx}, h_{yy} und h_{zz} sowie die drei Gleit-Scherkoeffizienten $h_{xy} = h_{yx}, h_{xz} = h_{zx}, h_{zy} = h_{yz}$. Alle 9 (6+3) lokalen galaktischen Parameter von $\mathbf{H}$ und $\boldsymbol{\omega}$ und die 3 Komponenten der Apexbewegung $\mathbf{v}_\odot$ der Sonne können bestimmt werden, insbesondere auch die lokale Expansion oder Dilatation, die auftritt, wenn die Sonne in einen Spiralarm hinein - oder herausläuft. Dies tritt auf, wenn die Spur des Tensors $\mathbf{H}$ ungleich Null ist. Allgemein gilt dann

$$\mathbf{Tr}(\mathbf{H}) = 3\,H, \quad (8.12)$$

wo H - in Analogie zur Kosmologie - der klassische „*Hubbleparameter*“ mit der Einheit $km/s/Mpc$ ist. Bei der angenommenen linearen Scherströmung (8.2) gilt aber

$$\mathbf{Tr}(\mathbf{H}) = 0, \quad (8.13)$$

wobei der Operator $\mathbf{Tr}$ für die Spur des Tensors steht (*Trace*). Ist die Spur des Tensors $\mathbf{H}$ nicht Null, so expandiert oder kollabiert das Medium

im statistischen Mittel, je nach Vorzeichen[1]. Für die drei Eigenwerte des Dilatationstensors $\mathbf{H}$ folgt mit (8.2) und der Eigenschaft $\mathbf{g} \circ \mathbf{\Omega}_\odot = 0$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, \\ \lambda_2 &= -|\mathbf{g}|^2 \, |\mathbf{\Omega}_\odot| \equiv -\beta \, |\mathbf{\Omega}_\odot| \equiv -\mathbf{A}, \\ \lambda_3 &= +|\mathbf{g}|^2 \, |\mathbf{\Omega}_\odot| \equiv +\beta \, |\mathbf{\Omega}_\odot| \equiv +\mathbf{A}. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Die Oort'sche Konstante $\mathbf{A}$ ist somit durch die Eigenwerte von $\mathbf{H}$ bestimmt. Die dazugehörigen Eigenvektoren oder deren Linearkombinationen lauten schließlich

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\lambda_1) &\propto \pm \mathbf{\Omega}_\odot, \\ \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}(\lambda_2) - \mathbf{e}(\lambda_3)\right) &\propto \pm \mathbf{g}, \\ \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}(\lambda_2) + \mathbf{e}(\lambda_3)\right) &\propto \pm (\mathbf{\Omega}_\odot \times \mathbf{g}). \end{aligned} \tag{8.15}$$

Mit Hilfe der Eigenvektoren des Deformationstensors $\mathbf{H}$ lässt sich also auch die Richtung zum galaktischen Zentrum bestimmen - also das lokale galaktische $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ Koordinatensystem in der Sonnenumgebung.

8.1 Bestimmung aus Radialgeschwindigkeiten

Es ist klar, dass *nur aus Radialgeschwindigkeiten* der vollständige Tensor $\mathbf{H}$ und der Apexvektor $\mathbf{v}_\odot$ bestimmt werden kann, während der Wirbelvektor $\boldsymbol{\omega}$ herausfällt und unbestimmt bleibt. *Dieses Problem hat in der Astronomie erhebliche Relevanz, denn es kann auch auf Galaxien in der näheren kosmischen Umgebung angewendet werden, um die lokale Expansionsrate des Kosmos (Hubbleparameter) und eventuelle „kosmische" Scherkoeffizienten zu bestimmen.* Die zu minimierende quadratische Form lautet

$$Q[\mathbf{v}_\odot, \mathbf{H}] = \sum_n [\mathbf{v}_\odot \circ \mathbf{e}_n + \dot{r}_n - r_n(\mathbf{H} \otimes \mathbf{e}_n) \circ e_n]^2. \tag{8.16}$$

Es ergeben sich hieraus 9 Normalgleichungen für die drei Unbekannten von $\mathbf{v}_\odot$ und den 6 Unbekannten von $\mathbf{H}$. In *erster Näherung* zerfallen

[1] Die Analogie zu einer „Newton'schen Kosmologie" ist hier also sehr eng. Daher auch die Notation $\mathbf{H}$ für den Tensor

diese 9 Gleichungen in 3 separate Vektorgleichungen der folgenden Form:

$$\begin{pmatrix} \sum e_{xn}^2 & \sum e_{xn}e_{yn} & \sum e_{xn}e_{zn} \\ \sum e_{xn}e_{yn} & \sum e_{yn}^2 & \sum e_{yn}e_{zn} \\ \sum e_{xn}e_{zn} & \sum e_{yn}e_{zn} & \sum e_{zn}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x\odot} \\ v_{y\odot} \\ v_{z\odot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum \dot{r}_n e_{xn} \\ -\sum \dot{r}_n e_{yn} \\ -\sum \dot{r}_n e_{zn} \end{pmatrix} \tag{8.17}$$

sowie für die Diagonalkomponenten von **H**

$$\begin{pmatrix} \sum r_n^2 e_{xn}^4 & \sum r_n^2 e_{xn}^2 e_{yn}^2 & \sum r_n^2 e_{xn}^2 e_{zn}^2 \\ \sum r_n^2 e_{xn}^2 e_{yn}^2 & \sum r_n^2 e_{yn}^4 & \sum r_n^2 e_{yn}^2 e_{zn}^2 \\ \sum r_n^2 e_{xn}^2 e_{zn}^2 & \sum r_n^2 e_{yn}^2 e_{zn}^2 & \sum r_n^2 e_{zn}^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{xx} \\ h_{yy} \\ h_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum r_n \dot{r}_n e_{xn}^2 \\ \sum r_n \dot{r}_n e_{yn}^2 \\ \sum r_n \dot{r}_n e_{zn}^2 \end{pmatrix} \tag{8.18}$$

sowie für die Scherkomponenten von **H**

$$\begin{pmatrix} 2\sum r_n^2 e_{xn}^2 e_{yn}^2 & 2\sum r_n^2 e_{xn}^2 e_{yn} e_{zn} & 2\sum r_n^2 e_{xn} e_{yn}^2 e_{zn} \\ 2\sum r_n^2 e_{xn}^2 e_{yn} e_{zn} & 2\sum r_n^2 e_{xn}^2 e_{zn}^2 & 2\sum r_n^2 e_{xn} e_{yn} e_{zn}^2 \\ 2\sum r_n^2 e_{xn} e_{yn}^2 e_{zn} & 2\sum r_n^2 e_{xn} e_{yn} e_{zn}^2 & 2\sum r_n^2 e_{yn}^2 e_{zn}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{xy} \\ h_{xz} \\ h_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum r_n \dot{r}_n e_{xn} e_{yn} \\ \sum r_n \dot{r}_n e_{xn} e_{zn} \\ \sum r_n \dot{r}_n e_{yn} e_{zn} \end{pmatrix} \tag{8.19}$$

Diese Gleichungen kann man als erweiterte *Gauss - Bravais - Airy* Beziehung zur Bestimmung der lokalen Expansion der betrachteten Sternpopulation oder Galaxienpopulation betrachten. Ist hier der Tensor **H** bekannt oder in erster Näherung abgeschätzt, bestimmen seine Eigenwerte die erste Oort'sche Rotationskonstante **A** und die Eigenvektoren von **H** die „Achsen“ (die Richtungen bleiben zunächst zweideutig) des galaktischen Pols und des galaktischen Zentrums.

Bei einer sehr großen Anzahl von Sternen oder Galaxien, die gleichmäßig über die Himmelskugel verteilt sind, vereinfachen sich die obigen Formeln erheblich. Für die Diagonalelemente des Tensors **H** erhält man dann

$$\begin{aligned} h_{xx} &\approx \frac{3}{2} \frac{\sum_n r_n \dot{r}_n \left(5e_{xn}^2 - 1\right)}{\sum_n r_n^2}, \\ h_{yy} &\approx \frac{3}{2} \frac{\sum_n r_n \dot{r}_n \left(5e_{yn}^2 - 1\right)}{\sum_n r_n^2}, \\ h_{zz} &\approx \frac{3}{2} \frac{\sum_n r_n \dot{r}_n \left(5e_{zn}^2 - 1\right)}{\sum_n r_n^2}. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Für die Scherkoeffizienten ergibt sich analog im gleichen Limes

$$
\begin{aligned}
h_{xy} &\approx \frac{15}{2}\,\frac{\sum_n r_n \dot{r}_n\, e_{xn}\, e_{yn}}{\sum_n r_n^2}, \\
h_{xz} &\approx \frac{15}{2}\,\frac{\sum_n r_n \dot{r}_n\, e_{xn}\, e_{zn}}{\sum_n r_n^2}, \\
h_{yz} &\approx \frac{15}{2}\,\frac{\sum_n r_n \dot{r}_n\, e_{yn}\, e_{zn}}{\sum_n r_n^2}.
\end{aligned} \tag{8.21}
$$

Im Falle eines *inkompressiblen Mediums* mit $\sum_n r_n \dot{r}_n = 0$ vereinfachen sich die Diagonalelemente durch Wegfallen des Summanden -1 noch weiter. Oort hat 1926 diese Hypothese zunächst für die Sterne in der Sonnenumgebung gemacht, aber die Rotationskonstante **A** mit mehr „heuristischen“ Methoden abgeleitet – ganz ähnlich, wie Argelander 1838 den Apex der Sonnenbewegung mit eher „groben Methoden“ bestimmt hat.

