Die Pothenotsche Aufgabe

und ihre Erweiterungen

Eugen Willerding

www.eugen-willerding.de
Die Pothenotsche Aufgabe
©2023 Eugen Willerding
Cover: Jan Vermeer: Der Geograph (1668)

Die Pothenotsche Aufgabe

und ihre Erweiterungen

Eugen Willerding

Inhaltsverzeichnis

1 Historische Betrachtungen **4**

2 Die Pothenotsche Aufgabe **10**
2.1 Punkte in der Ebene als komplexe Zahlen 10
2.2 Alternative Formulierung der Aufgabe 13
2.3 Ein Standort aus zwei Festpunkten 18
2.4 Der Peripheriewinkelsatz 20
2.5 Ein Brief von Gauss an Gerling 25
2.6 Komplexe baryzentrische Koordinaten 29
2.7 Die Methode der kleinsten Quadrate 35
2.8 Der unendlich ferne Punkt 37
2.9 Das topologische Kriterium 38
2.10 Das Problem von Fermat 46
2.11 Das Gaussche Problem des kürzesten Netzwerkes 50

3 Die Hansensche Aufgabe **54**
3.1 Definitionen 54
3.2 Die baryzentrischen Koordinaten 55
3.3 Alternative Formulierung 57
3.4 Historisches Zahlenbeispiel 58
3.5 Eine Winkelrelation im Viereck 60

4 Ein Navigationsproblem von Rümker **62**
4.1 Die Grundgleichungen 63
4.2 Das allgemeine Problem hat 12 Lösungen 66

5 Das Achtpunktproblem **72**
5.1 Die Aufgabe von Lambert 75
5.2 Die Aufgabe von Clausen 78

6 Das Problem der Schallortung **82**

7 Schlussbetrachtungen 86

Literaturverzeichnis 87

1 Historische Betrachtungen

Geometrische Ortsbestimmung ist ein altes Problem der angewandten Astronomie und Landesvermessung, welches insbesondere bei der Seefahrt und bei Landreisen in unbekannte Regionen zur Anwendung kam. Berühmt ist hier besonders die *Pothenotsche Aufgabe*[1] oder das *Rückwärtseinschneiden*, wo aus drei der Lage nach bekannten Punkten (z.B. hohen Kirchtürmen am Horizont) die Koordinaten des eigenen Standpunktes nur aus den zwei beobachtbaren Abstandswinkeln der drei Türme berechnet werden müssen (Rückwärtseinschneiden nach drei Fixpunkten). In den gleichen Problemkreis gehört auch das aus der sphärischen Astronomie oder Astronavigation herrührende Dreihöhenproblem und das Zweihöhenproblem von Gauß und seine Verallgemeinerungen, also die Bestimmung der geographischen Breite und der Sternzeit aus drei Zenitdistanzen mit der Lage nach bekannten hellen Sternen. Die modernste Variante ist heute die geographische Ortsbestimmung mit 4 GPS-Satelliten[2], wo in Analogie zum Dreihöhenproblem der Astronavigation nicht nur die drei Raumkoordinaten, sondern auch noch die lokale Atomzeit des Empfängers (Zeitkorrektur) aus den nur relativen Zeitsignalen im Empfänger bestimmt wird.

Das relativ schwierige trigonometrische Vermessungsproblem in der zweidimensionalen Ebene wurde aber vor L. Pothenot schon von W. Snellius behandelt und gelöst ([30]). *Willebrord van Snell van Royen*, (1580-1626), war holländischer Physiker und Mathematiker. Als Sohn eines Mathematik - und Hebräischprofessors in Leiden geboren, hielt er schon ab dem Jahre 1600 Vorlesungen über Mathematik. Auf seinen Europareisen lernte er die Astronomen Tycho Brahe und Johannes Kepler kennen. Zu seinen bekanntesten Arbeiten zählt die Aufstel-

[1] Laurent Pothenot, 1660-1732, Professor am College Royal de France. Pothenot legte 1692 der Pariser Akademie eine neue Lösung des Problems vor, nachdem die Lösung von Snellius in Vergessenheit geraten war.

[2] eigentlich 5 GPS-Satelliten, da mit 4 Satelliten die Position strenggenommen noch zweideutig ist

Abb. 1.1: *Die niederländische Gedenkplakette am ehemaligen Wohnhaus von* Willibrord Snellius *(1580-1626) in Leiden, der 1615 zum erstenmal das sogenannte 'Rückwärtseinschneiden' ('achterwaartse insnijding') bei einer trigonometrischen Landvermessung durchführte. Der erste „Snellius - Punkt" war sein eigenes Wohnhaus, dessen Koordinaten er mit Hilfe von drei der Lage nach bekannten Kirchtürmen seiner Vaterstadt berechnen konnte. (Bild-Quelle: wikipedia commons).*

lung des Brechungsgesetzes (1621) und seine Arbeiten zur geodätischen Trigonometrie und ersten Landesvermessung der Niederlanden und der Längenbestimmung des Meridians. Snellius löste dabei auch schon die sogenannte „Hansensche Aufgabe" in seinem geodätischen Hauptwerk *Eratosthenes Batavus* 1617.[3] Nachdem die Lösung von Snellius mit dem Kreiswinkelsatz vergessen war, machte 1671 in England der Mathematiker und Astronom Richard Towneley (1629-1707) wieder auf das Problem aufmerksam. Im gleichen Jahr gelang dann seinem Landsmann und Wissenschaftsorganisator John Collins (1625-1683) eine neuartige geometrische Lösung ([7]), die besonders einfach zu handhaben war [4] . Auf dem Kontinent blieben diese Lösungen weitgehend unbekannt, so dass 1692 Laurent Pothenot (1650-1732) in Paris seine Lösung im

[3]Weitere Werke von Snellius sind *Cyclometricus de circuli dimensione* 1621 und *Tiphys Batavus* 1624. Er editierte auch 1618 die astronomischen Beobachtungen des hessischen Landgrafen Wilhelm IV in *Coeli et siderum in eo errantium observationes hassiacae.*

[4]Das Zitat der Originalveröffentlichung verdanke ich Herrn Wolfram Neutsch

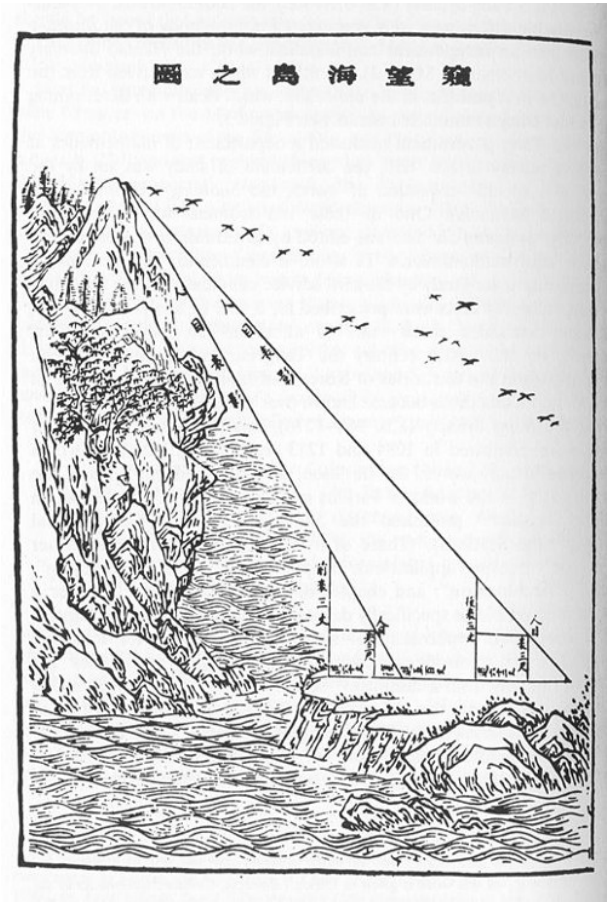


Abb. 1.2: *Zeichnung aus dem Buch* ***Haidao suanjing*** *des chinesischen Mathematikers Liu Hui (220? - 280?). Dieses aus dem Jahre 263 stammende „mathematische Handbuch der Seeinseln“ ist eines der zehn Klassiker (****Suanjing shi shu****) der mittelalterlichen chinesischen Mathematik und Landvermessung. Der chinesische Gelehrte Liu Hui war hier den arabischen wie europäischen Mathematikern um Jahrhunderte, wenn nicht sogar um ein Jahrtausend voraus.*

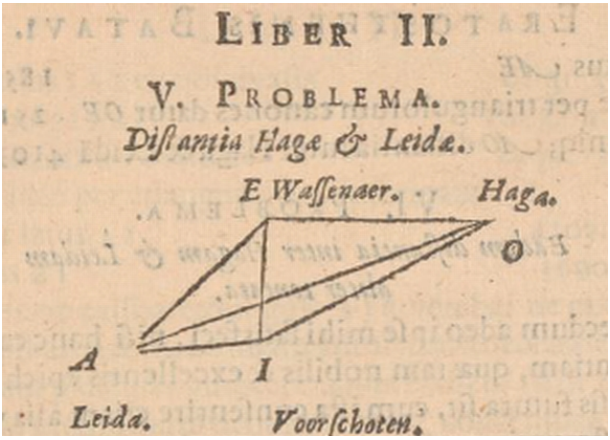


Abb. 1.3: *Eine Skizze zur Distanzmessung von Willibrordus Snellius aus seinem Werk* ***Eratosthenes Batavus*** *(Der niederländische Eratosthenes) aus dem Jahre 1617. (Quelle: ETH-Bibliothek Zürich; www.e-rara.ch)*

neuen Gewand publizieren konnte. Nach ihm gaben auch G.D. Cassini (1626-1712) und schließlich J. H. Lambert (1727-1777) weitere Lösungen des Problems an. Zu Beginn des 19ten Jahrhunderts wurden in Deutschland weitere geometrische Konstruktionen unter anderem von G.I. v. Metzburg (1735-1798), J.G.F. v. Bohnenberger (1765-1831), K. A. Schulze - Montanus, und F.W. Bessel bekannt [5].

Die umfangreichsten Untersuchungen zu diesem Problem hat wohl C.F. Gauss (1777-1855) durchgeführt. Bekannt sind seine Briefe an C.L. Gerling (7. 11. 1830, 24. 10. 1840, 14. 1. 1842) und an H.C. Schumacher (13. 4. 1836, 21. 4. 1836, 23. 4. 1836) sowie seine umfangreichen Notizen aus dem Nachlass, die bis zum Juli 1852 reichen. Es ist eigenartig, dass Gauss während seines Lebens immer wieder auf dieses Problem zurückgekommen ist, ein Problem, welches zwar elementar, aber doch gewisse mathematische Schwierigkeiten beinhaltet. Es besteht eine gewisse Analogie mit dem Problem der Bahnbestimmung eines Planeten aus drei geozentrischen Beobachtungen. Gauss hatte nun entdeckt, dass es Fälle in den gegebenen Daten der Aufgabe gibt, die *physikalisch unmöglich*

[5] Nach Aussagen heutiger Geodäten soll es zur Lösung diese Problems über hundert verschiedene Konstruktionsarten geben.

sind, obwohl die analytische Formel immer ein Ergebnis liefert – außer der gesuchte Punkt liegt auf dem kritischen Kreis. Es ging ihm hier um ein *einfaches* analytisches Kriterium, anhand dessen man sofort erkennen kann, ob die gegebenen Daten einer *wirklichen Beobachtungssituation* entsprechen.

Eng mit der *Pothenotschen Aufgabe* verwandt ist die sogenannte *Hansensche Aufgabe*. Benannt ist sie nach dem Astronomen und Geodäten P.A. Hansen (1795-1874), der sie 1841 in den Astronomischen Nachrichten ausführlich durchrechnete ([17]). Sie besteht darin, durch das Anvisieren zweier bekannter Punkte von zwei der Lage nach unbekannten Punkten die Koordinaten der Letzteren genau zu bestimmen. Historisch geht diese Aufgabe aber auch schon auf W. Snellius zurück, der sie schon um 1600 geometrisch löste.

Im Folgenden sollen beide Aufgaben nur mit Hilfe *komplexer Zahlen* als Beschreibung von Lagekoordinaten gelöst werden. Wir erhalten überraschend einfache *baryzentrische Koordinatenformeln*. In den 1930er Jahren hatte schon der holländische Geodät J.M. Tienstra (1895-1951) für das Pothenotsche Problem reine baryzentrische Formeln abgeleitet - allerdings für die reelle Koordinatenrechnung. Seine Formeln sind den rein komplexen baryzentrischen Formeln leicht unterlegen, wie noch gezeigt werden soll. Für die damalige logarithmisch - trigonometrische Rechnung wären auch Formeln mit komplexen Zahlen nicht sehr vorteilhaft gewesen, doch im Zeitalter elektronischer Datenverarbeitung ist das Rechnen mit komplexen Zahlen natürlich kein großes Problem mehr.

Am Ende soll auch noch das Problem der küstennahen Navigation zur Sprache kommen. Hier hebt sich besonders die von mir so „titulierte“ *Rümkersche Aufgabe* hervor. In letzter Konsequenz führt sie auf eine kubische Gleichung. Weitere wesentlich schwierigere Probleme finden sich in dem Buch von J.H. Lambert aus dem Jahre 1765 ([22]).