Für die Spur des Tensors **H** gilt wieder allgemein

$$
\mathbf{Tr}(\mathbf{H}) \approx 3\,\frac{\sum_n r_n \dot{r}_n}{\sum_n r_n^2} \tag{8.22}
$$

Wegen (8.12) gilt dann für den skalaren Hubbleparameter

$$
\boxed{H \approx \frac{\sum_n r_n \dot{r}_n}{\sum_n r_n^2}.} \tag{8.23}
$$

Bei einem Ensemble von Galaxien wird $\dot{r}_n$ in km/s gemessen, die Entfernungen r_n in Mpc (Mega-Parsec); bei Sternen gilt für Entfernungen dagegen die Einheit kpc (Kilo-Parsec).

8.2 Bestimmung von Rotation und Deformation

Liegen alle 6 kinematischen Bewegungsdaten von Sternen vor (räumliche Positionen und Geschwindigkeiten), so kann man aus 12 linear gekoppelten Gleichungen alle 12 Konstanten bestimmen. Für Galaxien ist dies im Allgemeinen natürlich nicht möglich. Wir wollen hier nur den Grenzfall betrachten, wo sehr viele Sterne gleichmäßig über den Himmel zerstreut

sind. Dann erhält man für den Apexvektor die schon bekannte Gleichung

$$\mathbf{v}_{\odot} \approx -\frac{1}{N}\left(\sum_n \dot{r}_n \mathbf{e}_n + \sum_n r_n \dot{\mathbf{e}}_n\right). \tag{8.24}$$

Für den Wirbelvektor ω ergibt sich die Abschätzung

$$\frac{2}{3}\sum_n r_n^2\, \boldsymbol{\omega} \approx \sum_n r_n^2\, (\mathbf{e}_n \times \dot{\mathbf{e}}_n) \tag{8.25}$$

Für die Diagonalelemente gelten in der gleichen Näherung die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\sum_n r_n^2\, h_{xx} &\approx \sum_n (e_{xn}^2\, \dot{r}_n\, r_n + e_{xn}\, \dot{e}_{xn}\, r_n^2) \\ \frac{1}{3}\sum_n r_n^2\, h_{yy} &\approx \sum_n (e_{yn}^2\, \dot{r}_n\, r_n + e_{yn}\, \dot{e}_{yn}\, r_n^2) \\ \frac{1}{3}\sum_n r_n^2\, h_{zz} &\approx \sum_n (e_{zn}^2\, \dot{r}_n\, r_n + e_{zn}\, \dot{e}_{zn}\, r_n^2) \end{aligned} \tag{8.26}$$

In gleicher weise für die Gleitkoeffizienten des Deformationstensors

$$\frac{2}{3}\sum_n r_n^2\, h_{xy} \approx \sum_n (2 e_{xn} e_{yn}\, \dot{r}_n\, r_n + (e_{yn}\, \dot{e}_{xn} + e_{xn}\, \dot{e}_{yn})\, r_n^2) \tag{8.27}$$

[style=]

$$\frac{2}{3}\sum_n r_n^2\, h_{xz} \approx \sum_n (2 e_{xn} e_{zn}\, \dot{r}_n\, r_n + (e_{zn}\, \dot{e}_{xn} + e_{xn}\, \dot{e}_{zn})\, r_n^2) \tag{8.28}$$

$$\frac{2}{3}\sum_n r_n^2\, h_{yz} \approx \sum_n (2 e_{yn} e_{zn}\, \dot{r}_n\, r_n + (e_{zn}\, \dot{e}_{yn} + e_{yn}\, \dot{e}_{zn})\, r_n^2) \tag{8.29}$$

Aus den obigen asymptotischen Abschätzungen folgt für die Spur des Tensors $\mathbf{H}$ wiederum

$$\mathbf{Tr}(\mathbf{H}) \approx 3\, \sum_n (r_n\, \dot{r}_n)/(\sum_n r_n^2). \tag{8.30}$$

Eine lokale Sternpopulation zeigt dann eine „Expansion“, wenn dieser Ausdruck schwach positiv, eine Kompression, wenn dieser Ausdruck

schwach negativ ist. Beim Ein - oder Auslaufen in einen Spiralarm in der Galaxis können diese Phänomene erwartet werden. Bei Galaxien wurden aus Rotverschiebungen von Spektrallinien ab 1930 mit ähnlichen Abschätzungen wie der obigen Formel die Expansion des Universums entdeckt.

Damit ist das klassische Verfahren der *erweiterten* Apexbestimmung abgeschlossen. Die erweiterte Gauss-Bravais-Airy Methode kann nicht nur den Geschwindigkeitsvektor der Sonne berechnen, sondern auch alle 12 lokalen *Mutationsparameter*, welche in hydrodynamischer Approximation die änderung des Geschwindigkeitsfeldes der Sterne in der Sonnenumgebung beschreiben. Voraussetzung dafür ist allerdings, daß neben den Eigenbewegungen und Parallaxen auch die Radialgeschwindigkeiten der Sterne bekannt sind. Dies war aber beim HIPPARCHOS - Satelliten noch nicht der Fall.

9 Entwicklungen nach Kugelflächenfunktionen

Schon gegen Ende des 19. Jahrhunderts hatte man in Erwägung gezogen, den Vektor der Eigenbewegungen $\dot{\mathbf{e}}_n$ der Sterne ode Komponenten davon auf der Himmelskugel durch trigonometrische Reihen darzustellen, die als Basis orthonormiertere Kugelfunktionen enthalten (z.B. Oscar Hecker ([19])in seiner Dissertation 1891; Zitat bei E. Anding 1901 ([3])). Doch der Rechenaufwand war für die damalige Zeit (1890) zu groß und wirklich neue Resultate sind mit dieser Methode auch damals nicht herausgekommen – wie zum Beispiel die wichtige Anisotropie der Sterngeschwindigkeiten oder Rotationskonstanten der Milchstraße, wie dies 1927 Jan Oort durch eine eingeschränkte eindimensionale Analyse längs der Milchstraßenebene gelungen ist. Beobachtungen lassen sich eben nicht ohne vorherige „Modelle“ interpretieren - eine wie immer geartete theoretische Vorstellung muss immer *vor* der Beobachtung kommen.

Die Grundidee einer Kugelfunktionsentwicklung ist es natürlich, aus der Verteilung der *tangentialen Geschwindigkeitsvektoren* $r_n\,\dot{\mathbf{e}}_n$ eines Sternkataloges den „ **Dipolanteil**“ der Apexbewegung herauszufiltern und eventuell noch weitere systematische „Anomalien“ in den höheren Momenten der Verteilung zu entdecken (Anisotropie der Geschwindigkeitsrichtungen, Rotationseffekte der Milchstraße etc.). Aufgrund des Helmholtzschen Satzes lässt sich die vektorielle Tangentialkomponente der Sterngeschwindigkeit an der Himmelssphäre als Funktion der Richtung $\mathbf{e}$ und Distanz r gemäß

$$\begin{aligned} r\,\dot{\mathbf{e}} \;=\; & -\left[\mathbf{v}_\odot - (\mathbf{e}\circ\mathbf{v}_\odot)\,\mathbf{e}\right] + \\ & +\left[\mathbf{v} - (\mathbf{e}\circ\mathbf{v})\,\mathbf{e}\right] + \\ & +(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e})\,r + \\ & +(\mathbf{H}\otimes\mathbf{e})\,r - \left(\left[(\mathbf{H}\otimes\mathbf{e})\circ\mathbf{e}\right]\,\mathbf{e}\right)\,r. \end{aligned} \tag{9.1}$$

darstellen. In dieser Zerlegung bedeutet der erste Teil auf der rechten

Seite einen speziellen „Dipolterm“, bedingt durch die Apexbewegung der Sonne, der zweite Term eine mögliche Anisotropie der Geschwindigkeiten, der dritte Term eine „Wirbelbewegung“ des Feldes und der vierte Term eine „Scherung“ mit „Dilatation“ (verallgemeinerte Oortsche Konstanten). Mathematisch bedeutet die obige Darstellung eine charakteristische Abhängigkeit der Vektorgröße $r_n\,\dot{\mathbf{e}}_n$ von der Richtung $\mathbf{e}$. Analog kann man auch die Radialgeschwindigkeit an der Himmelskugel als Funktion der Richtung und Distanz wegen

$$\begin{aligned} \dot{r} \quad = \quad & -\mathbf{v}_{\odot} \circ \mathbf{e} + \\ & + \mathbf{v} \circ \mathbf{e} + \\ & + \left((\mathbf{H} \otimes \mathbf{e}) \circ \mathbf{e} \right) r \end{aligned} \tag{9.2}$$

in eine Reihe nach Kugelflächenfunktionen entwickeln. Das moderne Analogon ist heute die Darstellung der Temperaturfluktuationen der 3Kelvin Hintergrundstrahlung an der Himmelssphäre durch Kugelflächenfunktionen. Direkte Entsprechung wäre:

- **Skalar**: Radialgeschwindigkeit $\dot{r}$ $\rightarrow$ Skalare 3Kelvin - Temperaturwerte
- **Vektor**: Eigenbewegung $r\,\dot{\mathbf{e}}$ $\rightarrow$ Vektorielle Polarisationswerte der 3Kelvin - Strahlung

Unter der Voraussetzung, daß die Richtungen $\mathbf{e}$ *gleichmäßig flächentreu* über den Himmel verteilt sind und die Geschwindigkeitsverteilung der Sterne **isotrop** ist, können die skalaren oder vektoriellen Koeffizienten der entsprechenden Kugelfunktionsentwicklungen relativ leicht berechnet werden. Am Beispiel der Radialgeschwindigkeiten soll dies gezeigt werden, da hier auch eine enge Beziehung zur Oort'schen Methode besteht.

Die Radialgeschwindigkeiten an der Himmelskugel können durch die Reihe

$$\dot{r}(\vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{l=\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} a_{l,m}\, \mathbf{Y}_l^m(\vartheta, \varphi) \tag{9.3}$$

dargestellt werden, wobei die Koeffizienten $a_{l,m}$ durch die Integrale

$$a_{l,m} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \dot{r}(\vartheta, \varphi)\, \mathbf{Y}_l^m(\vartheta, \varphi)^{\bullet}\, \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi \tag{9.4}$$

gegeben sind. $\mathbf{Y}_l^m(\vartheta,\varphi)$ und $\mathbf{Y}_l^m(\vartheta,\varphi)^\bullet$ sind dabei komplexe und konjugiert komplexe Kugelflächenfunktionen, definiert durch

$$\mathbf{Y}_l^m(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,\mathbf{P}_l^m(\vartheta,\varphi)\,e^{\imath\,m\,\varphi}. \tag{9.5}$$

Sind die Sterne gleichmäßig über die Himmelskugel verteilt und ist ihre Geschwindigkeitsverteilung den Richtungen nach isotrop, so gilt für ein großes Ensemble von Sternen mit nahezu gleicher Entfernung $< r_n > \equiv R$

$$a_{l,m} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[-\mathbf{v}_\odot\circ\mathbf{e} + R\left((\mathbf{H}\otimes\mathbf{e})\circ\mathbf{e}\right)\right]\mathbf{Y}_l^m(\vartheta,\varphi)^\bullet\,d\mathbf{e}, \tag{9.6}$$

wobei zur Abkürzung $d\mathbf{e} \equiv \sin(\vartheta)\,d\vartheta\,d\varphi$ gesetzt wurde. $\mathbf{H}$ bedeutet hier wieder den *Helmholtz* - Tensor (*„Hubble“* - Tensor) des lokalen Deformationsfeldes.

Für den einzigen Koeffizienten $a_{0,0}$ des **Monopols** erhält man so den Wert

$$a_{0,0} = \frac{2}{3}\sqrt{\pi}\,R\,(h_{xx}+h_{yy}+h_{zz}) \equiv \frac{2}{3}\sqrt{\pi}\,R\,\mathbf{Tr}(\mathbf{H}). \tag{9.7}$$

Für die drei Koeffizienten des **Dipols** ergibt sich

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,(v_{\odot x} - \imath\,v_{\odot y})\,; \\ a_{1,0} &= -\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,v_{\odot z}; \\ a_{1,-1} &= -\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,(v_{\odot x} + \imath\,v_{\odot y})\,. \end{aligned} \tag{9.8}$$

In Analogie zur 3K-Strahlung ist dieser Dipolterm am stärksten ausgeprägt und bestimmt die Apexbewegung der Sonne bezüglich des gewählten Hintergrundes – hier ausgedrückt durch die drei komplexen Koeffizienten $a_{1,m}$. Umgekehrt lässt sich der Apexvektor auch durch diese komplexen Koeffizienten darstellen.

Für die fünf komplexen Koeffizienten des **Quadrupols** folgt schließlich

$$\begin{aligned}
a_{2,2} &= \sqrt{\frac{2\pi}{15}}\, R\, (h_{xx} - h_{yy} - 2\imath\, h_{xy})\,; \\
a_{2,1} &= -2\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\, R\, (h_{xz} - \imath\, h_{yz})\,; \\
a_{2,0} &= -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{15}}\, R\, (h_{xx} + h_{yy} - h_{zz})\,; \qquad (9.9) \\
a_{2,-1} &= 2\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\, R\, (h_{xz} + \imath\, h_{yz})\,; \\
a_{2,-2} &= \sqrt{\frac{2\pi}{15}}\, R\, (h_{xx} - h_{yy} + 2\imath\, h_{xy})\,. \qquad (9.10)
\end{aligned}$$

Aus den komplexen Koeffizienten $a_{l,m}$ für $l = 0, 1, 2$ kann man eindeutig die Expansion, den Apexvektor der Sonne sowie alle Komponenten des symmetrischen Helmholtztensors bestimmen.

9.1 Die Autokorrelationsfunktion

Um Strukturierungen besser erkennen zu können, betrachtet man bei statistischen Verteilungen sogenannte *Autokorrelationen*. Hier wird die Autokorrelationsfunktion zur Beschreibung der Korrelation eines Signales mit sich selbst bei unterschiedlichen Richtungsverschiebungen zwischen den betrachteten Funktionswerten der Radialgeschwindigkeiten eingesetzt. So ist die Autokorrelationsfunktion $C[\theta]$ der Radialgeschwindigkeiten an der Himmelskugel in unserem Fall definiert als der Erwartungswert

$$C[\theta] =< \dot{r}(\mathbf{e}_1)\, \dot{r}(\mathbf{e}_2) > \qquad (9.11)$$

zwischen den beiden Himmelsrichtungen $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$. Diese bilden den Winkel Θ gemäß

$$\mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_2 = \cos\Theta. \qquad (9.12)$$

Mit Hilfe des Additionstheorems der Kugelflächenfunktionen kann man dann zeigen, daß ganz allgemein für die Autokorrelationsfunktion (*Auto-*

kovarianz) die Entwicklung

$$\boxed{C[\theta] = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{l=\infty} (2l+1)\, C_l\, \mathbf{P}_l(\cos\Theta)} \tag{9.13}$$

gilt. Die eigentlichen *koordinateninvarianten* Entwicklungskoeffizienten lauten jetzt

$$\boxed{C_l = \sum_{m=-l}^{m=+l} |a_{l,m}|^2.} \tag{9.14}$$

C_l ist nur eine Funktion der *„Multipolwellenzahl“* l und hat hier die Dimension einer Geschwindigkeit ins Quadrat. Eine ähnliche Funktion wird auch bei der 3K Hintergrundstrahlung betrachtet, wobei dort die Funktion die Dimension einer Temperatur ins Quadrat hat. Hier ergibt sich für die Radialgeschwindigkeiten im Einzelnen

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{4}{9}\pi\, R^2\, (h_{xx} + h_{yy} + h_{zz})^2 \equiv \frac{4}{9}\pi\, R^2\, \mathbf{Tr}(\mathbf{H})^2; \\ C_1 &= \frac{4}{3}\pi\, (v_{\odot x}^2 + v_{\odot y}^2 + v_{\odot z}^2) \equiv \frac{4}{3}\pi\, v_\odot^2; \\ C_2 &= \frac{16}{45}\pi\, R^2\, ((h_{xx} + h_{yy} + h_{zz})^2 + \\ &\quad 3(h_{xy}^2 + h_{xz}^2 + h_{yz}^2 - h_{xx}h_{yy} - h_{xx}h_{zz} - h_{yy}h_{zz})). \end{aligned} \tag{9.15}$$