Abb. 1.4: *Das von C.F. Gauss im Jahre 1818 erfundene oder erdachte Heliotrop in zweiter verbesserter Messing - Ausführung, mit dem man mittels zweier zueinander normal stehender Planspiegeln das Sonnenlicht gezielt auf eine entfernte geodätische Station richten konnte („Sonnenwendspiegel“). Sein erster Biograph W.S. v. Waltershausen schrieb hierzu: ...“Auf dem Felde des Experiments war das Heliotrop die Lieblingserfindung von Gauss, und er hat öfter sehr bestimmt hervorgehoben, dass er zu derselben, nicht etwa, wie von einigen behauptet worden, durch einen reinen Zufall, sondern durch reifes Nachdenken gelangt sei. Es sei wahr, dass er auf dem Michaelisturm in Lüneburg eine Fensterscheibe eines Hamburger Turmes habe blitzen sehen, ein Zufall, welcher die praktische Ausführbarkeit seines Vorhabens noch bekräftigt habe, aber schon längs vorher sei die ganze Erfindung im Geiste fertig gewesen. Sein Auge verklärte sich dann, wenn er erzählte, wie zum erstenmal bei unserem nördlichen Meridianzeichen die Versuche mit dem Heliotrop ausgeführt worden waren, und wie viele Zuschauer und Neugierige um die Wirkung zu sehen herbeigeeilt und beim Erscheinen des fernen Lichtes einen lauten Freudenruf hätten ertönen lassen.“ Erst mit solch einem Instrument konnte man im 19. Jahrhundert so große Dreiecke wie das des Brocken - Inselberg - Hohenhagen vermessen ([29]). Nach 200 Jahren haben Hochfrequenz-modulierte Laserstrahlen und GPS Geräte die Vermessungsaufgaben übernommen. (Bild: Universität Göttingen/Universität Bonn (Argelander-Institut))*

2 Die Pothenotsche Aufgabe

2.1 Punkte in der Ebene als komplexe Zahlen

Im Folgenden stellen wir die Lage aller Punkte und Richtungen durch geeignete komplexe Zahlen dar. Historisch ist dies im Kontext einer Landesvermessung wohl zum erstenmal von dem norwegisch - dänischen Mathematiker Caspar Wessel (1745-1818) vorgeschlagen worden ([34]). Dies geschah wohl unabhängig von dem Buchhändler und Mathematiker J.R. Argand (1768-1822) und dem deutschen Mathematiker C.F. Gauss (1777-1855). Der Realteil entspricht dann der gewöhnlichen x - Achse, der Imaginärteil der dazu orthogonalen y Achse. Wir definieren somit für vier Punkte $\mathbf{P}_k$ (k = 0, 1, 2, 3)

$$\mathbf{P}_k = x_k + \imath\, y_k; \qquad \overline{\mathbf{P}}_k = x_k - \imath\, y_k \tag{2.1}$$

Größen mit einem *Überstrich (overline)* bedeuten dabei *konjugiert komplexe Größen.* Es gilt für die imaginäre Einheit $\imath^2 = -1$. Nach Fig. (2.1) gelten dann zwischen den drei bekannten Punkten $\mathbf{P}_k$ (k=1,2,3) und dem unbekannten Beobachtungspunkt $\mathbf{P}_0$ die drei Beziehungen

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_0 + |\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_0|\, e^{\imath\, \varphi_{0\,k}} \qquad \{k = 1, 2, 3\} \tag{2.2}$$

Die Winkel müssen dabei im gleichen Sinn längs des Horizontes von einem beliebigen Meridian als Nullmarke gemessen werden. Die drei messbaren Winkel φ_{01}, φ_{02} und φ_{03} beziehen sich hier zunächst auf einen festen aber beliebigen *Meridian.* Der Index „0“ bezieht sich hier auf den der Lage nach unbekannten Beobachtungspunkt $\mathbf{P}_0$, der Index „1“ zum Beispiel auf den Punkt $\mathbf{P}_1$. Anhand der obigen Ausgangsgleichungen sieht man aber schon, daß die drei Winkel *nicht-orientierte Azimuthe* darstellen, da die Unbestimmtheit bezüglich $\pm\pi$ (in Winkelgrad $\pm 180°$) hier schon zu sehen ist. Es gilt nach Definition ganz allgemein $\varphi_{01} - \varphi_{10} = (2k+1)\,\pi$, wo k eine beliebige reelle Zahl bedeutet. Diese Festsetzung ist gleichbedeutend

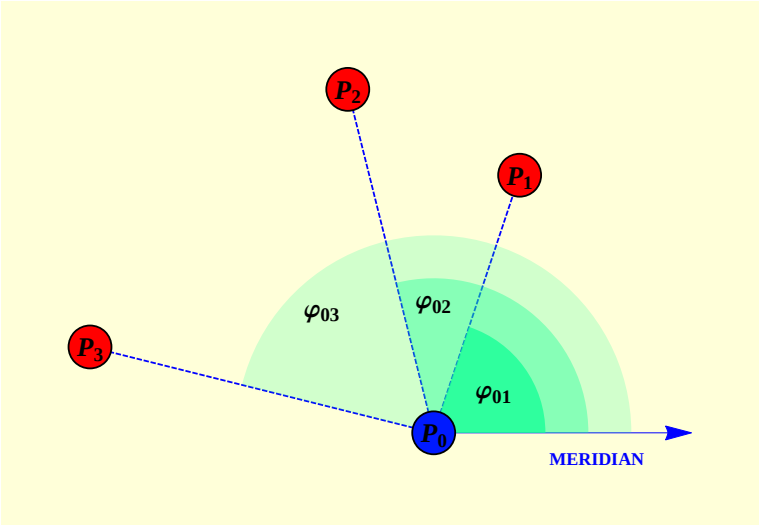


Abb. 2.1: *Die klassische Situation beim Rückwärtseinschneiden nach drei Punkten. Die Koordinaten der Punkte P_1, P_2 und P_3 sind bekannt. Vom Beobachtungspunkt P_0 werden bezüglich eines beliebigen Meridians drei Winkel $\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}$ gemessen. Wie lauten die Koordinaten des Punktes P_0?*

mit der Formel

$$\boxed{\varphi_{j\,k} = \arg[\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_j],} \tag{2.3}$$

wo $\arg[z]$ den Phasenwinkel φ (nach Gauss die *Clise*) der komplexen Zahl $z = |z|\, e^{\imath\,\varphi}$ darstellt. Entscheidet ist aber nun, daß eigentlich nur gewisse *Differenzen* von Winkeln beobachtet werden. Es reichen also im Prinzip zwei Winkelmessungen, um die zwei Koordinaten des Punktes $\mathbf{P}_0$ zu bestimmen.

Die obige Gleichung können wir nun in zwei unabhängigen *konjugiert komplexen* Varianten der Form

$$\begin{aligned} e^{-\imath\,\varphi_{0\,k}}\,(\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_0) &= |\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_0| \\ e^{+\imath\,\varphi_{0\,k}}\,(\overline{\mathbf{P}}_k - \overline{\mathbf{P}}_0) &= |\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_0|. \end{aligned} \tag{2.4}$$

schreiben. Aus diesen kann man die Distanz $|\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_0|$ eliminieren und

kommt so zu den fundamentalen Grundformeln des Problems (Fig. (2.1))

$$\begin{aligned} e^{-2\imath\,\varphi_{01}}\,(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0) &= (\overline{\mathbf{P}}_1-\overline{\mathbf{P}}_0) \\ e^{-2\imath\,\varphi_{02}}\,(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_0) &= (\overline{\mathbf{P}}_2-\overline{\mathbf{P}}_0) \\ e^{-2\imath\,\varphi_{03}}\,(\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_0) &= (\overline{\mathbf{P}}_3-\overline{\mathbf{P}}_0) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Zur Erinnerung: Ein Überstrich bedeutet die *konjugiert komplexen Größen.*

Um eine einzige Formel für den Neupunkt $\mathbf{P}_0$ zu erhalten, multiplizieren wir (2.5) nacheinander mit $(\overline{\mathbf{P}}_3-\overline{\mathbf{P}}_2)$, $(\overline{\mathbf{P}}_1-\overline{\mathbf{P}}_3)$, $(\overline{\mathbf{P}}_2-\overline{\mathbf{P}}_1)$ und erhalten

$$\begin{aligned} e^{-2\imath\,\varphi_{01}}\,(\overline{\mathbf{P}}_3-\overline{\mathbf{P}}_2)\,(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0) &= (\overline{\mathbf{P}}_1-\overline{\mathbf{P}}_0)\,(\overline{\mathbf{P}}_3-\overline{\mathbf{P}}_2) \\ e^{-2\imath\,\varphi_{02}}\,(\overline{\mathbf{P}}_1-\overline{\mathbf{P}}_3)\,(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_0) &= (\overline{\mathbf{P}}_2-\overline{\mathbf{P}}_0)\,(\overline{\mathbf{P}}_1-\overline{\mathbf{P}}_3) \\ e^{-2\imath\,\varphi_{03}}\,(\overline{\mathbf{P}}_2-\overline{\mathbf{P}}_1)\,(\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_0) &= (\overline{\mathbf{P}}_3-\overline{\mathbf{P}}_0)\,(\overline{\mathbf{P}}_2-\overline{\mathbf{P}}_1) \end{aligned}$$

Es ist zweckmäßig, die *aus den Beobachtungen bekannten* Hilfsgrößen c_1, c_2 und c_3, definiert durch

$$\begin{aligned} c_1 &= e^{-2\imath\,\varphi_{01}}\,(\overline{\mathbf{P}}_3-\overline{\mathbf{P}}_2) \\ c_2 &= e^{-2\imath\,\varphi_{02}}\,(\overline{\mathbf{P}}_1-\overline{\mathbf{P}}_3) \\ c_3 &= e^{-2\imath\,\varphi_{03}}\,(\overline{\mathbf{P}}_2-\overline{\mathbf{P}}_1) \end{aligned} \tag{2.6}$$

als Abkürzung einzuführen. Es gilt die Nebenbedingung

$$e^{2\imath\,\varphi_{01}}\,c_1 + e^{2\imath\,\varphi_{02}}\,c_2 + e^{2\imath\,\varphi_{03}}\,c_3 = 0. \tag{2.7}$$

Mit diesen Hilfsgrößen lauten die obigen Gleichungen übersichtlicher

$$\begin{aligned} c_1\,(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0) &= (\overline{\mathbf{P}}_1-\overline{\mathbf{P}}_0)\,(\overline{\mathbf{P}}_3-\overline{\mathbf{P}}_2) \\ c_2\,(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_0) &= (\overline{\mathbf{P}}_2-\overline{\mathbf{P}}_0)\,(\overline{\mathbf{P}}_1-\overline{\mathbf{P}}_3) \\ c_3\,(\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_0) &= (\overline{\mathbf{P}}_3-\overline{\mathbf{P}}_0)\,(\overline{\mathbf{P}}_2-\overline{\mathbf{P}}_1) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergibt sich, wenn man berücksichtigt, dass bei vier vorgegebenen komplexen Zahlen z_0, z_1, z_2, z_3 immer die Beziehung (Analogie: Satz des Ptolemäus)

$$(z_1-z_0)(z_3-z_2)+(z_2-z_0)(z_1-z_3)+(z_3-z_0)(z_2-z_1)=0$$

erfüllt ist,

$$c_1\,(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0)+c_2\,(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_0)+c_3\,(\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_0)=0.$$

Damit erhalten wir endgültig für den Neupunkt $\mathbf{P}_0$ die *elegante und eindeutige Lösung*

$$\boxed{\mathbf{P}_0 = \frac{c_1\,\mathbf{P}_1 + c_2\,\mathbf{P}_2 + c_3\,\mathbf{P}_3}{c_1 + c_2 + c_3}} \tag{2.9}$$

Mit dieser Formel[1] ist das Snellius-Pothenot'sche Problem oder das *Rückwärtseinschneiden nach drei Punkten* vollständig gelöst; das heißt man kann mit vorgegebenen komplexen Koordinaten der drei Punkte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ sowie den drei nach einem beliebigen Meridian orientierten Winkelrichtungen der Sehstrahlen $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ und φ_{03} den Punkt $\mathbf{P}_0$ berechnen. Unmöglich oder sehr ungenau ist das Rückwärtseinschneiden, wenn der Neupunkt zufällig auf dem *kritischen* Kreis liegt, der durch die drei Punkte definiert ist. In diesem singulären Fall gilt $\mathbf{P}_0 = 0/0$.

Man kann das Problem auch umgekehrt auffassen: Von drei bekannten Kamerapositionen $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ werden von einem unbekannten Objekt in der Ebene die entsprechenden drei absoluten Winkel-Azimute (Kompass-Richtungen) gemessen. Für die Bestimmung der Position des unbekannten Objektes kann auch hier die Formel (2.9) mit entsprechenden Modifikationen benutzt werden.

2.2 Alternative Formulierung der Aufgabe

In alten Schulbüchern wurde die Aufgabe des Rückwärtseinschneidens nach drei Punkten immer so formuliert, dass nur die zwei Abstände a und b zwischen den Punkten $\mathbf{P_2}$ und $\mathbf{P_1}$ sowie $\mathbf{P_2}$ und $\mathbf{P_3}$ und der eingeschlossene Winkel γ angegeben sind (siehe Fig. 2.2). Man kann ohne Probleme diese Situation auf die im vorhergehenden Abschnitt gegebene Formel übertragen. So kann man bis auf eine willkürliche Drehung in der komplexen Ebene festsetzen

$$\mathbf{P_1} = a; \;\; \mathbf{P_2} = 0; \;\; \mathbf{P_3} = b\,e^{-\imath\,\gamma}. \tag{2.10}$$

Für die beobachteten Azimuthe setzen wir für einen beliebigen Winkel φ_{01}

$$\varphi_{02} = \alpha + \varphi_{01}; \;\; \varphi_{03} = \alpha + \beta + \varphi_{01}. \tag{2.11}$$

[1] Dem Autor ist nicht bekannt, ob diese Formel mit ihren komplexen Koeffizienten c_1, c_2, c_3 in der Literatur bekannt oder jemals in der Praxis benutzt worden ist

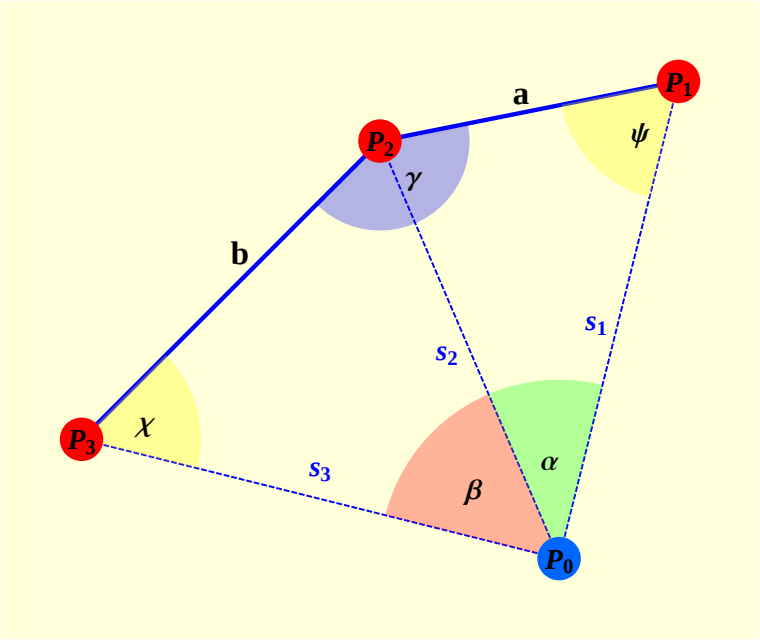


Abb. 2.2: *Die modifizierte Aufgabenstellung, bei der nicht die Koordinaten des Neupunktes* $\mathbf{P}_0$ *in der Ebene, sondern nur die drei Abstände* s_1, s_2 *und* s_3 *gesucht werden. Gegeben sind nur die Distanzen* a *und* b *sowie der Winkel* γ, *beobachtet werden die Winkel* α *und* β. *Mit den Hilfswinkeln* ψ *und* χ *gelingt eine rein trigonometrische Lösung, die insbesondere für die logarithmische Rechnung im 18ten und 19ten Jahrhundert geeignet war.*

Mit all diesen Größen lassen sich jetzt c_1, c_2 und c_3 algebraisch darstellen und man erhält mit (2.9) für den Punkt $\mathbf{P}_0$ die komplexe Koordinatenzahl

$$\boxed{\mathbf{P}_0 = \frac{a\,b\,\sin[\alpha+\beta+\gamma]\,e^{\imath\,\alpha}}{a\,\sin[\beta]+b\,\sin[\alpha]\,e^{\imath\,[\alpha+\beta+\gamma]}}} \tag{2.12}$$

Die einzelnen Entfernungen lassen sich dann durch die Ausdrücke

$$s_1 = |a-\mathbf{P}_0|;\quad s_2 = |\mathbf{P}_0|;\quad s_3 = |b\,e^{-\imath\,\gamma}-\mathbf{P}_0| \tag{2.13}$$

berechnen. Mit der komplexen Zahl

$$Z = a\,\sin[\beta]+b\,\sin[\alpha]\,e^{\imath\,[\alpha+\beta+\gamma]} \tag{2.14}$$

und deren Betragsquadrat

$$\begin{aligned} |Z|^2 &= a^2 \sin[\beta]^2 + b^2 \sin[\alpha]^2 + \\ &\quad +2\,a\,b \sin[\alpha] \sin[\beta] \cos[\alpha+\beta+\gamma] \end{aligned}$$

lauten die expliziten Formeln für s_1, s_2 und s_3

$$\begin{aligned} s_1 &= \pm \frac{a\,(a \sin[\beta] - b \sin[\beta+\gamma])}{|Z|}, \\ s_2 &= \pm \frac{a\,b \sin[\alpha+\beta+\gamma]}{|Z|}, \\ s_3 &= \pm \frac{b\,(b \sin[\alpha] - a \sin[\alpha+\gamma])}{|Z|}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Damit die Distanzen positiv sind, muss das Vorzeichen entsprechend gewählt werden. Ist die Summe $\alpha+\beta+\gamma$ gleich π (Sehnenviereck, wo gegenüberliegende Winkel 180 Grad ergeben), so sind die Formeln singulär und der Beobachtungspunkt $\mathbf{P}_0$ befindet sich auf dem kritischen Kreis (*circulus periculosus*). Ist dagegen die Summe $\alpha+\beta+\gamma$ größer oder kleiner π, so läßt sich entscheiden, ob der Beobachtungspunkt innerhalb oder außerhalb des kritischen Kreises liegt.