Alle höheren Koeffizienten sind hier Null. Im Falle einer linearen Scherströmung, wie sie Oort 1926 betrachtet hat, gilt für C_2 die vereinfachte Darstellung

$$C_2 = \frac{16}{15}\pi\, R^2\, \mathbf{A}^2, \tag{9.16}$$

wo $\mathbf{A}$ die erste Oort'sche Rotationskonstante bedeutet. Die vollständige *Autokorrelationsfunktion* für die Radialgeschwindigkeiten lautet also

$$\boxed{C[\theta] = R^2\, H^2 + v_\odot^2\, \mathbf{P}_1\,(\cos\Theta) + \frac{4}{3}\, R^2\, \mathbf{A}^2\, \mathbf{P}_2\,(\cos\Theta)\,.} \tag{9.17}$$

H ist hier der einfache „Hubbleparameter“. Die berühmte galaktische „doppelte Sinuskurve“ in den Radialgeschwindigkeiten der Sterne nach

Oort wird in dieser Autokorrelation durch den Term proportional $\mathbf{P}_2(\cos\Theta)$ ausgedrückt. Da der Winkel Θ den Bereich von 0 bis π einnimmt, folgt für die Winkelausdehnung $\Delta\Theta$ der entsprechenden Strukturen

$$\Delta\Theta = \frac{180^\circ}{l}. \tag{9.18}$$

Diese Beziehung spielt gerade in der 3K-Hintergrundstrahlung eine wichtige Rolle.

Anhang

A.1 Maxwellsche Kugelfunktionen

Nach Maxwell kann man *Multipolpotentiale* vom Grad l auch in der Form

$$\Phi(\mathbf{r})_l = (\mathbf{t}_1\nabla)\,(\mathbf{t}_2\nabla)\ldots(\mathbf{t}_l\nabla)\frac{1}{r} \tag{A.1}$$

darstellen. Die l Vektoren $\mathbf{t}_i$ sind dann die *Pole* oder besser *Raum – Achsen* des Multipols und es gilt die Nebenbedingung

$$|\mathbf{t}_1|= |\mathbf{t}_2|= \ldots = |\mathbf{t}_l|. \tag{A.2}$$

Die l Vektoren $\mathbf{t}_i$ des Multipolpotentials der Ordnung l enthalten also zunächst $3l$ unabhängige Parameter; aber durch die obigen $l-1$ Nebenbedingungen reduzieren sich die unabhängigen Parameter auf $2l+1$. Dies stimmt genau mit den Koeffizienten $a_{l,m}$ der Kugelflächenfunktionen für $m = -l, \ldots, +l$ überein.

A.2 Lineare Scherströmungen

Wir nehmen an, dass wir uns in einem Zentralpotential mit differentieller Scherströmung befinden. Alle Teilchen bewegen sich auf Kreisbahnen. Die negative x Koordinate zeigt dann zum Zentrum und die positive y Achse in Richtung der Rotation. Wir "setzen" uns auf ein bestimmtes Teilchen, welches sich mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um das Zentrum bewegt. Die Dynamik von benachbarten Massepunkten wird zunächst in diesem *rotierenden* Koordinatensystem gemessen. In der lokalen Hillschen Approximation gilt dann für das Scherfeld

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\beta\,\Omega\,x \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

wobei Ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation und β den Scherströmparameter, definiert durch

$$\beta = -\frac{1}{2}\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln R}, \tag{A.4}$$

bedeuten. In einem Keplerpotential gilt dann $\beta = 3/4$.

Nach Helmholtz wollen wir nun dieses lokale Geschwindigkeitsfeld zerlegen in

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_{Wirbel} + \mathbf{v}_{Kompression} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{D} \otimes \mathbf{r}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

mit

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

Der Wirbelvektor $\boldsymbol{\omega}$ ist definiert durch

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \end{pmatrix}. \tag{A.7}$$

Wie man sieht, ist die *physikalische* Rotation genau die Hälfte der *mathematischen* Rotation. Für unser lineares Geschwindigkeitsfeld folgt dann für den Wirbelvektor im *rotierenden* System

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta\,\Omega \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

und für das *lokale* Wirbelfeld im *rotierenden* System

$$\mathbf{v}_{Wirbel} = \begin{pmatrix} +\beta\,\Omega\,y \\ -\beta\,\Omega\,x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

Wie man sieht, liefert (A.9) nur einen Anteil von (A.3). Der zweite Teil

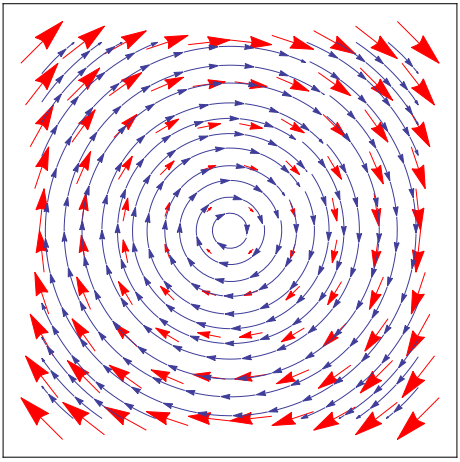


Fig. A.1: *Die Stromlinien (blau) und die Wirbelstärke (rot) eines Wirbelfeldes nach (A.9).*

liefert die Deformation, gegeben durch den Tensor $\boldsymbol{D}$ mit den Diagonal-Komponenten

$$\begin{aligned} h_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ h_{yy} &= \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ h_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \tag{A.10}$$

und den symmetrischen Nicht-Diagonalkomponenten

$$\begin{aligned} h_{xy} &= h_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \\ h_{yz} &= h_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ h_{zx} &= h_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{A.11}$$

Für die lineare Scherströmung lautet der Tensor dann

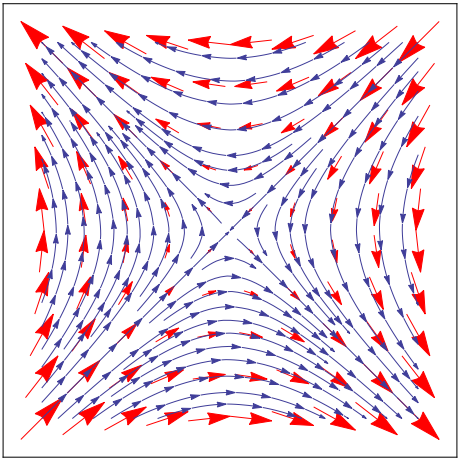


Fig. A.2: *Die Stromlinien (blau) und die Stärke (rot) eines Kompressionsfeldes nach (A.13).*

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta\Omega & 0 \\ -\beta\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.12}$$

und das dazugehörige Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v}_{Kompression} = \begin{pmatrix} -\beta\,\Omega\,y \\ -\beta\,\Omega\,x \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{A.13}$$

Beide Bestandteile liefern dann wieder das einfache lineare Scherfeld der Geschwindigkeiten.

Die obigen Formeln gelten nur im rotierenden System. Im Inertialsystem der Positionsastronomie haben Sterne auch dann eine Eigenbewegung, wenn sie sich in einer starr rotierenden Scheibe mit $\beta = 0$ befinden. Anstatt (A.3) gilt dann

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega\,y \\ (1-2\beta)\,\Omega\,x \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{A.14}$$

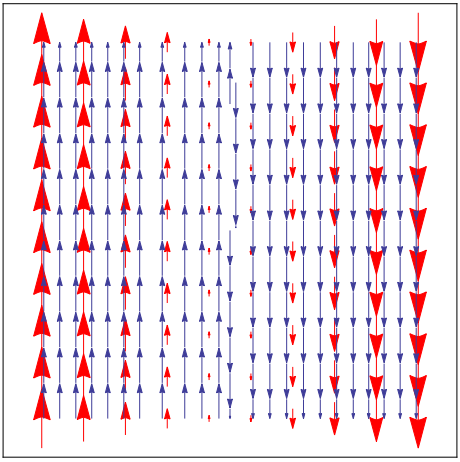


Fig. A.3: *Die Stromlinien (blau) und die Stärke (rot) einer linearen Scherströmung, wie sie sich aus der Kombination des Wirbelfeldes und des Kompressionsfeldes ergibt.*

und für das Wirbelfeld im Inertialsystem

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-\beta)\,\Omega \end{pmatrix} \tag{A.15}$$

Der *negative* Betrag dieses Wirbelvektors ist identisch mit der sogenannten zweiten Oortschen Konstanten **B** der galaktischen Rotation, definiert durch

$$\mathbf{B} = -\Omega \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln R}\right) \tag{A.16}$$

Der aktuelle Wert dieser Konstanten ist momentan ([15]):

$$\mathbf{B} = (-12.37 \pm 0.64)\, km\, s^{-1}\, kpc^{-1} \tag{A.17}$$

Mit der Einbeziehung des Wirbelfeldes ist damit eine Brücke hergestellt zwischen den Gausschen Apexrechnungen aus den Jahren 1822 und 1838 und den auf anderer Grundlage beruhenden Rechnungen von J.H. Oort ([35]) zur galaktischen Rotation aus dem Jahre 1927. Die Bestimmung der Oortschen Konstanten **B** ist Teil einer Apexrechnung/Vortexrechnung auf der Grundlage einer erweiterten *Gauss-Bravais-Airy* Methode geworden.

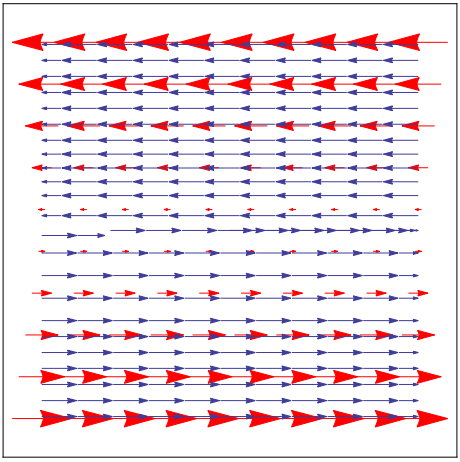


Fig. A.4: *Die Stromlinien (blau) und die Stärke (rot) des Strömungsfeldes im Inertialsystem eines Beobachters für* $\beta = 1/2$ *(Formel (A.15)).*

A.3 Galaktische Koordinaten

Seit 1932 benutzt man neben anderen Himmelskoordinaten auch die sogenannten galaktischen Koordinaten l, b. Seit 1958 werden sie definiert durch (Epoche 1950)

$$\cos[b]\cos[l-33] = \cos[\delta]\cos[\alpha - 282.25]$$

$$\cos[b]\sin[l-33] = \sin[\delta]\sin[62.6] + \cos[\delta]\sin[\alpha - 282.25]\cos[62.6]$$

$$\sin[b] = \sin[\delta]\cos[62.6] - \cos[\delta]\sin[\alpha - 282.25]\sin[62.6]$$

und für deren Umkehrung gilt

$$\cos[\delta]\cos[\alpha - 282.25] = \cos[b]\cos[l-33]$$

$$\cos[\delta]\sin[\alpha - 282.25] = \cos[b]\sin[l-33]\cos[62.6] - \sin[b]\sin[62.6]$$

$$\sin[\delta] = \cos[b]\sin[l-33]\sin[62.6] + \sin[b]\cos[62.6]$$

Sind die Komponenten der Sonnengeschwindigkeit $v_\odot$ im heliozentrischen System bekannt, so können sie mit der Eulerschen Rotationsmatrix **MEuler** in das galaktische System umgerechnet werden. Es gilt dann

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \mathbf{MEuler}\,[\varphi, \vartheta, \psi] \otimes \{v_{\odot_x}, v_{\odot_y}, v_{\odot_z}\}, \tag{A.18}$$

wobei **u** die radiale galaktische Komponente bezeichnet (positive Werte heißt Bewegung zum galaktischen Zentrum), **v** die tangentiale galaktische Komponente bezeichnet (positive Werte heißt Bewegung in Richtung der Rotation) und **w** die senkrechte galaktische Komponente ist. Für die Eulerschen Drehwinkel gelten nach den obigen trigonometrischen Formeln die Werte (Epoche 1950)

$$\mathbf{MEuler}\,[\varphi, \vartheta, \psi] \rightarrow \mathbf{MEuler}\,[282.25°, 62.6°, -33.0°]. \tag{A.19}$$

Die X-Achse des äquatorialen Systems (α, δ) wird also zunächst um den Winkel 282.25° gedreht, dann um diese neue X-Achse um den Winkel 62.6° angehoben (Neigung des galaktischen äquators zur Erdachse), und schließlich noch um die neue Z-Achse um den Winkel 33° mit dem Uhrzeigersinn gedreht. Die positive X-Achse des galaktischen Systems zeigt somit zum galaktischen Zentrum. Die Drehwinkel sind aufgrund der Präzession der Erdachse zeitabhängig und müssen auf eine Epoche bezogen werden.

Die Darstellung von räumlichen Rotationen durch Eulersche Winkel hat gravierende Nachteile, wenn man zeitliche Veränderungen betrachtet. Schon 1819 führte Gauss eine sogenannte **Quaternionen-Algebra** mit vier statt drei Parametern ein, um ganz allgemein Drehungen im Raum darzustellen[1]. Hierzu führte er eine "Mutationsskala", eine Liste von vier Zahlen ein, die man heute eine Quaternion nennt. Man beschreibt die Position eines Punktes im Raum durch die Größe

$$\mathbf{P} = [1, x, y, z]\,. \tag{A.20}$$

Sodann führt man eine Größe **Q** mit

$$\mathbf{Q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]\,. \tag{A.21}$$

[1] W.R. Hamilton führte unabhängig von Gauss "Quaternionen" ab 1843 ein. Gauss benutzte auch schon 1805 ein spezielles **FFT**-Verfahren, um Fourierkoeffizienten zu berechnen. Diese **F**ast- **F**ourier- **T**ransformation wurde erst 1965 von Cooley und Tukey wiederentdeckt.

ein, wobei die Komponenten Funktionen der Eulerschen Drehwinkel durch das folgende Schema

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos\left[\tfrac{\vartheta}{2}\right]\cos\left[\tfrac{\varphi+\psi}{2}\right], \quad & q_1 &= \sin\left[\tfrac{\vartheta}{2}\right]\cos\left[\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right], \\ q_2 &= \sin\left[\tfrac{\vartheta}{2}\right]\sin\left[\tfrac{\varphi-\psi}{2}\right], \quad & q_3 &= \cos\left[\tfrac{\vartheta}{2}\right]\sin\left[\tfrac{\varphi+\psi}{2}\right]. \end{aligned} \tag{A.22}$$

gegeben sind. Die neuen Koordinaten $\mathbf{P}' = [1, x', y', z']$ des gedrehten Punktes $\mathbf{P}$ ergeben sich dann aus der Transformation

$$\mathbf{P}' = \mathbf{Q}^* \, \mathbf{P} \, \mathbf{Q}, \tag{A.23}$$

wobei bei der Multiplikation die Regeln der Quaternionenalgebra anzuwenden sind und die Größe $\mathbf{Q}^* = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3]$ die konjugierte Quaternion von $\mathbf{Q}$ bezeichnet.

A.4 Das Wendelsche Theorem

Bei der Betrachtung der Gausschen Wahrscheinlichkeiten von günstigen und ungünstigen Sternen an der Himmelskugel kann man auf den Gedanken kommen, ganz abstrakt die Wahrscheinlichkeit auszurechnen, dass N zufällig gewählte Punkte auf der Himmelskugel genau innerhalb einer Halbkugel (Hemisphäre) konzentriert sind. Die ganz allgemeine Antwort für eine n-dimensionale Hypersphäre ist das WENDELsche Theorem.[2] In n Raumdimensionen und für N Punkte lautet die Formel

$$p[n, N] = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{N-1}{k}.$$

Für den hier interessanten dreidimensionalen Fall $n = 3$ folgt so

$$p[3, N] = \frac{N\,(N-1) + 2}{2^N}.$$

Daraus folgt $p[3, 1] = 1$, $p[3, 2] = 1$, $p[3, 3] = 1$, $p[3, 4] = 7/8$... Bei 6 Punkten gilt $p[3, 6] = 1/2$, bei 11 Punkten $p[3, 11] = 7/128$. Schon bei 20 Punkten sinkt die Wahrscheinlichkeit auf $3.6 * 10^{-4}$.