Für die rein logarithmisch - trigonometrische Rechnung im 18ten wie im 19ten Jahrhundert eignet sich besonders die folgende Auflösung der Aufgabe, die wohl auf J.H. Lambert zurückgeht und im Wesentlichen auf dem Sinussatz beruht. Nach Fig. (2.2) gilt im Dreieck $\mathbf{P_0\,P_1\,P_2}$ sowie im Dreieck $\mathbf{P_0\,P_2\,P_3}$

$$\frac{s_2}{\sin[\psi]} = \frac{a}{\sin[\alpha]}, \qquad \frac{s_2}{\sin[\chi]} = \frac{b}{\sin[\beta]} \tag{2.16}$$

Durch Elimination der noch unbekannten Entfernung s_2 ergibt sich

$$\frac{\sin[\psi]}{\sin[\chi]} = \frac{b}{a}\,\frac{\sin[\alpha]}{\sin[\beta]}. \tag{2.17}$$

Dies ist eine Gleichung für die beiden unbekannten Hilfswinkel ψ und χ. Eine zweite Bedingung folgt aber sofort aus der Winkelsumme in einem *konvexen* Viereck mit nicht überschneidenden Seiten gemäß

$$\alpha+\beta+\gamma+\psi+\chi = 2\,\pi. \tag{2.18}$$

Aus diesen zwei Gleichungen kann man im Prinzip die beiden Hilfswinkel ψ und χ berechnen. Unter der Annahme, dass die beiden Hilfswinkel bekannt sind, folgen die drei Distanzen mit Hilfe des Sinussatzes zu

$$\begin{aligned} s_1 &= a\,\frac{\sin[\psi+\alpha]}{\sin[\alpha]} \\ s_2 &= a\,\frac{\sin[\psi]}{\sin[\alpha]} \equiv b\,\frac{\sin[\chi]}{\sin[\beta]} \\ s_3 &= b\,\frac{\sin[\chi+\beta]}{\sin[\beta]} \end{aligned}$$

Diese Resultate waren in der Vergangenheit für eine logarithmisch - trigonometrische Rechnung hervorragend geeignet. Hauptproblem bleibt aber noch die rechnerische Bestimmung von ψ und χ. Mit der goniometrischen Identität

$$\frac{\sin[\psi]-\sin[\chi]}{\sin[\psi]+\sin[\chi]} = \frac{\tan\left[\frac{\psi-\chi}{2}\right]}{\tan\left[\frac{\psi+\chi}{2}\right]}$$

und dem bekannten Hilfswinkel

$$\tan[\varphi] = \frac{b}{a}\,\frac{\sin[\alpha]}{\sin[\beta]}$$

folgt mit (2.17) und (2.18)

$$\boxed{\tan\left[\frac{\psi-\chi}{2}\right] = \tan\left[\frac{\pi}{4}-\varphi\right]\,\tan\left[\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right]}$$

Aus der bekannten Summe und Differenz zweier Winkel lassen sich dann auch die Einzelwinkel berechnen. Die obige Gleichung erweist sich als die *Schlüsselgleichung* bei der trigonometrischen Formulierung der Pothenotschen Aufgabe. Man sieht sofort, dass im Falle $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ die Aufgabe nicht lösbar ist. Dann liegen nämlich die vier Punkte auf einem Kreis, welche so ein *Sehnenviereck* bilden, in dem die Summe gegenüberliegender Winkel 180 Grad beträgt.

Zu Zeiten von Snellius kam es nicht so sehr auf die Koordinaten eines Neupunktes an, sondern mehr auf die Distanzen zu bekannten

Abb. 2.3: *Holzschnitt aus dem Lehrbuch von Adolph Poppe aus dem Jahre 1847 zur Snellius - Pothenotschen Aufgabe. Titel: Ebene Trigonometrie in Anwendung auf Distanz - und Höhenmessung (1847). Die Bezeichnungen in dieser Figur sind etwas anders als in (2.2).*

Punkten. Denn diese Größen dienten dann dazu, die Länge eines Meridians möglichst genau zu vermessen, um in Verbindung mit astronomischen Messungen - ganz im Sinne Eratosthenes - den Erdumfang (eigentlich Meridian-Umfang) abzuleiten. Vor Snellius und nach Eratosthenes etwa 230 v.Chr. haben 724 Yi Xing (I.Hsing) in China, dann 820 der Kalif Al Mamun im Irak, 1525 J.F. Fernel (*Cosmotheoria* 1528)[2] in Frankreich und 1580 T. Brahe unterschiedlich lange Meridianbögen gemessen und daraus Erddimensionen abgeleitet.

Zum Abschluss dieses Kapitels noch einige Zahlenbeispiele aus vergangenen Jahrhunderten und alten Schulbüchern:

Aufgabe 1: *Die Visierwinkel nach Fig. (2.2) seien* $\alpha = 40°35'$, $\beta = 29°20'$. *Die Abstände der Kirchtürme (Burgen) sind* $a = 2105[Fuss]$ *und* $1423[Fuss]$. *Der Winkel* γ *beträgt* $150°40'$. *Wie groß sind die Entfernun-*

[2] J.F. Fernel maß 1525 die Länge des Meridianbogens nicht mit Hilfe der Trigonometrie, sondern in dem er die Umdrehungen des Wagenrades seiner Kutsche auf der Fahrt von Paris nach Amiens direkt zählte.

gen s_1, s_2 und s_3?[3]

Mit den obigen Formeln erhält man leicht

$$s_1 = 3165.03\,[F];\ s_2 = 2841.28\,[F];\ s_3 = 2772.79\,[F]. \tag{2.19}$$

Adolf Poppe erhält für die Distanzen s_1 und s_2 mit logarithmischen Rechnungen nahezu dieselben Werte, aber der Wert von s_3, nämlich $2763.57\,[Fuss]$, weicht vom wahren obigen Wert signifikant ab. Zudem scheint ein Druckfehler vorzuliegen, denn er rechnet zwar mit dem Wert $\gamma = 150°40'$, schreibt aber in der Aufgabe $\gamma = 150°4'$!

Aufgabe 2: *Der Funker eines Flugzeuges gibt nach Notlandung auf See zur Standortbestimmung die Visierwinkel nach den Leuchttürmen $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_3$ von $\mathbf{P}_2$ durch. Sie betragen $\alpha = 34.55°$, $\beta = 50.47°$. Die Abstände der Leuchttürme sind $a = 4650m$ und $b = 6540m$. Der Winkel γ beträgt $110.17°$. Wie groß sind die Entfernungen s_1, s_2 und s_3?*

Mit den obigen Formeln ergibt sich zunächst

$$\mathbf{P}_0 = 4600.48 - 6786.72\,\imath\ [m] \tag{2.20}$$

Daraus ergeben sich die Entfernungen zu

$$s_1 = 6786.90[m];\ s_2 = 8199.03[m];\ s_3 = 6886.06[m]. \tag{2.21}$$

Die Ergebnisse wurden hier übergenau berechnet, nur um zu zeigen, daß der Aufgabensteller wahrscheinlich fast ganze Zahlen im Ergebnis haben wollte (Rechnen mit 5-stelliger Logarithmentafeln).

2.3 Ein Standort aus zwei Festpunkten

In einem kleinen Einschub wollen wir als Ergänzung zur komplexen baryzentrischen Formel der Snellius- Pothenotschen Aufgabe folgendes rein akademische Problem betrachten: *Gegeben seien zwei Punkte* $\mathbf{B}$ *und* $\mathbf{C}$ *in der Ebene. Von einem dritten Punkt* $\mathbf{A}$ *aus sieht man die beiden bekannten Punkte unter einem Azimuthwinkel φ im Wertebereich* $0 <$

[3] Daten stammen von Otto Heinrich Adolf Poppe (1814 - ?). Sohn von Johann Moritz Poppe (1776-1854). Mathematik - und Physiklehrer. Direktor der höheren Gewerbeschule in Frankfurt am Main. Schrieb das Buch: Ebene Trigonometrie in Anwendung auf Distanz - und Höhenmessung (1847).

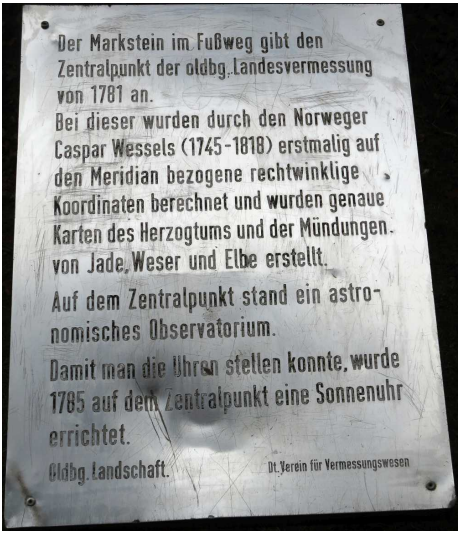


Abb. 2.4: *Gedenkplakette für Caspar Wessel (1745-1818) im Schlossgarten in Oldenburg. Von 1782 bis 1785 vermaß er für die Oldenburgische Vogteikarte das Herzogtum Oldenburg. (Quelle: wikipedia)*

$\varphi \leq \pi$. *Zudem kennt man das Entfernungsverhältnis* $AB : AC = n : m$. *Wie lauten jetzt die beiden möglichen Standorte von* $\mathbf{A}$*?*

Bezeichnen wir wieder die Lage der drei Punkte durch ihre komplexen Zahlen, so müssen offensichtlich folgende zwei Gleichungen

$$\frac{(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\overline{\mathbf{A}}-\overline{\mathbf{B}})}{(\mathbf{A}-\mathbf{C})(\overline{\mathbf{A}}-\overline{\mathbf{C}})} = \frac{n^2}{m^2}; \quad \frac{\mathbf{A}-\mathbf{B}}{\overline{\mathbf{A}}-\overline{\mathbf{B}}} = e^{2\imath\varphi}\,\frac{\mathbf{A}-\mathbf{C}}{\overline{\mathbf{A}}-\overline{\mathbf{C}}}$$

gelten. Auflösen nach dem unbekannten Punkt $\mathbf{A}$ liefert die beiden Lösungen

$$\mathbf{A}_{\pm} = \frac{m\,\mathbf{B} \pm e^{\imath\varphi}\,n\,\mathbf{C}}{m \pm e^{\imath\varphi}\,n}.$$

In Falle $\varphi = \pi/2$ folgt die schöne und einfache Formel

$$\mathbf{A}_{\pm} = \frac{m\,\mathbf{B} \pm \imath\,n\,\mathbf{C}}{m \pm \imath\,n}.$$

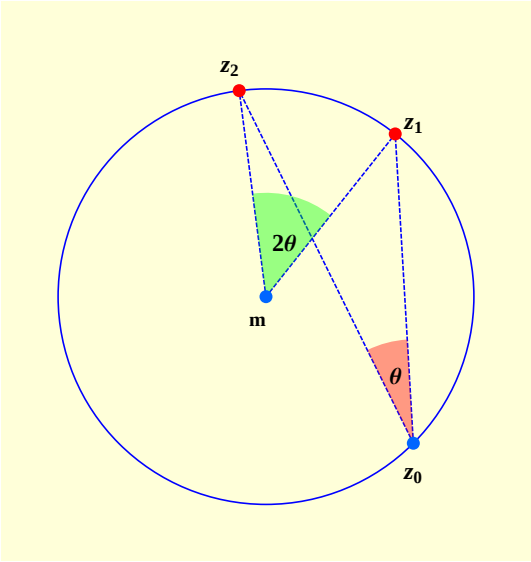


Abb. 2.5: *Der Kreiswinkelsatz besagt, dass der Mittelpunktswinkel eines beliebigen Kreisbogens immer doppelt so groß wie der zugehörige Umfangswinkel (Peripheriewinkel) ist. Alle Umfangswinkel über einem Kreisbogen sind gleich groß (Umfangswinkelsatz). Dieser Kreisbogen heißt auch „Fasskreisbogen". Der Zentrumswinkel kann dabei auch über 180 Grad sein. Mit Hilfe dieses Satzes haben sowohl* Snellius *als auch* Pothenot *das Rückwärtseinschneiden nach drei Punkten gelöst.*

Diese einfache Beziehung war zunächst nicht zu erwarten. Auf eine weitere geometrische Interpretation verzichten wir hier.