[2] Wendel, J.G. (1962) : A Problem in Geometric Probability. Math. Scand. **11**, 109-111

A.5 Eine Wirbelröhre

Eine Wirbelröhre ist ein einfaches Modell für eine achsensymmetrische galaktische Rotation. Wird die Achse der Röhre durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{\Omega_e}$ beschrieben, so lautet das rotationssymmetrische Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{V}(\mathbf{p}) = \Omega \left[\sqrt{\mathbf{p}^2 - (\boldsymbol{\Omega}_e \circ \mathbf{p})^2}\right] \, (\boldsymbol{\Omega}_e \times \mathbf{p}) \, . \tag{A.24}$$

Der Vektor $\mathbf{p} = \{x, y, z\}$ bezeichnet hier einen Punkt im Raum und das Argument $\sqrt{\mathbf{p}^2 - (\boldsymbol{\Omega}_e \circ \mathbf{p})^2}$ bezeichnet den Abstand R dieses Punktes von der Wirbelröhre. Wir setzen nun

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_\odot + \mathbf{r}, \tag{A.25}$$

wo $\mathbf{p}_\odot$ die Position der Sonne in der Galaxis und $\mathbf{r}$ eine kleine Abweichung bedeuten sollen. Der radiale Abstandsvektor des Punktes $\mathbf{p}$ von der Wirbelachse ist dann

$$\mathbf{R} = \mathbf{p} - (\boldsymbol{\Omega}_e \circ \mathbf{p})\boldsymbol{\Omega}_e \tag{A.26}$$

Durch eine Taylorentwicklung um den Punkt $\mathbf{p}_\odot$ bis zur ersten Ordnung in $\mathbf{r}$ ergibt sich das relative Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\partial \ln \Omega_\odot}{\partial \ln R_\odot} \, (\mathbf{g_e} \circ \mathbf{r}) \, (\boldsymbol{\Omega}_\odot \times \mathbf{g_e}) + (\boldsymbol{\Omega}_\odot \times \mathbf{r}) \tag{A.27}$$

Der Vektor $\mathbf{g_e}$ hat den Betrag 1 und zeigt auf die Wirbelachse (galaktisches Zentrum). Es gelten also die Randbedingungen

$$|\mathbf{g_e}| = 1; \qquad \mathbf{g_e} \circ \boldsymbol{\Omega}_\odot = 0. \tag{A.28}$$

Mit dem Scherströmparameter

$$\beta = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln \Omega_\odot}{\partial \ln R_\odot} \tag{A.29}$$

lässt sich die obige Gleichung verkürzt auch

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -2(\mathbf{g} \circ \mathbf{r}) \, (\boldsymbol{\Omega}_\odot \times \mathbf{g}) + (\boldsymbol{\Omega}_\odot \times \mathbf{r}) \tag{A.30}$$

schreiben, wobei nun

$$|\mathbf{g}|^2 = \beta; \qquad \mathbf{g} \circ \boldsymbol{\Omega}_\odot = 0 \tag{A.31}$$

gilt. Der Vektor $\mathbf{g}$ zeigt ebenfalls zum galaktischen Zentrum. Wegen

$$\mathbf{g}\,(\mathbf{g}\circ\mathbf{r}) = |\mathbf{g}|^2\,\mathbf{r} + \mathbf{g}\times(\mathbf{g}\times\mathbf{r}) \tag{A.32}$$

und der Eigenschaft $\mathbf{g}\circ\mathbf{\Omega}_\odot = 0$ gilt auch

$$\boxed{\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2\,[\mathbf{g}\circ(\mathbf{\Omega}_\odot\times\mathbf{r})]\,\mathbf{g} + (1-2|\mathbf{g}|^2)\,(\mathbf{\Omega}_\odot\times\mathbf{r}),} \tag{A.33}$$

wobei die Größe in eckigen Klammern ein Spatprodukt zwischen drei Vektoren bezeichnet.

Nach dem Helmholtzschen Satz kann man die lineare Geschwindigkeitsfeld in einen wirbelfreien Anteil und in ein reines Wirbelfeld zerlegen. Dies wird geleistet durch

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \left\{2\,[\mathbf{g}\circ(\mathbf{\Omega}_\odot\times\mathbf{r})]\,\mathbf{g} - |\mathbf{g}|^2\,(\mathbf{\Omega}_\odot\times\mathbf{r})\right\} + (1-|\mathbf{g}|^2)\,(\mathbf{\Omega}_\odot\times\mathbf{r}). \tag{A.34}$$

Der Term in den geschweiften Klammern ist dann wegen $\mathbf{g}\circ\mathbf{\Omega}_\odot = 0$ der wirbelfreie Anteil dieses linearen Scherströmfeldes. Die Bestimmung der Vektoren $\mathbf{g}$ und $\mathbf{\Omega}_\odot$ aus Eigenbewegungen der Sterne ist dann äquivalent der Bestimmung der OORT'schen Konstanten $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$, allerdings wesentlich allgemeiner, denn die Vektoren $\mathbf{g}$ und $\mathbf{\Omega}_\odot$ bestimmen nicht nur die OORT'schen Rotationskonstanten, sondern auch - *Koordinaten-invariant* - den galaktischen Pol und die Richtung zum galaktischen Zentrum.

A.6 Rotation und das Universum

Betrachtet man die geschichtliche Entwicklung der lokalen galaktischen Astronomie, so fällt auf, dass es immer wieder „logische“ Brüche bei der Entwicklung von Vorstellungen über die Dynamik im Raum gab. Nach den ersten Gausschen Apexrechnungen 1822 hat es über 100 Jahre gedauert, bis die lokale galaktische Rotation aus der Sternbewegung erkannt und herausgefiltert werden konnte. Bemerkenswert ist auch, dass der Helmholtzsche Satz über die lokale Zerlegung einer kleinen Bewegung in einem hydrodynamischen Kontinuum in der Astronomie des 19. Jahrhunderts nie angewendet worden ist. Man ging *a priori* immer von „ungerichteten“ Bewegungen ohne eine Systematik aus. Sehr deutlich ist dies bei *Karl Schwarzschild* zu bemerken, dem die Vorstellung einer systematischen galaktischen Rotation noch 1910 völlig fremd war.

ähnlich war die Entwicklung in der Kosmologie zu Beginn des 20. Jahrhunderts, als man aus den Beziehungen zwischen Helligkeit und Radialgeschwindigkeit und auch Winkeldurchmesser und Radialgeschwindigkeit bei Galaxien auf die Expansion des Universums schloss[3] Dabei folgt **zwingend** aus dem „Helmholtzschen Satz“

$$\mathbf{v}_n + r_n\left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_n\right) + r_n\left(\mathbf{H} \otimes \mathbf{e}_n\right) = \mathbf{v}_\odot + \dot{r}_n \mathbf{e}_n + r_n \dot{\mathbf{e}}_n \tag{A.35}$$

daß die lokale kinematische Eigenschaft eines sich bewegenden Kontinuums in erster klassischer Näherung vollständig durch einen „Hubble - Tensor“ $\mathbf{H}$ und durch einen „Rotationsvektor“ („Gödelsche Wirbelstärke“ oder „vorticity“) beschrieben ist. Tatsächlich ist es möglich, im Rahmen einer „Newtonschen Kosmologie“ und dem allgemeinen linearen zeitabhängigen „Strömungsfeld“

$$\boxed{\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(t) \otimes \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}} \tag{A.36}$$

in Verbindung mit der Poissongleichung, der hydrodynamischen Kontinuitätsgleichung und der hydrodynamischen Bewegungsgleichung ohne Druckterm (!) eine Kosmologie von expandierenden Weltmodellen zu entwickeln, die ihre Entsprechung in relativistischen Weltmodellen und dem Gödeluniversum haben (Vergleich mit Bianchi - Klassifikationen). Entsprechende Untersuchungen haben O. Heckmann und Schücking 1955/1956 in Eleganz durchgeführt.[20] In dieses Gebiet gehört als Grenzfall dann auch die Theorie rotierender inkompressibler (konstante Dichte: *statisches* Universum) Gleichgewichtsfiguren wie Maclaurinellipsoide, Jacobiellipsoide, Riemannellipsoide,...

Da man aber die „Eigenbewegung“ der Galaxien bezüglich eines „kosmischen Referenzsystems“ nicht messen kann (C. W. Wirtz hat dies bis 1916 versucht), scheint die Bestimmung einer lokalen Wirbelstärke oder eines „kosmischen Wirbelvektors“ $\boldsymbol{\omega}$ unmöglich. Denn aus *Rotverschiebungen* allein – egal ob bei Sternen oder Galaxien – kann man zwar den lokalen Hubbletensor $\mathbf{H}$, **nicht aber die lokale kosmische Rotation** $\boldsymbol{\omega}$ bestimmen.

[3] Einer der ersten Astronomen, die dies qualitativ im Zeitraum 1922 - 1924 getan haben, war Carl Wilhelm Wirtz (1876 - 1939). 1929 hat dann E. Hubble die Expansionsrate quantitativ aus Beobachtungen bestimmt.