2.4 Der Peripheriewinkelsatz

Im 17ten und 18ten Jahrhundert hat man das Problem des *Rückwärtseinschneidens* nach drei Punkten praktisch ausschließlich durch geometrische Konstruktionen gelöst. Im Vermessungswesen von Artilleristen im Zeitalter der Messtische und Loga-Rechenwalzen war eine schnelle *analoge* Lösung vor Ort eine beliebte und bevorzugte Technik. Der entscheidende Satz hierzu war der bemerkenswerte *Kreiswinkelsatz*, *Peripheriewinkelsatz* oder *Umfangswinkelsatz*. Nach Figur (2.5) betrachten auf dem komplexen

Einheitskreis die drei Punkte $\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1$ und $\mathbf{z}_2$. Wir setzen

$$\mathbf{z}_0 = e^{\imath\,\varphi_0}; \qquad \mathbf{z}_1 = e^{\imath\,\varphi_1}; \qquad \mathbf{z}_2 = e^{\imath\,\varphi_2}$$

und für die konjugiert komplexen Größen mit $k = 0, 1, 2$

$$\overline{\mathbf{z}}_k = \frac{1}{\mathbf{z}_k} \equiv e^{-\imath\,\varphi_k}.$$

Aus diesen Definitionen ergeben sich durch algebraische Umrechnung sofort die Identitäten

$$\frac{\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0}{\overline{\mathbf{z}}_1 - \overline{\mathbf{z}}_0} = -\mathbf{z}_0\,\mathbf{z}_1, \qquad \frac{\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_0}{\overline{\mathbf{z}}_2 - \overline{\mathbf{z}}_0} = -\mathbf{z}_0\,\mathbf{z}_2.$$

Die orientierten Richtungswinkel φ_{01} der Sehne $\mathbf{z}_0\mathbf{z}_1$ und φ_{02} der Sehne $\mathbf{z}_0\mathbf{z}_2$ folgen dann aus

$$\frac{\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_0}{\overline{\mathbf{z}}_1 - \overline{\mathbf{z}}_0} \quad = \quad e^{2\imath\,\varphi_{01}} = -\mathbf{z}_0\,\mathbf{z}_1 = -e^{\imath\,(\varphi_0 + \varphi_1)}$$

und

$$\frac{\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_0}{\overline{\mathbf{z}}_2 - \overline{\mathbf{z}}_0} \quad = \quad e^{2\imath\,\varphi_{02}} = -\mathbf{z}_0\,\mathbf{z}_2 = -e^{\imath\,(\varphi_0 + \varphi_2)}$$

Für den Winkel $2\,(\varphi_{02} - \varphi_{01})$ folgt daraus durch Division

$$e^{2\imath\,(\varphi_{02} - \varphi_{01})} = \frac{\mathbf{z}_2}{\mathbf{z}_1} = e^{\imath\,(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Die Winkelinformation für die Lage des Punktes $\mathbf{z}_0$ im Kreis ist herausgefallen und wir haben das überraschende Theorem

$$\boxed{e^{2\,\imath\,(\varphi_{02} - \varphi_{01})} = e^{\imath\,(\varphi_2 - \varphi_1)}.}$$

Diese wichtige Formel drückt *in allgemeiner Form* sowohl den sogenannten *Umfangswinkelsatz* oder *Peripheriewinkelsatz* als auch den *Kreiswinkelsatz (Zentriwinkelsatz)* für eine beliebige Sehne an einem Kreis aus. Von jedem Punkt auf dem Kreis wird die Sehne $z_1\,z_2$ immer unter dem gleichen Winkel gesehen. Dieser Winkel ist immer halb so groß wie der

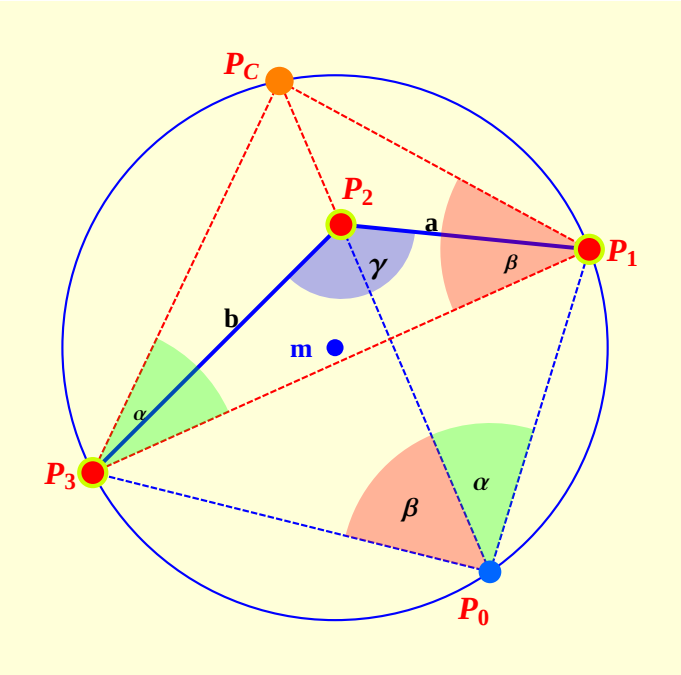


Abb. 2.6: *Geometrische Konstruktion der Pothenotschen Aufgabe nach* Collins *(1671). Durch Antragen der Winkel β bei $\mathbf{P}_1$ und α bei $\mathbf{P}_3$ an den gemeinsamen Schenkel $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3$ schneiden sich die freien Schenkel im Collinspunkt $\mathbf{P}_C$. Der Umkreismittelpunkt $\mathbf{m}$ ergibt sich als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Dreieckes $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_C\mathbf{P}_3$. Der Punkt $\mathbf{P}_0$ ergibt sich endlich als Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{P}_C\mathbf{P}_2$ mit dem Umkreis des Dreieckes $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_C\mathbf{P}_3$.*

entsprechende Zentrumswinkel am Kreismittelpunkt. Der *Thaleskreis* ist hiervon nur ein Spezialfall.

Der Kreiswinkelsatz und der Peripheriewinkelsatz sind die Grundlage aller geometrischen Konstruktionen zur Lösung der Pothenotschen und auch der Hansenschen Aufgabe gewesen. In Figur (2.6) ist speziell die Konstruktion von John Collins (1625-1683) dargestellt. Die sehr einfache Vorschrift lautet:

- Antragen der Winkel β bei $\mathbf{P}_1$ und α bei $\mathbf{P}_3$. Gemeinsamer Schenkel ist die Gerade $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3$. Die freien Schenkel schneiden sich nun im

Collinspunkt $\mathbf{P}_C$.

- Zeichne den Umkreis des Dreiecks $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_C\mathbf{P}_3$ mit dem Mittelpunkt $\mathbf{m}$ und dem Radius R.

- $\mathbf{P}_0$ ergibt sich als Schnittpunkt des Umkreises mit der Geraden $\mathbf{P}_C\mathbf{P}_2$.

Die vier Punkte $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_C, \mathbf{P}_3$ bilden ein Viereck, bei dem die Summe der Innenwinkel an $\mathbf{P}_C$ und $\mathbf{P}_0$ genau 180° ergeben. Darum handelt es sich um ein *Sehnenviereck*. Analytisch ist in der komplexen Ebene der Punkt $\mathbf{P}_C$ von Collins durch

$$\mathbf{P}_C = \frac{j_1\,\mathbf{P}_1 + j_3\,\mathbf{P}_3}{j_1 + j_3}, \tag{2.22}$$

mit den komplexen baryzentrischen Koordinaten

$$\begin{aligned} j_1 &= e^{2\imath\,\varphi_{02}} - e^{2\imath\,\varphi_{03}}; \\ j_3 &= e^{2\imath\,\varphi_{01}} - e^{2\imath\,\varphi_{02}} \end{aligned}$$

festgelegt. Diese Formeln entsprechen einem einfachen *Vorwärtseinschnitt*. Für den Mittelpunkt $\mathbf{m}$ und den Radius R des Umkreises der Punkte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_C, \mathbf{P}_3$ folgen die einfachen Ausdrücke

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\,\left[\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_3 + \imath\,(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1)\,\cot(\varphi_{03} - \varphi_{01})\right] \tag{2.23}$$

und

$$R = \frac{1}{2}\,|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3|\,|\csc(\varphi_{03} - \varphi_{01})|. \tag{2.24}$$

Diese Formeln lassen sich einfach geometrisch deuten. Eine alternative geometrische Konstruktionsvariante zu denen von Snellius und Pothenot stammt noch von Gauss ([32]). Die Details sind in der Figur (2.7) skizziert. Die Mittelpunkte der beiden Kreise sind wieder durch die Formeln

$$\mathbf{m}_a = \frac{1}{2}\,\left[\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \imath\,(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\,\cot(\varphi_{02} - \varphi_{01})\right] \tag{2.25}$$

und

$$\mathbf{m}_b = \frac{1}{2}\,\left[\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \imath\,(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)\,\cot(\varphi_{03} - \varphi_{02})\right] \tag{2.26}$$

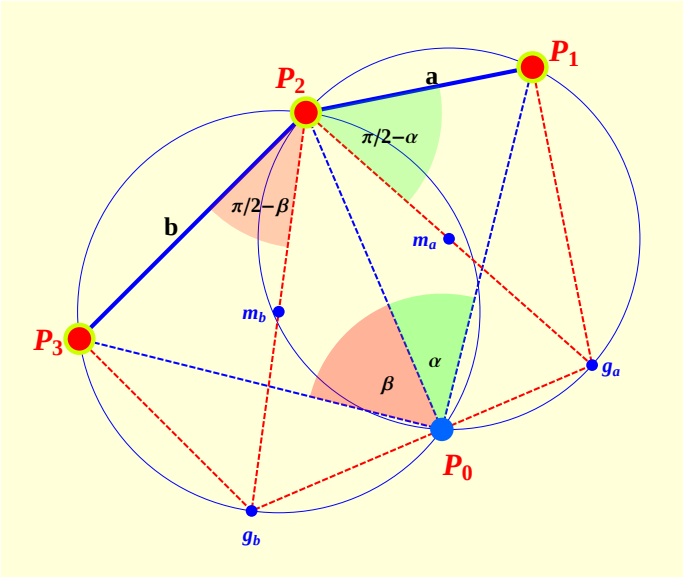


Abb. 2.7: *Geometrische Konstruktion der Pothenotschen Aufgabe nach* GAUSS. *Zunächst werden die Winkel* $\pi/2-\alpha$ *bei* $\mathbf{P}_2$ *am Schenkel* $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ *und* $\pi/2-\beta$ *bei* $\mathbf{P}_2$ *am Schenkel* $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ *angetragen. Die auf diesen Schenkeln senkrecht stehenden Geraden aus* $\mathbf{P}_1$ *und* $\mathbf{P}_3$ *schneiden die freien Schenkel in den Punkten* $\mathbf{g}_a$ *und* $\mathbf{g}_b$. *Der Punkt* $\mathbf{P}_0$ *ergibt sich als senkrechter Fußpunkt von* $\mathbf{P}_2$ *auf die Standlinie* $\mathbf{g}_a\mathbf{g}_b$ *des Messtisches. Man muss also nicht unbedingt die Mittelpunkte* $\mathbf{m}_a$ *und* $\mathbf{m}_b$ *der beiden Peripheriekreise konstruieren.*

gegeben. Daraus folgen die GAUSSpunkte zu

$$\mathbf{g}_a = \mathbf{P}_1 + \imath\,(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\,\cot(\varphi_{02} - \varphi_{01}) \tag{2.27}$$

und

$$\mathbf{g}_b = \mathbf{P}_3 + \imath\,(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)\,\cot(\varphi_{03} - \varphi_{02}). \tag{2.28}$$

Der gesuchte Punkt $\mathbf{P}_0$ ergibt sich so als senkrechter Fußpunkt von $\mathbf{P}_2$ auf die Standlinie $\mathbf{g}_a\mathbf{g}_b$ des noch im 19ten Jahrhundert verwendeten Messtisches. Der Beweis dieser Vorschriften beruht wieder auf dem *Kreiswinkelsatz*.

Auch für eine rein mechanische Lösung der Pothenotschen Aufgabe ist das schöne Theorem des Kreiswinkelsatzes wie geschaffen. So schreibt C.M. BAUERNFEIND zur Erfindung seines *Einschneidezirkels* 1873:

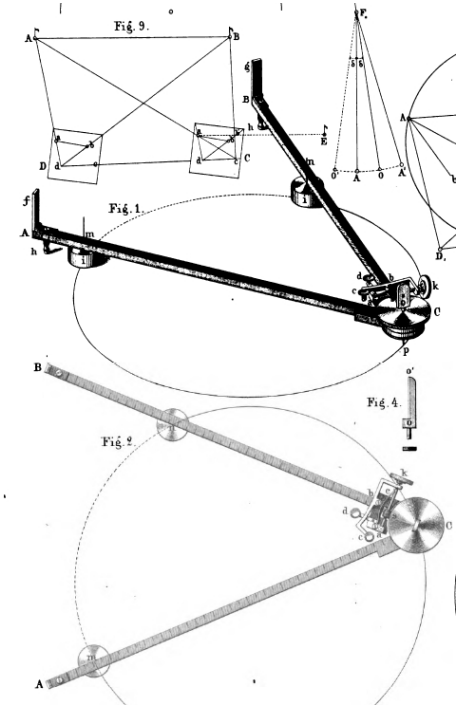


Abb. 2.8: *Der von C.M. Bauernfeind 1871 erfundene Einschneidezirkel zur mechanisch - graphischen Lösung der Pothenotschen oder Hansenschen Aufgabe. ([2]) (Quelle: google.books)*

> *Die Erfindung dieses Apparates beruht auf der Umkehrung des geometrischen Satzes, dass in einem Kreise alle auf dem nämlichen Bogen stehenden Peripheriewinkel einander gleich sind.*

In Figur (2.8) ist dieser Zirkel aus dem Buch ([2]) abgebildet.

2.5 Ein Brief von Gauss an Gerling

In einem Brief vom 1. November 1830 schrieb C.L. Gerling (1784-1864) unter Anderem an seinen Lehrer C.F. Gauss :

...Bei meinem letzten Aufenthalt in Hamburg lernte ich eine, mir neue, interessante Eigenschaft des geradlinigen Dreieckes kennen, die von einem meiner ehemaligen Lehrer, dem Architekten und Zeichenlehrer LANG, *aufgefunden und der dortigen mathematischen Gesellschaft vorgelegt ist. Der Punkt nämlich, dessen Distanzen von den Winkelpunkten zusammen ein Minimum bilden, läßt sich sehr leicht konstruieren, wenn man auf den Seiten gleichseitige Dreiecke beschreibt und deren Gipfel durch gerade Linien mit den gegenüberliegenden Dreieckspunkten verbindet; da sich diese 3 so entstehenden Linien in einem Punkte schneiden, so gibt dies zu den 4 anderen Punkten (innerer Kreis (Inkreismittelpunkt) , äußerer Kreis (Umkreismittelpunkt), Schwerpunkt und Perpendikelpunkt (Höhenschnittpunkt) ein fünftes interessantes Pendant. .....*

GERLING diskutiert hier eine mögliche Konstruktion des sogenannten *Fermatpunktes* im Dreieck, die er offensichtlich noch nicht kannte. Mitte des 19ten Jahrhunderts wurde dies als Spezialfall der sogenannten *Kiepert-Hyperbel* des Dreieckes ABC untersucht. GAUSS antwortete ihm darauf am 7. November 1830:

...Über die vier merkwürdigen Punkte im Dreieck habe ich selbst nie etwas bekanntgemacht. Was ich jedoch 1808 darüber Schumacher mitgeteilt habe, hat dieser im Anhang zu seiner Übersetzung von Carnot, Géometrie de position, 2. Bd., welcher 1810 erschienen ist, drucken lassen. Ich zweifle fast, daß der Punkt, welcher sich nach dem von Ihnen angeführten Satz ergibt, besonders elegante Relationen zu den übrigen darbieten wird, und zwar deshalb, weil jenes Theorem nur ein ganz spezieller Fall eines viel allgemeineren ist. Wenn man nämlich an die Seiten eines gegebenen Dreieckes ABC drei andere $AB\gamma$, αBC, $AC\beta$ legt[4], die jedes einem zweiten gegebenen Dreieck abc ähnlich sind, und zwar dergestalt, daß sie auch ähnlich liegend und die Winkel an α, β, γ denen an a,b,c gleich werden, so schneiden sich die Linien $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$

[4]Entweder alle drei an die äußere oder alle drei an die innere Seite des Dreieckes ABC gelegt

(nötigenfalls vorwärts oder rückwärts fortgesetzt) in einem Punkt D, und die Winkel an D (ADB, BDC, CDA) sind denen an γ, α, β entweder selbst oder ihren Nebenwinkeln gleich und ähnlich liegend. Offenbar ist dies die zierlichste Konstruktion der Pothenotschen Aufgabe;...

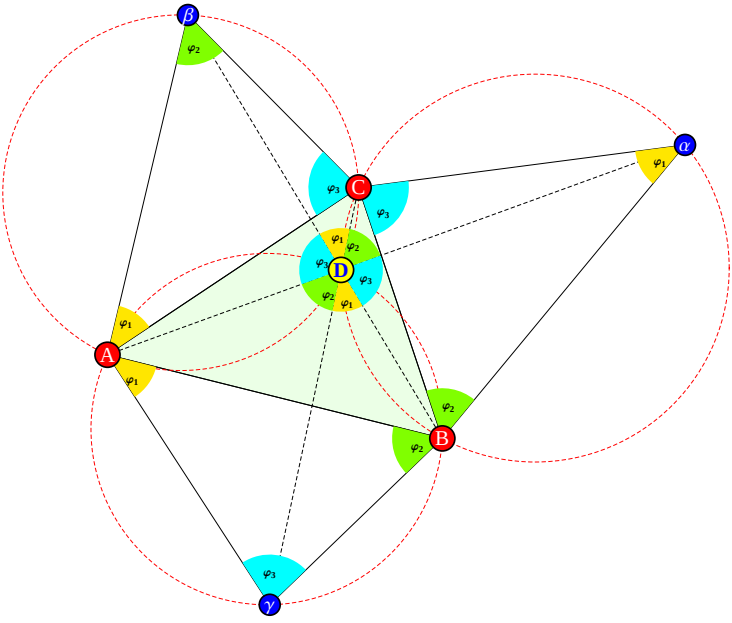


Abb. 2.9: *Die Gaussche Konfiguration für den Fall, daß alle drei ähnlichen Dreiecke nach außen an das Ausgangsdreieck ABC angelegt werden. Die Winkel an den Ecken ABC sind immer paarweise gleich. Es gilt natürlich $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \pi$.*

In den Abbildungen (2.9,2.10) lassen sich die Thesen von Gauss im Detail nachvollziehen. Betrachten wir die Konfiguration in der komplexen Ebene und nehmen (2.9) zur Hilfe, so gilt in beiden Fällen

$$\mathbf{D} = \frac{c_1\,\mathbf{A} + c_2\,\mathbf{B} + c_3\,\mathbf{C}}{c_1 + c_2 + c_3}. \tag{2.29}$$

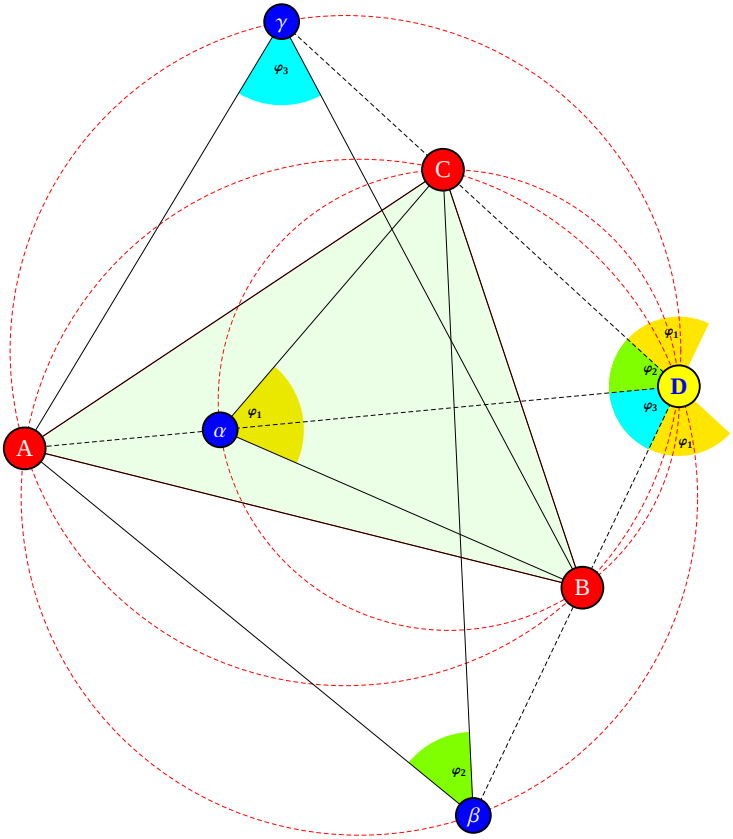


Abb. 2.10: *Die Gaussche Konfiguration für den Fall, daß alle drei ähnlichen Dreiecke nach innen an das Ausgangsdreieck ABC angelegt werden. Zur besseren Übersicht sind hier die paarweise gleichen Winkelbezeichnungen* $\varphi_{1,2,3}$ *an den Eckpunkten ABC weggelassen.*

In der Figur (2.9) gilt dabei

$$c_1 = \overline{\mathbf{C}} - \overline{\mathbf{B}}; \quad c_2 = e^{+2\imath\varphi_3}\,(\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{C}}); \quad c_3 = e^{-2\imath\varphi_2}\,(\overline{\mathbf{B}} - \overline{\mathbf{A}}).$$

In der Figur (2.10) dagegen müssen die Winkel negativ eingetragen werden. Dann gilt

$$c_1 = \overline{\mathbf{C}} - \overline{\mathbf{B}}; \quad c_2 = e^{-2\imath\varphi_3}\,(\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{C}}); \quad c_3 = e^{+2\imath\varphi_2}\,(\overline{\mathbf{B}} - \overline{\mathbf{A}}).$$

Beim Wechsel von außen anliegenden Dreiecken zu innen liegenden Dreiecken müssen also die Winkel ihr Vorzeichen wechseln.

Gerling bedankt sich in seinem Brief vom 3. Dezember 1830 und erwähnt, dass er die Konstruktion eines Hilfsdreieckes aus der Zeitschrift von Lindenau & Bohnenberger aus dem Jahre 1818, Seite 122, kennen würde. Aus heutiger Sicht muss man noch ergänzen, daß schon im Jahre 1825 von dem Gymnasiallehrer in Schulpforta C.F.A. Jacobi (1795-1855)[5] eine Verallgemeinerung der Gausschen Konfiguration untersucht wurde. Ob dies Gauss bekannt war, bleibt unklar. Hier sind die Aufsatzdreiecke nicht mehr zueinander ähnlich, es gilt somit $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \neq \pi$. Trotzdem existiert auch hier für die drei Linien ein gemeinsamer Schnittpunkt $\mathbf{D}$. Doch für das Pothenotsche Problem hat dies keine Relevanz mehr.

2.6 Komplexe baryzentrische Koordinaten

Die Formel (2.9) für die komplexen Koordinaten des Neupunktes $\mathbf{P}_0$ hat die Struktur des *baryzentrischen Kalküls* von A.F. Möbius (1790-1868) für ein 2-Simplex (2-Polytop) mit 2+1 Ecken

$$(c_1 + c_2 + c_3)\,\mathbf{P}_0 = c_1\,\mathbf{P}_1 + c_2\,\mathbf{P}_2 + c_3\,\mathbf{P}_3, \tag{2.30}$$

wo jetzt die Koeffizienten c_1, c_2 und c_3 die *komplexen baryzentrischen Koordinaten* des Punktes $\mathbf{P}_0$ bezüglich der Punkte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ darstellen. Der gesuchte Punkt $\mathbf{P}_0$ der Pothenot'schen Aufgabe hat also die *komplexen baryzentrischen Koordinaten*

$$\{c_1 \,:\, c_2 \,:\, c_3\}. \tag{2.31}$$

[5] nicht zu verwechseln mit C.G.Jacobi (1804-1851).

Diese homogenen komplexen Koordinaten sind ebenso wie die reellen *Trilinearen Koordinaten* von J. PLÜCKER (1801-1868) und die reellen Möbius'schen *baryzentrischen Koordinaten* nicht eindeutig; denn sie können mit einer beliebigen *komplexen Zahl* multipliziert werden.

Die komplexen „Gewichte" c_1, c_2, c_3 können auch in der Form

$$\begin{aligned} c_1 &= |\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2|\, e^{-\imath\,[2\varphi_{01}+\varphi_{23}]} \\ c_2 &= |\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3|\, e^{-\imath\,[2\varphi_{02}+\varphi_{31}]} \\ c_3 &= |\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1|\, e^{-\imath\,[2\varphi_{03}+\varphi_{12}]} \end{aligned} \tag{2.32}$$

geschrieben werden. Wenn $\mathbf{P}_1$ den Punkt „A" in einem Dreieck bezeichnet, so ist $|\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2|$ die gegenüber liegende Dreiecksseite „a". Aufgrund der Beziehung zwischen reellen baryzentrischen und reellen trilinearen Koordinaten kann man jetzt die drei komplexen zyklischen Zahlen

$$\{e^{-\imath\,(2\varphi_{01}+\varphi_{23})},\ e^{-\imath\,(2\varphi_{02}+\varphi_{31})},\ e^{-\imath\,(2\varphi_{03}+\varphi_{12})}\} \tag{2.33}$$

als die *komplexen trilinearen Koordinaten* des Punktes $\mathbf{P}_0$ der Snellius - Pothenotschen Aufgabe bezeichnen. Mit Hilfe des Sinussatzes im Dreieck $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ lassen sich die komplexen baryzentrischen Koordinaten auch in der Form

$$\begin{aligned} c_1 &= \sin[\varphi_{13} - \varphi_{12}]\, e^{-\imath\,(2\varphi_{01}+\varphi_{23})} \\ c_2 &= \sin[\varphi_{21} - \varphi_{23}]\, e^{-\imath\,(2\varphi_{02}+\varphi_{31})} \\ c_3 &= \sin[\varphi_{32} - \varphi_{31}]\, e^{-\imath\,(2\varphi_{03}+\varphi_{12})} \end{aligned} \tag{2.34}$$

schreiben. Die komplexen baryzentrischen Koordinaten können somit nur als Funktion der relevanten Winkel des Problems dargestellt werden. In der Figur (2.11) ist eine historische Aufgabe skizziert, die auch von BESSEL behandelt wurde.

Bekannt sind hier die komplexen Zahlen (Koordinaten; Längenskala „Toise" (1 Toise $\approx$ 1.949 m))

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= +471.2 + \ \ 955.3\imath, && \textit{Tourillion Notre Dame} \\ \mathbf{P}_2 &= \quad +0.2 + 2931.3\,\imath, && \textit{Pyramides Mont Martre} \\ \mathbf{P}_3 &= -904.0 + 1067.0\,\imath, && \textit{Invalidendom} \end{aligned}$$

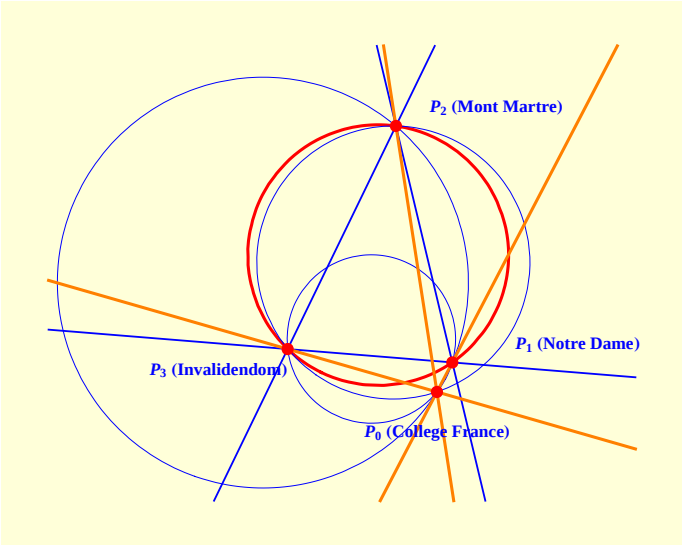


Abb. 2.11: *Beispiel für eine historische Snellius – Pothenotschen Aufgabe für drei vorgegebene Festpunkte in Paris um 1800.* $\mathbf{P}_0$ *ist der Punkt, von dem beobachtet wird. Die drei blauen Kreise sind die Cassini - Kreise, der Rote dagegen ist der „kritische“ Kreis (**circulus periculosus**), auf dem der Beobachtungspunkt* $\mathbf{P}_0$ *nicht liegen darf.*

Für die Richtungswinkel von $\mathbf{P}_0$, dem *Collège de France*[6], zu den drei Punkten in Paris ergaben sich die Messwerte

$$\begin{aligned} \varphi_{01} &= +\ 0^\circ\ \ 0'\ \ 0'' \\ \varphi_{02} &= +\ 36^\circ\ 16'\ 45'' \\ \varphi_{03} &= +101^\circ\ 28'\ 57'' \end{aligned}$$

Mit dem Peripheriewinkelsatz folgen dann die drei Winkelkreise nach Cassini, die schwach blau eingetragen sind. Der Punkt $\mathbf{P}_0$ des *„College de France“* ergibt sich mit (2.9) nun zu

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{342.7} + \mathbf{708.654}\,\imath, \tag{2.35}$$

[6]Der offizielle Auftrag des heutigen „Kolleg Frankreichs“ lautet: **Das Wissen in seiner Entstehung zu lehren (enseigner le savoir en train de se faire)**. Gegenüber dem Kolleg steht der 40 Meter hohe alte Beobachtungsturm des ehemaligen Observatoriums der Universität Sorbonne

relativ nah am „gefährlichen Kreis“, der rot markiert ist. Die Daten stammen von F.W. Bessel ([3]), der sie aber von J.K. Burckhardt (1773-1825) übernommen hat ([4]). Beide Autoren nehmen Positionen westlich des Pariser Meridians *positiv* - hier nehmen wir sie aber negativ. Für die Distanz vom *College de France* zum *Mont Martre* erhält Burckhardt **2248.88** Toise, in völliger Übereinstimmung mit unserer Rechnung. Die etwas kompliziertere Koordinaten – Rechnung von Bessel stimmt natürlich ebenfalls mit allen Dezimalen mit unserer Rechnung überein. Ein schönes Ergebnis.

Als weiteres historisches Beispiel möchte ich noch eine Situation nachrechnen, die sowohl Gauss als auch Gerling durchgerechnet haben. Es geht um die Messungen auf *Holkens Bastion zu Kopenhagen* (siehe ([16]), Seite 15). Wir haben die Koordinaten

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1 &= +2430.6 + \ \ 8335.0\imath, && \textit{Friedrichsberg}\\
\mathbf{P}_2 &= \quad +710.0 + 684.2\,\imath, && \textit{Frauenturm}\\
\mathbf{P}_3 &= +3059.3 - 2231.2\,\imath, && \textit{Friedrichsturm}
\end{aligned}$$

Für die entsprechenden Winkel gilt

$$\begin{aligned}
\varphi_{01} &= +\ \ 0^\circ\ \ 0'\ \ 0''\\
\varphi_{02} &= +\ 80^\circ\ 37'\ 11''\\
\varphi_{03} &= +181^\circ\ 48'\ 59''
\end{aligned}$$

Mit diesen Daten läßt sich leicht der Standort $\mathbf{P}_0$ der *„Bastion“* mit (2.9) zu

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{2836.47} + \mathbf{444.334}\,\imath, \tag{2.36}$$

berechnen. Gerling erhielt im Jahre 1840 mit seinen Logarithmentafeln das Resultat $x = \mathbf{2836.5}$, $y = \mathbf{444.4}$, in guter Übereinstimmung mit unserer *komplexen Zahlenrechnung*. Gauss ([10]) errechnete im Jahre 1822 im ersten Band der Astronomischen Nachrichten die Koordinaten der Holkensbastion mit einer direkten trigonometrischen Methode zu $x = \mathbf{2836.441}$, $y = \mathbf{444.330}$, was mit unserer Rechnung in komplexen Zahlen praktisch perfekt übereinstimmt.