Wissenschaftshistorisch ist wiederum interessant, daß die Idee eines expandierenden **und** rotierenden Universums nicht von einem Astronomen oder Kosmologen kam (auch nicht von Einstein), sondern von dem Mathematiker und Logiker KURT GÖDEL[4]. In der Vergangenheit hat es Versuche gegeben, den möglichen „Pseudo - Vektor“ $\boldsymbol{\omega}$ unseres Universums aus der Ausrichtung von Magnetfeldern von Radiogalaxien zu bestimmen. Paul Birch gibt 1982 in einem NATURE Artikel ([9]) für den Betrag und die Richtung in Rektaszension und Deklination dieses Pseudo - Vektors

$$|\boldsymbol{\omega}| \approx 10^{-20}\, rad\, s^{-1} \approx 1 km/s/Mpc;$$
$$\alpha \approx \ \mathbf{+45^\circ} \qquad \delta \approx \ \mathbf{+35^\circ}$$

an. Heutzutage wird in quantenmechanischer Analogie zum klassischen „Foucault - Pendel“ (Kompaß der Trägheit) zum Nachweis der Erdrotation jetzt mit Hilfe des optischen **Sagnac - Effektes** unter Zuhilfenahme eines Laser - Materie - Interferometers (**Laser-Kreisel-Kompaß (Ringlaser)**) versucht, eine mögliche kosmische Rotation tatsächlich nachzuweisen. Die Frage, wogegen der Kosmos eigentlich rotiert, ist hier irrelevant, da ein Ringlaser, bei dem zwei Laserstrahlen in einem Glasfaserring sich gegenläufig überlagern, als MINIMALE Rotationsfrequenz eben diesen Rotationsparameter des Gödeluniversums messen würde. Die Eigenschaft des Raumes „Rotation“ ist also durch optische Methoden ohne „äußere Orientierung“ **absolut messbar!**

Albert Einstein hielt am 5. Mai 1920 an der „Reichsuniversität“ zu Leiden (Niederlande) eine bemerkenswerte Rede über das Thema **äther und Relativitätstheorie**. In einem Abschnitt heißt es dort:

> *...Anderseits lässt sich aber zugunsten der ätherhypothese ein wichtiges Argument anführen. Den äther leugnen bedeutet letzten Endes annehmen, daß dem leeren Raume keinerlei physikalische Eigenschaften zukommen. Mit dieser Auffassung stehen die fundamentalen Tatsachen der Mechanik nicht im Einklang. Das mechanische Verhalten eines im leeren Raume frei schwebenden körperlichen Systems hängt nämlich außer von den relativen Lagen (Abständen) und relativen Geschwindigkeiten*

[4] An Example of a new Type of Cosmological Solutions of Einstein‘s Field Equations of Gravitation. Reviews of Modern Physics **21**, No. 3, p. 447, (1949)

noch von seinem Drehungszustande ab, der physikalisch nicht als ein dem System an sich zukommendes Merkmal aufgefasst werden kann. Um die Drehung des Systems wenigstens formal als etwas Reales ansehen zu können, objektiviert Newton den Raum. Dadurch, daß er seinen absoluten Raum zu den realen Dingen rechnet, ist für ihn auch die Drehung relativ zu einem absoluten Raum etwas Reales. Newton hätte seinen absoluten Raum ebensogut „Äther“ nennen können; wesentlich ist ja nur, daß neben den beobachtbaren Objekten noch ein anderes, nicht wahrnehmbares Ding als real angesehen werden muss, um die Beschleunigung bzw. die Rotation als etwas Reales ansehen zu können...

Die Messung einer eventuellen Rotation des Universums oder anderer nicht-isotroper Anomalien bleibt auch heute aktuell. So ist ab 2020 der sogenannte *Hubble - Parameter* abhängig davon, ob man eine lokale heutige Messung durchführt oder aus den frühen Daten des Mikrowellen-Hintergrundes eine Hochrechnung zum heutigen Zeitpunkt macht. Auch hier gibt es eine *Apexbewegung* der Milchstrasse gegenüber dem als homogen angenommen Mikrowellenhintergrundes, welches zu einem sogenannten *kinematischen CMB-Dipol* in der Hintergrundstrahlung führt. Doch dieser *kosmische Apexvektor* ändert sich, wenn man die Daten aus über eine Millionen fernen Quasaren und eine halbe Millionen Radiogalaxien als Basis nimmt. Die Richtungen weichen dann um etwa 26 bis 45 Grad von dem CMB-Dipol ab ([40]). Wir begegenen hier offensicht wieder den gleichen Problemen wie vor 200 Jahren, als die Annahme einer isotropen Geschwindigkeitsverteilung der Sterne in der Sonnenumgebung zu Paradoxien bei der Apexbestimmung führten.

Wir können somit nur hoffen, dass die angenommenen Modelle unser Universum korrekt beschreiben; ein Universum, welches ja in Wirklichkeit eher aus einer ungeheuren Zahl von sich nichtlinear und unorientiert (?) überlagernden „Kerrmetriken“ besteht. Auch die „Anisotropie“ der niedrigen Multipolmomente der Hintergrundstrahlung deuten vielleicht auf eine „Torustopologie“ des Universums mit Rotation hin. Dabei kann auch ein Universum mit im Mittel euklidischer Metrik ein *endliches Volumen* haben. Ob eine Messung der Rotationsfrequenz des Universums aber sinnvoll ist, wird die Zukunft zeigen. Bei Flugzeugen und U-Booten wird der Ringlaser zur absoluten „Rotations - Navigation“ längst angewen-

det. Und selbst in der Geophysik werden zeitliche Schwankungen in der Plattentektonik durch Laserkreisel registriert.

Literaturverzeichnis

[1] Airy, G.B.: On the Movement of the Solar System in Space. Memoirs of the Royal Astronomical Society, Vol. **28**, London 1860, pp. 143-171

[2] Anding, E. *Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum.* München, 1901. Ernst Emil Ferdinand Anding (1860 - 1945) promovierte 1888 bei Hugo von Seeliger mit dem Thema: *Photometrische Untersuchungen über die Verfinsterung der Jupitertrabanten* und war letzter Direktor der Gothaer Sternwarte von 1906 bis 1934.

[3] Anding, E. (1896): Über den Einfluss der Sternverteilung auf die Bestimmung des Sonnenapex nach der Bessel'schen Methode. Astronomische Nachrichten **140**, No. 3337, pp. 1-18. Anding untersuchte kritisch die Methoden von Argelander, Bessel und Airy. Den Briefwechsel Gauss - Olbers aus den Jahren 1822 - 1824 sowie die Untersuchung von Bravais kannte er selbst 1901 noch nicht.

[4] Argelander, A.G.W. (1837). *Über die eigene Bewegung des Sonnensystems, hergeleitet aus den eigenen Bewegungen der Sterne* (lu le 3 février 1837), Mémoires présentés a l' Académie des Sciences de St. Pétersburg par divers savents, Petersburg 1837, S. 561-605

[5] Argelander, A.G.W. (1839). *Über die eigene Bewegung des Sonnensystems.* Astronomische Nachrichten **16**, No. 363, pp. 43-49

[6] Bessel, F.W. (1818) *Fundamenta Astronomiae pro anno 1755 deducta ex observationibus viri incomparabilis James Bradley*, Regiomonti 1818, p. 308 - 310. (Zum erstenmal Einführung der „Bessel - Pole" in einer Tabelle)

[7] J.D. Biedenburg (1730): *Versuch vom Bau der Welt aus den Observationen.* Bremen, gedruckt bei Hermann Christoph Jani, des Löbl, Gymasii Buchdruck 1730.

[8] Binney, J. & S. Tremaine (1987): *Galactic dynamics.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey. (Ein ausgezeichnetes Lehrbuch – nur eins fehlt: Das Wort Apex und die Methoden der Apexbestimmung!)

[9] Birch, P.: *Is the Universe Rotating?*, Nature, **298**, 451 (1982)

[10] Bravais, A.: *Mèmoire sur le Movement propre du système solaire dans l'espace.* Journal de mathematiques pures et appliquees, premiere serie, tome **8**, annee 1843, Paris 1843, p. 435-488

[11] Brünnow, F.F.E.: Lehrbuch der Sphärischen Astronomie, Ferd. Dümmler's Buchhandlung, Berlin 1851. Dieses Buch mit einem Vorwort von F.W. Encke war im 19. Jahrhundert das Standardwerk für alle Fragen der Ortsbestimmung, Zeitbestimmung und Navigation. Es erschien in mehreren Auflagen

[12] Clube, S.V.M. (1972): *Galactic Rotation Constants.* Q.R.Astron.Soc. **13**, 252-257

[13] Eddington, A.S. (1906): The Systematic Motions of the Stars. MNRAS **67**, p. 34 – 63

[14] Eddington, A.S.: *Stellar Movements and the Structure of the Universe.* MacMillan and Co., London 1914

[15] Feast, M & P. Whiteclock (1997): *Galactic kinematics of Cepheids from HIPPARCOS proper motions.* MNRAS **291**, p. 683

[16] Briefwechsel Gauss-Olbers. Georg Olms Verlag 1976. Hildesheim/New York. Nachdruck der Ausgabe: Wilhelm Olbers. Sein Leben und seine Werke. Verlag von Julius Springer. Berlin 1900.