In der Praxis des Vermessungswesens im 19. Jahrhundert sind die obigen sehr einfachen Formeln mit ihren komplexen Gewichten c_1, c_2, c_3 wohl nie bekannt gewesen und somit auch nicht benutzt worden. Es gibt aber

seit den 1930er Jahren eine „baryzentrische Formel“ für den Neupunkt $\mathbf{P}_0$, die nur mit *reellen Gewichten* g_1, g_2, g_3 auskommt. Diese alternative Bestimmungsformel, die aber der komplexen Koordinatenformel (2.9) mit ihren komplexen Zahlengewichten c_1, c_2, c_3 und ihrer mathematischen Einfachheit etwas unterlegen ist, stammt von dem niederländischen Geodäten J.M. Tienstra (1895-1951)[7]([31]) und lautet

$$\boxed{\mathbf{P}_0 = \frac{g_1\,\mathbf{P}_1 + g_2\,\mathbf{P}_2 + g_3\,\mathbf{P}_3}{g_1 + g_2 + g_3}} \tag{2.37}$$

mit

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{\cot(\varphi_{13} - \varphi_{12}) - \cot(\varphi_{03} - \varphi_{02})} \\ g_2 &= \frac{1}{\cot(\varphi_{21} - \varphi_{23}) - \cot(\varphi_{01} - \varphi_{03})} \\ g_3 &= \frac{1}{\cot(\varphi_{32} - \varphi_{31}) - \cot(\varphi_{02} - \varphi_{01})}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Auf eine Herleitung dieser Tienstra -Formeln soll hier verzichtet werden ([14]). Auch soll nicht näher auf eine Beziehung zwischen den c_1, c_2, c_3 und den g_1, g_2, g_3 eingegangen werden. Rechentechnisch ist aber klar, dass die komplexwertige Formel (2.9) der reellen Formel (2.37) überlegen ist. Denn bei den reellen baryzentrischen Gewichten müssen auch die Winkel $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{13}$ berechnet werden, was bei den komplexen Gewichten nicht nötig ist. In jedem Fall stellen die Proportionalitäten

$$\{g_1 \,:\, g_2 \,:\, g_3\} \tag{2.39}$$

die *reellen baryzentrischen Koordinaten* des Punktes $\mathbf{P}_0$ zu den „Festpunkten“ $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ dar. Durch eine trigonometrische Umformung erhält

[7] J.M. Tienstra (1895-1951) war Professor und Vize-Präsident der Universität für Technologie in Delft und Vorsitzender der Vermessungskommission

man leicht (ein gemeinsamer Faktor -1 hat keine Relevanz)

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\sin(\varphi_{13}-\varphi_{12})\,\sin(\varphi_{03}-\varphi_{02})}{\sin(\varphi_{13}-\varphi_{12}-\varphi_{03}+\varphi_{02})} \\ g_2 &= \frac{\sin(\varphi_{21}-\varphi_{23})\,\sin(\varphi_{01}-\varphi_{03})}{\sin(\varphi_{21}-\varphi_{23}-\varphi_{01}+\varphi_{03})} \\ g_3 &= \frac{\sin(\varphi_{32}-\varphi_{31})\,\sin(\varphi_{02}-\varphi_{01})}{\sin(\varphi_{32}-\varphi_{31}-\varphi_{02}+\varphi_{01})}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Die Vorzeichen der „Gewichte“ g_1, g_2, g_3 machen eine Aussage über die Lage des Punktes $\mathbf{P}_0$ bezüglich des Dreieckes $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$. Ist zum Beispiel g_2 negativ, die beiden anderen aber positiv, so liegt der Punkt $\mathbf{P}_0$ auf der anderen Seite der Geraden $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3$ als der Punkt $\mathbf{P}_2$. Nach der Geometrie der Lage ist es unmöglich, dass alle Vorzeichen der Gewichte negativ sind. Es können höchstens zwei „Gewichte“ negativ sein. Sind alle positiv, liegt $\mathbf{P}_0$ innerhalb des „Festpunktdreieckes“. Alternativ lässt sich (2.40) auch

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{|\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_2|\,\sin(\varphi_{03}-\varphi_{02})}{\sin(\varphi_{13}-\varphi_{12}-\varphi_{03}+\varphi_{02})} \\ g_2 &= \frac{|\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_3|\,\sin(\varphi_{01}-\varphi_{03})}{\sin(\varphi_{21}-\varphi_{23}-\varphi_{01}+\varphi_{03})} \\ g_3 &= \frac{|\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1)|\,\sin(\varphi_{02}-\varphi_{01})}{\sin(\varphi_{32}-\varphi_{31}-\varphi_{02}+\varphi_{01})} \end{aligned} \tag{2.41}$$

schreiben. Hier tritt die Beziehung zwischen baryzentrischen und trilinearen Koordinaten deutlich hervor.

Rotationsinvarianz: Die obige Formel besitzt bemerkenswerte Invarianzen bezüglich der Richtungen nach den drei Punkten $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$. Für einen beliebigen Winkel ϵ gilt zunächst die “Rotationsinvarianz“

$$\mathbf{P}_0\left(\varphi_{01}+\epsilon, \varphi_{02}+\epsilon, \varphi_{03}+\epsilon\right) = \mathbf{P}_0\left(\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}\right) \tag{2.42}$$

Diese Invarianz drückt die Tatsache aus, dass es nur auf die Differenz der Winkel, nicht auf ihre absolute Orientierung bezüglich eines Meridians ankommt. Die drei Winkel gehören gewissermaßen einer *virtuellen* Ebene an, die unabhängig von der Ebene ist, in der die drei Punkte $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ liegen.

Abb. 2.12: *Ein von C.F. Gauß benutzter Theodolit des Mechanikers Georg Friedrich Reichenbach aus München zur extrem genauen Messung von horizontalen Azimuthwinkel. (Bild: Alte Universitätssternwarte Göttingen)*

2.7 Die Methode der kleinsten Quadrate

Im Jahre 1822 veröffentlicht C.F. Gauss im ersten Band der Astronomischen Nachrichten eine spezielle geodätische Aufgabe, bei der von einem unbekannten Ort $\mathbf{P}_0$ in Kopenhagen fünf markante Punkte (meistens Kirchtürme) mit bekannten Koordinaten anvisiert wurden ([10]). Da drei bekannte Zielpunkte für die *Pothenotsche Aufgabe* völlig ausreichend sind, muss bei fünf Zielpunkten eine geeignete Methode der kleinsten Quadrate angewendet werden. Denn bei mehr als drei Punkten ist das Gleichungssystem überbestimmt und wir müssen eine geeignete Ausgleichsrechnung durchführen. Gauss schriebt zu Beginn:

> *Ihrem Wunsche zufolge*[8] *schicke ich ihnen die Vorschriften zur Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Aufgabe der praktischen Geometrie: die Lage eines Punktes aus den an demselben gemessenen horizontalen Winkeln zwi-*

[8] gemeint ist hier C. Schumacher

schen anderen Punkten von genau bekannter Lage zu finden. Der Gegenstand ist zwar ganz elementarisch, und jeder, der den Geist der Methode der kleinsten Quadrate kennt, kann sich die Vorschriften leicht selbst entwickeln..

Die Daten für das durchgerechnete Beispiel stammen aus Kopenhagen an der *Holkensbastion*, durchgeführt von dem Ingenieurskapitän von Carco. Für die Koordinaten der fünf markanten Türme war damals bekannt (Nullpunkt in der Sternwarte; Längeneinheit Pariser Fuß) Für die

Petri P_5	+487.7	+1007.7
Frauenturm P_2	+710.0	+ 684.2
Friedrichsberg P_1	+2430.6	+8335.0
Erlöserturm P_4	+2940.0	- 3536.0
Friedrichsturm P_3	+3059.3	- 2231.2

Tab. 2.1: *Koordinaten, von der Kopenhagener Sternwarte gerechnet, in Pariser Fuß. Die Nummerierung erfolgt am Horizont im positiven Drehsinn, also gegen den Uhrzeigersinn.*

beobachteten Winkel wurde damals angegeben (Bogensekunden gerundet) Durch Variation von $\mathbf{P}_0$ muss nun das Aggregat

Friedrichsberg - Petri	73°	35′	23″
Petri - Erlöserturm	104°	57′	33″
Erlöserturm - Friedrichsberg	181°	27′	5″
Friedrichsberg - Frauenturm	80°	37′	11″
Frauenturm - Friedrichsturm	101°	11′	51″
Friedrichsturm - Friedrichsberg	178°	11′	2″

Tab. 2.2: *Winkel auf Holkensbastion.*

$$\sum_{j,k} \left(\varphi_{j,k} - \arg \left[\frac{\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_0}{\mathbf{P}_j - \mathbf{P}_0} \right] \right)^2 \tag{2.43}$$

minimiert werden, wobei $\varphi_{j,k}$ den Winkel zwischen den *„Kirchtürmen“* $\mathbf{P}_j$ und $\mathbf{P}_k$ bezeichnet. Der Winkel liegt zwischen $-\pi$ und $+\pi$ und ist positiv, wenn $\mathbf{P}_k$ links von $\mathbf{P}_j$ liegt, negativ im umgekehrten Fall. Eine sehr gute erste Näherung liefert dabei die Formel (2.9) für drei zufällig ausgewählte

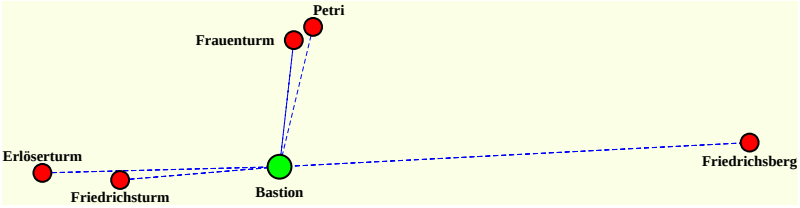


Abb. 2.13: *Die historischen Zielpunkte in Kopenhagen zu Beginn des 19ten Jahrhunderts. Norden ist rechts, Westen ist oben.*

Punkte. Das Verfahren funktioniert nur bei bekannten festgehaltenen Festpunkten. Nur der Neupunkt $\mathbf{P}_0$ wird variiert. Man erhält mit den obigen historischen Daten das Resultat

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{2836.38} + \mathbf{444.754}\,\imath \tag{2.44}$$

Gauss erhielt 1822 mit seiner Methode den wahrscheinlichsten Wert x = **2836.39**, y = **444.73**, in bester Übereinstimmung mit unserer Rechnung. Man stellt aber schnell fest, dass die Winkel-Residuen der nun berechneten Messwinkel im Bereich $7, -41, 38, -5, -38, 55$ Bogensekunden liegen, also wesentlich größer als die vermeidliche Messgenauigkeit von vielleicht nur einer Bogensekunde. Gauss vermutete damals als Ursache die ungenauen Koordinaten der Zielpunkte.

Im Frühjahr 1851 hielt Gauss vor wenigen Zuhörern eine Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate, in der auch die Pothenotsche Aufgabe behandelt wurde[9]. Einen authentischen Einblick in diese Lesung gab Richard Dedekind als einer der damaligen Zuhörer in einer Festschrift im Jahre 1901.([8])

2.8 Der unendlich ferne Punkt

Die wichtige Koordinatenformel (2.9) zur Lösung der Pothenotschen Aufgabe verliert ihren Sinn nicht, wenn einer der drei Punkte in die unendliche Ferne verschoben wird. Dies könnte ein sehr weit am Horizont sichtbarer Berg oder die gerade untergehende oder aufgehende Sonne

[9] Diese Information verdanke ich Herrn Jan Peter Schäfermeyer aus Berlin

sein. Wählen wir für diesen fernen Ort den mittleren Punkt $\mathbf{P}_2$ aus, so können wir für seine Koordinaten zunächst

$$\mathbf{P}_2 = \varrho\, e^{\imath\,\Theta}; \qquad \overline{\mathbf{P}}_2 = \varrho\, e^{-\imath\,\Theta} \tag{2.45}$$

setzen. Lassen wir nun die Entfernung ϱ des Punktes $\mathbf{P}_2$ vom Koordinatenursprung nach Unendlich gehen, so bedeutet der Winkel Θ das Azimut des unendlich fernen Punktes relativ zu der Verbindungsgerade der Punkte $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_3$ auf der Landkarte. Würde man hier zum Beispiel Winkel mit einem Kompass messen, so wäre Θ einfach die Richtung zum magnetischen Nordpol oder Südpol.

Wird also (2.45) in die Formel (2.9)

$$\mathbf{P}_0 = \frac{c_1\,\mathbf{P}_1 + c_2\,\mathbf{P}_2 + c_3\,\mathbf{P}_3}{c_1 + c_2 + c_3} \tag{2.46}$$

eingesetzt und eine *Laurent* - Entwicklung um den unendlich fernen Punkt $\varrho \to \infty$ durchgeführt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 \quad = \quad & \frac{e^{-2\imath\,\varphi_{01}}\,\mathbf{P}_1 - e^{-2\imath\,\varphi_{03}}\,\mathbf{P}_3}{e^{-2\imath\,\varphi_{01}} - e^{-2\imath\,\varphi_{03}}} + \\ & \frac{e^{2\imath\,(\Theta-\varphi_{02})}}{e^{-2\imath\,\varphi_{01}} - e^{-2\imath\,\varphi_{03}}}\,(\overline{\mathbf{P}}_3 - \overline{\mathbf{P}}_1). \end{aligned} \tag{2.47}$$

Auch hier sieht man, dass die Winkel φ_{01}, φ_{02}, und φ_{03} einer virtuellen Ebene angehören, in der wir jedem Winkel einen konstanten Betrag hinzufügen dürfen, ohne das Endresultat zu verändern. Die Richtung Θ ist dagegen durch die Orientierung auf der Landkarte festliegt.

2.9 Das topologische Kriterium

Eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft der Formeln (2.9) oder (2.37) ist ihre „Zweideutigkeit“ der Beobachtungsrichtungen zu den Punkten $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ von dem Neupunkt $\mathbf{P}_0$. Die Koordinaten des Punktes $\mathbf{P}_0$ ändern sich nicht, wenn man anstatt der Richtungswinkel $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ und φ_{03} die umgekehrten Richtungen $\varphi_{01} \pm 180°, \varphi_{02} \pm 180°$ und $\varphi_{03} \pm 180°$ einsetzt. *Die baryzentrischen Formeln unterscheiden also nicht, ob sich die Photonen von den drei bekannten Positionen zum Beobachter hin oder*

sich in umgekehrter Richtung vom Beobachter zu den drei Messpunkten hin bewegen. Es gelten also die Invarianzen

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_0(\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}) &= \mathbf{P}_0(\varphi_{01} \pm \pi, \varphi_{02}, \varphi_{03}) \\
\mathbf{P}_0(\varphi_{01} \pm \pi, \varphi_{02}, \varphi_{03}) &= \mathbf{P}_0(\varphi_{01}, \varphi_{02} \pm \pi, \varphi_{03}) \\
\mathbf{P}_0(\varphi_{01}, \varphi_{02} \pm \pi, \varphi_{03}) &= \mathbf{P}_0(\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03} \pm \pi) \\
\mathbf{P}_0(\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03} \pm \pi) &= \mathbf{P}_0(\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}). \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

Für alle vier möglichen Fälle von Winkeltripletts liefert die Formel ein identisches $\mathbf{P}_0$, aber nur **eine** Kombination ist auch **optisch möglich**. *Die Aufgabe von Pothenot ist somit nicht nur ein geometrisches, sondern auch ein topologisches Problem.* Ist zum Beispiel $P_0(\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03})$ eine physisch unmögliche Lösung, so müssen entweder ein oder zwei Winkel ihre Orientierung um 180 Grad ändern, um eine mögliche zu erhalten. Aufgrund der Richtungsinvarianz gilt nämlich

$$\mathbf{P}_0(\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}) = \mathbf{P}_0(\varphi_{01} \pm \pi, \varphi_{02} \pm \pi, \varphi_{03} \pm \pi)$$

Von vorgegebenen Winkelazimuten $\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}$ *mit zufälligen Umkehrfehlern* $\pm\pi$ der Snellius - Pothenotschen Aufgabe sind also statistisch nur 1/4 wirklich real möglich, obwohl Formel (2.9) immer denselben Punkt $\mathbf{P}_0$ liefert. Es gibt also dreimal so viel unmögliche als mögliche Fälle. Gauss drückt diese eigenartige "Zweideutigkeit der Richtungen" in dem Brief an Gerling[10] vom 24. Oktober 1840 so aus:([13])

> *...Ihre kleine Schrift über die Pothenotsche Aufgabe habe ich mit Vergnügen gelesen; sie wird allen, die die Aufgabe praktisch anwenden wollen, sehr lehrreich und nützlich sein. Ich habe mich aber oft gewundert, dass die vielen Schriftsteller, die sich damit beschäftigt haben, einen in theoretischer Beziehung ganz wesentlichen Theil ganz übergangen haben, nemlich die Aufgabe der mathematischen Bedingungen, unter denen die Aufgabe physisch möglich ist, und die Darstellung dieser Bedingungen in einer einfachen eleganten Form. Ich mache mich wohl auf folgende Art am leichtesten verständlich...*

[10] Ludwig Christian Gerling (1788-1864), Schüler von Gauß, Professor für Mathematik und Physik in Marburg, gab 1840 eine Schrift heraus: *Die Pothenotsche Aufgabe in praktischer Beziehung*; Marburg 1840 ([16])

...Der metaphysische Grund dieser Erscheinung ist, daß man von der beobachteten Richtung weiter nichts benutzt, als das die geraden Linien gewisse Winkel miteinander machen, indem man diese geraden Linien auf beiden Seiten in indefinitum sich erstrecken läßt, während das Fortschreiten des Lichtes nur in einem bestimmten Sinne geschieht, also die Fälle, wo der Gegenstand rückwärts läge, ausgeschlossen werden müssen.

Gauß leitet ein relativ einfaches trigonometrisches Winkel-Kriterium ab, um entscheiden zu können, ob die Daten optisch möglich sind.

Das Gaußsche Kriterium beruht auf einem Winkelsatz im Viereck und besagt, daß die drei Größen

$$\begin{aligned} &\sin[\varphi_{13} - \varphi_{12} - \varphi_{03} + \varphi_{02}]; \\ &\sin[\varphi_{21} - \varphi_{23} - \varphi_{01} + \varphi_{03}]; \\ &\sin[\varphi_{32} - \varphi_{31} - \varphi_{02} + \varphi_{01}]; \end{aligned} \tag{2.49}$$

gleiche Vorzeichen haben müssen, damit die Daten der Snellius-Pothenotschen Aufgabe optisch möglich sind. Diese Sinus-Funktionen sind genau die Faktoren, die im Nenner der Gewichte g_1, g_2, g_3 der Formeln (2.40) stehen. Die Winkel φ_{ij} sind wieder durch (2.3) definiert. Gauss beweist dieses Kriterium, indem er in der komplexen Ebene das Viereck $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ auf ein Dreieck $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3$ „rekurriert“, zum Beispiel durch die Formeln

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{P}_0\,\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2\,\mathbf{P}_3 \\ \mathbf{Q}_2 &= \mathbf{P}_0\,\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3\,\mathbf{P}_1 \\ \mathbf{Q}_3 &= \mathbf{P}_0\,\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_1\,\mathbf{P}_2. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Motiviert wird diese Substitution wohl durch die Formeln (2.8), wo ja die rechte Seite bei Addition Null ergibt. Denn man leitet jetzt für die komplexen Zeiger der Seiten des Dreieckes

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_3 &= (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0)(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2) \\ \mathbf{Q}_3 - \mathbf{Q}_1 &= (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3) \\ \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2 &= (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_0)(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \end{aligned} \tag{2.51}$$

ab, was die konjugierten Größen der rechten Seite der Gleichungen (2.8)

sind. Alternativ gilt auch die Darstellung

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_3 &= |\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0||\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2|\, e^{\imath\,(\varphi_{01}+\varphi_{23})} \\
\mathbf{Q}_3 - \mathbf{Q}_1 &= |\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0||\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_3|\, e^{\imath\,(\varphi_{02}+\varphi_{31})} \\
\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_2 &= |\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_0||\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1|\, e^{\imath\,(\varphi_{03}+\varphi_{12})}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Die drei komplexen Zeiger der Seiten eines Dreieckes müssen aber als Rechtsschraube oder Linksschraube einen schließbaren Polygonzug bilden, woraus aber folgt, dass die drei Richtungswinkel der Seiten des Dreieckes mehr als einen Halbkreis überstreichen müssen. In einem Brief an GERLING vom 14. Januar 1842 spricht GAUSS dieses „zierliche“ Kriterium für die physische Möglichkeit der Daten so aus: *Die Data sind* ***unverträglich****, wenn die drei Kreispunkte, die auf der Peripherie eines Kreises von Einerlei Anfangspunkt, in Einerlei Sinn positiv gezählt, um*

$$\varphi_{01} + \varphi_{23},\ \varphi_{02} + \varphi_{31},\ \varphi_{03} + \varphi_{12}, \tag{2.53}$$

abstehen, innerhalb eines Halbkreises liegen; oder: damit die Data ***verträglich*** *sein sollen, müssen diese drei Punkte wenigsten einen vollen Halbkreis umfassen.* Liegen zwei Punkte genau gegenüber, ist die Aufgabe unbestimmt (2.14). Alternativ können wir auch sagen, dass die drei Zeiger

$$e^{\imath\,[\varphi_{01}+\varphi_{23}]},\ e^{\imath\,[\varphi_{02}+\varphi_{31}]},\ e^{\imath\,[\varphi_{03}+\varphi_{12}]}, \tag{2.54}$$

in allen drei zyklischen Permutationen mehr als eine halbkreisförmige Fächerscheibe aufspannen müssen, um physisch realen Beobachtungsdaten zu entsprechen.[11] Das “Sinus“ - Kriterium der *optischen Möglichkeit* der Pothenot'schen Aufgabe folgt dann mit Hilfe des Sinussatzes in dem *rekurrierten Dreieck* $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3$. Beim Ableiten der Innenwinkel dieses Dreieckes können wir nach der Definition (2.3) für orientierte Winkel die Relation

$$\varphi_{k\,j} - \varphi_{j\,k} = (2n+1)\,\pi, \quad n = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \tag{2.55}$$

beachten und benutzen. Im Einzelnen ergeben sich so für die Innenwinkel des *rekurrierten Dreieckes*

$$\begin{aligned}
\angle\mathbf{Q_1} &: \quad \varphi_{13} - \varphi_{12} - \varphi_{03} + \varphi_{02}; \\
\angle\mathbf{Q_2} &: \quad \varphi_{21} - \varphi_{23} - \varphi_{01} + \varphi_{03}; \qquad \mathrm{mod}\ \pm\pi \\
\angle\mathbf{Q_3} &: \quad \varphi_{32} - \varphi_{31} - \varphi_{02} + \varphi_{01}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

[11] Auf eine verbesserte grafische Darstellung des Kriteriums hat mich freundlicherweise Herr Wolfram Neutsch hingewiesen.

Auch die von Gauss angegebene Wahrscheinlichkeit für die unmöglichen Fälle wird jetzt mit Fig. (2.14) erneut klar. Die Wahrscheinlichkeit, dass drei zufällig gewählte Punkte auf einem Kreis innerhalb eines Halbkreises liegen, beträgt genau 3/4.

Betrachtet man nämlich von den *drei Punkten* den Ersten, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden anderen Punkte auf dem gleichen Halbkreisbogen liegen, genau $1/2 * 1/2 = 1/4$. Da aber von der Perspektive der anderen zwei Punkte die gleiche Überlegung gilt - es also die **- oder -** Verknüpfung gilt, addieren sich die drei Wahrscheinlichkeiten von 1/4 zu der Gesamtwahrscheinlichkeit 3/4 für diese spezielle Realisierung. Die gleichen Überlegungen kann man - ganz nebenbei - auch für N zufällige Punkte auf einem Kreisbogen anstellen und nach der Wahrscheinlichkeit $p[N]$ fragen, mit der sie alle innerhalb eines Halbkreisbogens zum Liegen kommen. Das Ergebnis lautet

$$p[N] = \frac{N}{2^{N-1}}.$$

Damit gilt zum Beispiel $p[1] = 1$, $p[2] = 1$, $p[3] = 3/4$, $p[4] = 1/2$... Die Überlegungen kann man auf eine beliebige *n-dimensionale Hypersphäre* erweitern und fragen, mit welcher Wahrscheinlichkeit $p[n, N]$ genau N Punkte auf einer „n-dimensionalen Halbkugel“ konzentriert sind. Die Antwort ist Wendels Theorem[12]

$$p[n, N] = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{N-1}{k}.$$

Für den dreidimensionalen Fall $n = 3$ folgt so

$$p[3, N] = \frac{N(N-1) + 2}{2^N}.$$

Daraus folgt $p[3, 1] = 1$, $p[3, 2] = 1$, $p[3, 3] = 1$, $p[3, 4] = 7/8$...

Doch zurück zum Pothenotschen Problem. Ein interessanter Sonderfall ergibt sich für das rekurrierte Dreieck, wenn die drei Festpunkte $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ ein gleichseitiges Dreieck bilden. Setzen wir zum Beispiel auf dem komplexen Einheitskreis

$$\mathbf{P}_1 = 1; \qquad \mathbf{P}_2 = e^{2\pi\imath/3}; \qquad \mathbf{P}_3 = e^{-2\pi\imath/3},$$

[12] Wendel, J.G. (1962) : A Problem in Geometric Probability. Math. Scand. **11**, 109-111

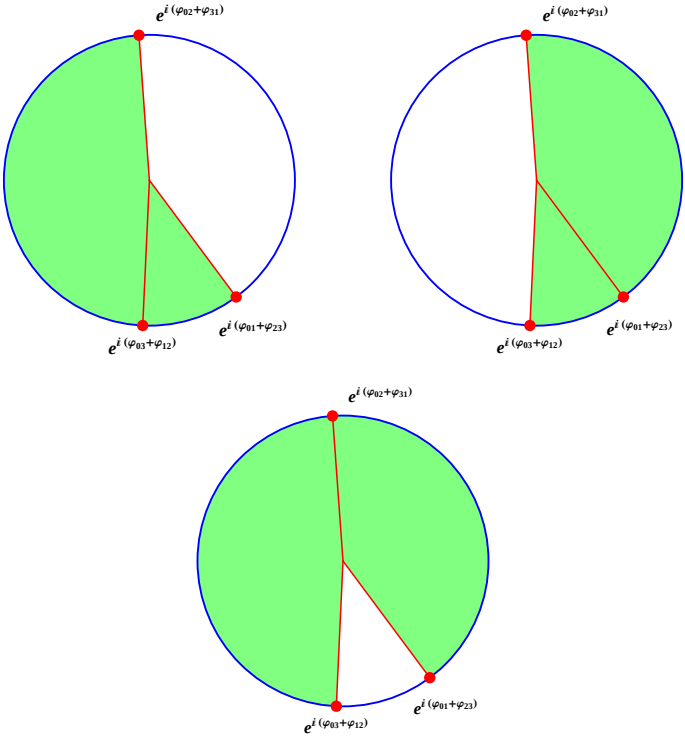


Abb. 2.14: *Veranschaulichung des Gaußschen Kriteriums für die physische Möglichkeit der Snellius – Pothenot'schen Aufgabe für den Fall, den Bessel 1813 untersucht hat. Dabei müssen die drei komplexen Zeiger (2.54), hier durch rote Punkte markiert, in allen drei zyklischen Permutationen mehr als einen vollen Halbkreisbogen umfassen, damit die Daten einer physischen Realität entsprechen können. Die Richtungen sind nicht verträglich, wenn die drei Punkte innerhalb eines Halbkreisbogens konzentriert sind. Deutlich ist zu erkennen, dass eine Spiegelung irgendeines der drei Kreispunkte am Kreismittelpunkt sofort die physische Unmöglichkeit der Situation offenbart.*

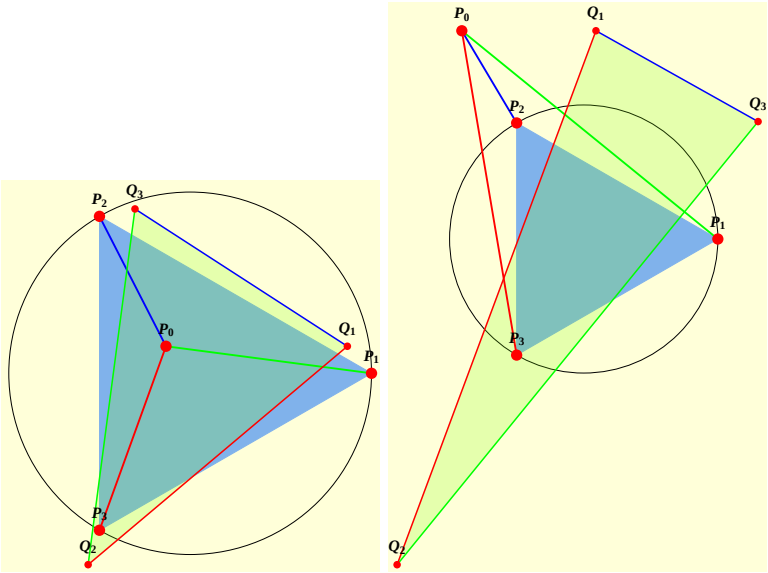


Abb. 2.15: *Beispiel für ein rekurriertes Dreieck bei einem gleichseitigen Festpunktdreieck, wenn der Punkt* $\mathbf{P}_0$ *einmal innerhalb und einmal außerhalb des Umkreises zum Liegen kommt.*

so erhalten wir für das rekurrierte Dreieck

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_1 &= \mathbf{P}_0 + 1 \\
\mathbf{Q}_2 &= e^{+2\pi\,\imath/3}\,\mathbf{P}_0 + e^{-2\pi\,\imath/3} \\
\mathbf{Q}_3 &= e^{-2\pi\,\imath/3}\,\mathbf{P}_0 + e^{+2\pi\,\imath/3}.
\end{aligned}$$

Man muss nun zwei Fälle unterscheiden, je nachdem der Punkt $\mathbf{P}_0$ außerhalb oder innerhalb des Umkreises von $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ liegt.