[17] Gauss, C.F.: Über die Bewegung des Sonnensystems Göttinger Preisaufgabe von 1819. Gauss-Werke. Band **XI** Abteilung 1; pp. 405-506. (1863-1929). Göttinger Digitalisierungs Zentrum. Niedersächsische Staats - und Universitätsbibliothek Göttingen.

[18] Harzer, P. (1893): *Eine Bemerkung zu Herrn Kobolds Aufsatz: „Über die Bestimmung der eigenen Bewegung des Sonnensystems“.* Astronomische Nachrichten **133**, No. 3173. pp. 79-82 , 1893

[19] Hecker, Oscar (1891): *Über die Darstellung der Eigenbewegungen der Fixsterne und die Bewegung des Sonnensystems.* Dissertation an der königlichen LMU München bei Hugo von Seeliger. Einer der ersten Versuche, astronomische Daten an der Himmelskugel nach Kugelfunktionen zu entwickeln, um verborgene Anomalien zu entdecken. Oscar Hecker (1864-1938) wurde später Direktor der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena und war Spezialist für Schweremessungen und Seismologie.

[20] Heckmann, O. & E. Schücking 1955. *Bemerkungen zur Newtonschen Kosmologie.* Z. f. Astrophysik **38**, 95 - 109. *Hier wird der allgemeine „Helmholtzsche Satz“ infinitesimaler Verschiebungen in der Hydrodynamik auf eine Newtonsche Kosmologie mit Rotation des Universums angewendet*

[21] Herschel, W. (1783, 1805, 1806): *London Phil. Trans.. Scientific papers* vol 1, p. 108; vol 2, p. 317; vol 2, p. 338.

[22] Kapteyn, J.C. (1901): *Der Apex der Sonnenbewegung, die Konstante der Präzession und die Korrektionen der Eigenbewegungen in Deklination nach Auwers-Bradley.* Astronomische Nachrichten **156**, No. 3721-3722, pp. 1-20, 1901

[23] Kobold, H.(1893): *Über die Bestimmung der eigenen Bewegung des Sonnensystems.* Astronomische Nachrichten **132**, No. 3163-3164. pp. 305-326 , 1893

[24] Kobold, H.(1899): *Die Konstante der Präzession und die Bewegung des Sonnensystems untersucht auf der Grundlage von Bessel.* Astronomische Nachrichten **150**, pp. 15-16 , 1899

[25] Kobold, H. (1906) *Der Bau des Fixsternsystems mit besonderer Berücksichtigung der photometrischen Resultate.* Braunschweig, Vieweg & Sohn 1906

[26] Kobold, H. (1909) : Ein Brief von Gauss an Argelander. Astronomische Nachrichten **4380**, 186-188, 1909

[27] Helmholtz, H.L.F. 1858: *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen.* Crelles Journal **55**, 25

[28] Humboldt, A. KOSMOS. Entwurf einer physischen Weltbeschreibung (1845-1862). Neuedition in der besonderen Bibliothek. Enzensberger 2004. Frankfurt am Main.

[29] HIPPARCOS Haupt-Katalog (1997): [ftp://cdsarc.u-strasbg.fr/pub/cats/I/239]. Der HIPPARCOS-Katalog der ESA (European Space Agency) enthält fast 120000 Sterne mit präzisen astrometrischen Daten (Position, Eigenbewegung, Parallaxe, Helligkeit, ...). Eine Erweiterung sind der Tycho 1- und Tycho 2 Katalog mit über 2.5 Millionen Sternen.

[30] Leeuwen, Floor van: *Hipparcos, the New Reduction of the Raw Data Series*: Astrophysics and Space Science Library , Vol. **350** Leeuwen, Floor van, 2007, XXXII, 449 p., Hardcover ISBN: 978-1-4020-6341-1

[31] Lindegren, L.: The Astrometric Instrument of Gaia: Principles. Proceedings of the Gaia Symposium *The Three-Dimensional Universe with Gaia* (ESA SP- **576**). Held at the Observatoire de Paris-Meudon, 4-7 October 2004. Editors: C. Turon, K.S. O'Flaherty, M.A.C. Perryman.

[32] Lühning, Felix (2004): „*...eine ausnehmende Zierde und Vortheil. Geschichte der Kieler Universitätssternwarte und ihrer Vorgängerinnen 1770-1950.*“ Habilitationsschrift; vorgelegt im Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg. Hamburg/ Kiel/ Berlin 2004. Sonderveröffentlichungen der Gesellschaft für Kieler Stadtgeschichte, herausgegeben von Jürgen Jensen, Band **56**. Wachholtz Verlag, 2007

[33] Maurer, Bertram (1998): *Der Gaußschüler Ludwig Christoph Schnürlein* Mitteilung der Gaussgesellschaft **35**, 17-39, (1998), Göttingen

[34] Milne, E.A.(1935): Stellar kinematics and the K-effect. MNRAS **95**, 560-573

[35] Oort, J.H. (1927): *Investigations concerning the rotational motion of the galactic system together with new determinations of secular parallaxes, precession and motion of the equinox.* Bulletin of the Astronomical Institute of the Netherlands, Vol. **4**, p.79. Diese bedeutende Arbeit gibt für die Konstante **B** den Wert $(-24 \pm 5) kms^{-1} kpc^{-1}$.

[36] Oort, J.H. (1939): *Reports on the Progress of Astronomy. Stellar Motions* MNRAS **99**, 369 - 384

[37] Plummer, H.C. (1912): *On a letter from Gauss to Argelander*, Astronomische Nachrichten. No. 4622, 262-264, 1912

[38] Pond, J. (1833) : *Catalogue of 1112 stars, reduced from observations made at the Royal Observatory at Greenwich, Eng from the Years 1816-1833.* Astronomical Observations made at the Royal Observatory at Greenwich, **18**, pp. P1-P19

[39] Schneider, P. (2006): Extragalactic Astronomy and Cosmology. An Introduction. Springer Verlag Berlin. 459 Seiten. Modernes Lehrbuch, welches aber auch die „lokale“ galaktische Astronomie behandelt

[40] N.J. Secrest, S. von Hausegger, Mohammed Ramez, R. Mohayaee & S. Sarkar (2022): *A Challenge to the Standard Cosmological Model.* The Astrophysical Journal Letters **937**, Number 2, L31

[41] Seitter, W.C. & H.W. Duerbeck 1999: Carl Wilhelm Wirtz: Pioneer in Cosmic Dimensions Harmonizing Cosmic Distance Scales in a Post-Hipparcos Era. ASP Conference Series, Vol **167**, 1999

[42] Smart, W.M. (1938): *Stellar Dynamics.* Cambridge. At the University Press. Hier werden die Gauss-Bravais-Airy Gleichungen sehr umständlich (nämlich ohne Vektoralgebra in unübersichtlicher trigonometrischer Komponentenschreibweise) hergeleitet. Die Begriffe *Apex* und *Vertex* werden in diesem Lehrbuch noch erwähnt.

[43] Chandrasekhar, S. & J. von Neumann (1942): *The statistics of the gravitational field of stars arising from a random distribution of stars.* ApJ. **95**, 489

[44] Schwarzschild, Karl. Gesammelte Werke, Edited by H.H. Voigt, Volume **I-III**, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1992)

[45] Schwarzschild, Karl. *Über den Einfluss der säkularen Aberration auf die Fixsternörter.* Astronomische Nachrichten **136**, 81 (1894)

[46] Struve, O. (1840): Mem. de l'Academie Imp. des Sciences à St. Petersburg, **6**, III

[47] Stumpff, P.: *Rigorous treatment of the heliocentric motion of stars.* Astron. Astrophys. **144**, 232-240,(1985)

[48] Vollmer, R., Vollmer, H. & H.W. Dürbeck: Some notes on „Leaves of Memory“, the autobiography of Hermann Kobold. The Journal of Astronomical Data, Vol. **10**, 2004. Die faszinierende und melodramatische Autobiographie mit dem Titel „Blätter der Erinnerung“ von Hermann Kobold (1858-1942) ist leider unvollendet, da sie mit Beginn der Kieler Jahre 1905 endet. Blätter der Erinnerung

[49] Wielen, R. (1977): The diffusion of stellar orbits derived from the observed age-dependence of the velocity dispersion. Astron. Astrophys. **60**: 263-275

[50] Wirtz, C.W. (1922): Einiges zur Statistik der Radialbewegungen von Spiralnebeln und Kugelsternhaufen. Astron.N. **215**, p.349

[51] Wirtz, C.W. (1924): DeSitter's Kosmologie und die Radialbewegung der Spiralnebel. Astron.N. **222**, p.21