Außerhalb des Umkreises: Die Innenwinkel des rekurrierten Dreieckes lauten dann

$$\begin{aligned} \angle\mathbf{Q_1} &: \frac{\pi}{3} - (\varphi_{03} - \varphi_{02}); \\ \angle\mathbf{Q_2} &: \frac{\pi}{3} + (\varphi_{03} - \varphi_{01}); \qquad \bmod \pi \\ \angle\mathbf{Q_3} &: \frac{\pi}{3} - (\varphi_{02} - \varphi_{01}). \end{aligned} \tag{2.57}$$

Innerhalb des Umkreises: Die Innenwinkel des rekurrierten Dreieckes lauten dann

$$\begin{aligned} \angle\mathbf{Q_1} &: (\varphi_{03} - \varphi_{02}) - \frac{\pi}{3}; \\ \angle\mathbf{Q_2} &: \frac{5\,\pi}{3} - (\varphi_{03} - \varphi_{01}); \qquad \bmod \pi \\ \angle\mathbf{Q_3} &: (\varphi_{02} - \varphi_{01}) - \frac{\pi}{3}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Die Seiten des rekurrierten Dreieckes sind nach (2.52) das $\sqrt{3}$ - fache der jeweiligen Distanzen des Punktes $\mathbf{P}_0$ von den drei Festpunkten $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$.

Historisch bleibt noch anzumerken, daß ein Schüler von C.F. Gauss, Gottfried Wagener (1831-1892), eine Dissertation zu dem Problem der physischen Möglichkeiten der Aufgabenstellung 1852 abgefasst hat ([32]). Hier findet man auch genauere Informationen zu den unterschiedlichen geometrischen Lösungen des 17. und 18. Jahrhunderts. Eine Zusammenfassung der verschiedenen geometrischen und mechanischen Methoden findet man auch bei M. Bauernfeind ([1], [2]). Die unterschiedlichen Kriterien sind aber wohl im späten 19. wie im 20. Jahrhundert der Vergessenheit anheim gefallen.

Die Figur (2.16) zeigt einen sogenannten *Three-armed Protractor* für die küstennahe Navigation, der nichts Anderes als ein Analogrechner für die direkte Auflösung der Snellius-Pothenotschen Aufgabe auf einer Landkarte ist. Erfunden oder konstruiert hat dieses Instrument der englische Kapitän, Ingenieur und Hydrograph Joseph Huddart (1741-1816). Man konnte mit diesem Gerät die zwei gemessenen Winkel zwischen drei Landmarken an der Küste direkt in dem Gerät einstellen und durch fixieren von zwei Armen an zwei Festpunkten den dritten Festpunkt durch den

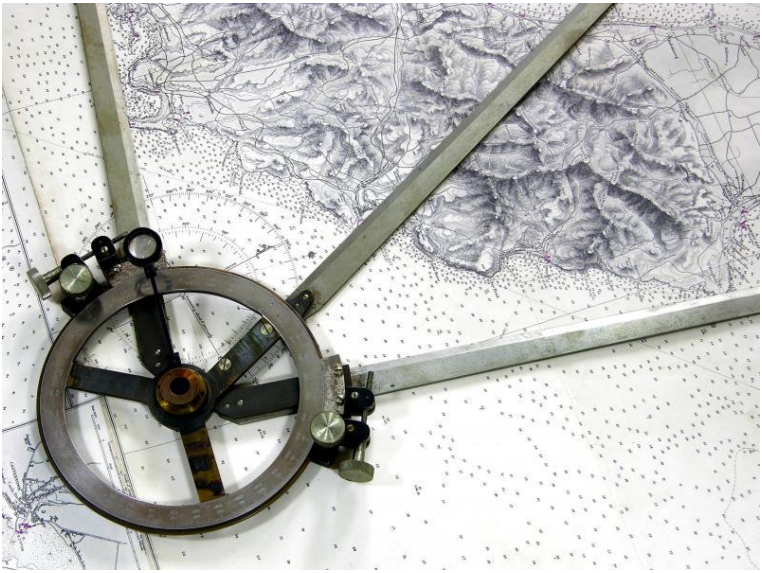


Abb. 2.16: *Ein sogenannter „three-armed protractor“ (station pointer) als Analogrechner für die küstennahe Navigation, erfunden im Jahre 1801 von dem britischen Kapitän J. Huddart (1741-1816). Geräte dieser Art waren noch bis in die 1960er Jahre in Gebrauch. (Quelle: The 20th Century Kelvin Hughes & Son Station Pointer (1942)*

dritten Arm angleichen. Die Position des Schiffes konnte dann direkt mit einer Lupe im Zentrum auf der Karte eingetragen werden. Das Instrument war wohl die Bilanz seiner Erfahrungen, die er bei den Vermessungen zur Verbesserung der Küstenverläufe von Indien und Sumatra gesammelt hatte.

2.10 Das Problem von Fermat

Bis jetzt haben wir das Snellius-Pothenotsche Problem als ein reines Standortproblem behandelt, bei dem zwei gerichtete Referenzwinkel gemessen werden und man den eigenen Standort in Bezug zu den drei bekannten Punkten angeben will. Doch es gibt auch eine Aufgabenstellung im Rahmen einer speziellen *Distanz - Optimierung*, bei der die drei

orientierten Azimuthwinkel selber aus einer Theorie folgen. Um das Jahr 1640 schrieb der französische Jurist und Mathematiker P. DE FERMAT eine Reihe von Schriften über Minima und Maxima, die auch Probleme der Physik betrafen (Brechungsgesetz). Doch ein spezielles geometrisches Problem betraf einen Punkt innerhalb eines Dreieckes, von dem die Summe der Abstände zu den drei Eckpunkten ein Minimum sein soll. Im Original heißt es

> *Datis tribus punctis, quartum reperire, a quo si ducantur tres rectae ad data puncta,summa trium harum rectarum sit minima quantitas*

Dieses Minimumproblem erlebte Mitte des 17ten Jahrhunderts bei italienischen Mathematikern einiges Interesse. So lieferte V. VIVIANI (1622-1703), E. TORRICELLI (1608 - 1647) und B. CAVALIERI (1598 - 1647) eigene geometrische Lösungen.

Definieren wir in der Ebene die Euklidische Distanz $d[\mathbf{P}_k, \mathbf{P}_0]$ zwischen dem gesuchten Punkt $\mathbf{P}_0$ und einem der drei Punkte als

$$d[\mathbf{P}_k, \mathbf{P}_0] = \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2},$$

so ist die Distanzsumme zu den drei Standorten durch

$$d = d[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0] + d[\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_0] + d[\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_0] \tag{2.59}$$

gegeben. Das Minimum dieser Funktion rein numerisch zu finden, bietet heutzutage keine größeren Schwierigkeiten[13]. Doch uns interessiert hier auch die analytische Lösung, zumal drei Festpunkte der einfachste Fall ist. Durch Differenzieren nach x_0 und y_0 ergeben sich für ein Extremum die notwendigen Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - x_0}{d[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0]} + \frac{x_2 - x_0}{d[\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_0]} + \frac{x_3 - x_0}{d[\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_0]} &= 0, \\ \frac{y_1 - y_0}{d[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_0]} + \frac{y_2 - y_0}{d[\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_0]} + \frac{y_3 - y_0}{d[\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_0]} &= 0. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die zweite Gleichung wieder mit der imaginären Einheit $\imath$ und addieren diese zur ersten, so erhalten wir die Bedingung

$$\frac{\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0}{|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0|} + \frac{\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0}{|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0|} + \frac{\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_0}{|\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_0|} = 0, \tag{2.60}$$

[13] z.B. die routine FindMinimum in Mathematica

bei der jetzt die Lage der $\mathbf{P}_k$ wiederum als komplexe Zahlen erscheinen. Doch diese notwendige Bedingung kann wegen der Definition (2.2) sofort in die Winkelbedingung

$$\boxed{e^{\imath\,\varphi_{01}} + e^{\imath\,\varphi_{02}} + e^{\imath\,\varphi_{03}} = 0} \tag{2.61}$$

für die Azimuthwinkel φ_{0k} der drei Festpunkte, wie sie vom gesuchten *optimalen Standort* $\mathbf{P}_0$ aus zu sehen sind, umgeschrieben werden. Aus dieser komplexen Gleichung wird sofort klar, dass die drei Winkel untereinander einen Bogen von 120° bilden müssen. Es gilt somit

$$1 + e^{2\pi\,\imath/3} + e^{4\pi\,\imath/3} = 0. \tag{2.62}$$

Mit den Abkürzungen

$$c_1 = \overline{\mathbf{P}}_3 - \overline{\mathbf{P}}_2, \;\; c_2 = e^{2\pi\imath/3}\,(\overline{\mathbf{P}}_1 - \overline{\mathbf{P}}_3), \;\; c_3 = e^{4\pi\imath/3}\,(\overline{\mathbf{P}}_2 - \overline{\mathbf{P}}_1)$$

folgt für die Lage des *Torricelli - Fermat* -Punktes

$$\mathbf{P}_0 = \frac{c_1\,\mathbf{P}_1 + c_2\,\mathbf{P}_2 + c_3\,\mathbf{P}_3}{c_1 + c_2 + c_3}.$$

Dies ist ein schöner Spezialfall der *Snellius-Pothenotschen Aufgabe*, wo am Standort $\mathbf{F}$ die Punkte $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ und $\mathbf{P}_3$ am Horizont in einem 120 Grad Abstand zueinander erscheinen. Die wichtige Voraussetzung besteht darin, dass alle Innenwinkel des Festpunktdreieckes kleiner 120° sein müssen. Das Minimierungsproblem kann schließlich durch unterschiedliche Gewichtungen der drei Distanzen verallgemeinert werden. Mit den Gewichtsfaktoren w_1, w_2 und w_3 lautet dann die notwendige extremale Winkelbeziehung

$$w_1\,e^{\imath\,\varphi_{01}} + w_2\,e^{\imath\,\varphi_{02}} + w_3\,e^{\imath\,\varphi_{03}} = 0 \tag{2.63}$$

Da wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit φ_{01} Null setzen können, reduziert sich die obige Gleichung auf die Bestimmung der zwei unbekannten Azimuthwinkel φ_{02} und φ_{03}. Es gelten dann die zwei konjugiert komplexen Gleichungen

$$\begin{aligned} w_1 + w_2\,e^{+\imath\,\varphi_{02}} + w_3\,e^{+\imath\,\varphi_{03}} &= 0, \\ w_1 + w_2\,e^{-\imath\,\varphi_{02}} + w_3\,e^{-\imath\,\varphi_{03}} &= 0. \end{aligned}$$

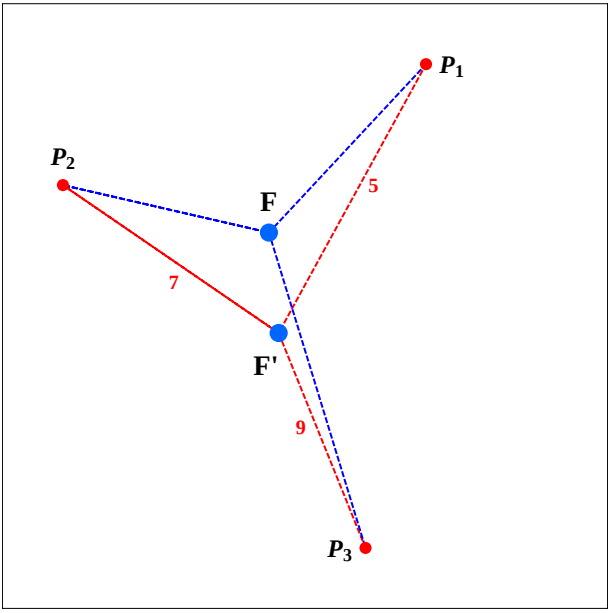


Abb. 2.17: *Die blauen Linien führen hier zum klassischen Fermatpunkt* **F**, *bei dem die Summe der Strecken zu den Festpunkten minimal ist. Hier bilden die Strecken unter sich einen Winkel von* $120°$. *Die roten Linien entsprechen einem modifizierten „Fermatpunkt“* **F′**, *bei dem eine Gewichtung der Entfernungen in der Form 5:7:9 stattfindet und die Winkel am Knotenpunkt* **F′** *unter sich nicht mehr gleich sind. Nach P.* DE VARIGNON *(1654-1722) läßt sich in physikalischer Analogie (Energieminimierung) mit an* **F** *verknoteten Fäden, die durch Löcher an den Festpunkten mit entsprechenden Gewichten nach unten hängen, der optimale Standort leicht finden.*

Daraus ergeben sich mit der Diskriminanten

$$\begin{aligned} D &= 4\,w_1^2\,w_2^2 - (w_1^2 + w_2^2 - w_3^2)^2, \\ &= (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)^2 - 2\,\left(w_1^4 + w_2^4 + w_3^4\right). \end{aligned}$$

die beiden Azimuthwinkel

$$
\begin{aligned}
e^{\imath\,\varphi_{02}} &= \frac{-w_1^2 - w_2^2 + w_3^2 + \imath\sqrt{D}}{2\,w_1\,w_2}, \\
e^{\imath\,\varphi_{03}} &= \frac{-w_1^2 + w_2^2 - w_3^2 - \imath\sqrt{D}}{2\,w_1\,w_3}.
\end{aligned}
$$

Mit den beiden bekannten Winkeln läßt sich dann leicht die Lage des optimalen Standortes berechnen. Die mathematische Form der Diskriminanten zeigt, dass wir neben dem Festpunktdreieck auch ein *Gewichtsdreieck* mit den positiven Seiten w_1, w_2 und w_3 definieren können. Die Diskriminante stellt so das 16 fache des Quadrates der „Fläche“ des so definierten Gewichtsdreieckes dar. Die Lösung verliert spätestens dann ihren Sinn, wenn die Dreiecksungleichungen verletzt werden (z.B. $w_1 = 2$, $w_2 = w_3 = 1$). Doch die Ausnahmefälle setzten bei ungleichen Gewichten - je nach Lage der Punkte - schon viel früher ein. Dies hat der österreichische Mathematiker G. Pick im Anhang der zweiten Auflage des Werkes *Über den Standort von Industrien* (1909/1922) des Nationalökonomen A. Weber geometrisch auseinandergesetzt ([33]).

2.11 Das Gaussche Problem des kürzesten Netzwerkes

Am 19. März 1836 beschäftigte sich ganz beiläufig der Astronom H.C. Schumacher (1780-1850) in einem Brief an den Mathematiker Gauss mit dem Problem, vier Punkte in der euklidischen Ebene so durch einen fünften Punkt zu verbinden, dass die Summe der Distanzen ein Minimum wird. Motiviert war diese Problemstellung wohl hauptsächlich durch die Planung von Gleisstrecken durch die neu aufkommende Eisenbahn. Die naive Lösung für den fünften Punkt ist der Schnittpunkt von zwei Diagonalen. Diese Lösung liefert aber nicht unbedingt ein minimales Netzwerk, denn liegen die vier Punkte ungefähr in einer geraden Linie, so ist ein einfacher *Spannbaum* das bessere Wegenetz. Schumacher sah zudem ein Paradoxon im Diagonalschnitt, wenn zwei Punkte im Viereck zu einem verschmelzen und der Diagonalpunkt dann in diesem „Zwillingspunkt“ läge. Doch seit Fermat wisse man doch, dass im Falle von nur drei Punkten der Fermatpunkt das optimale Netz definiert.

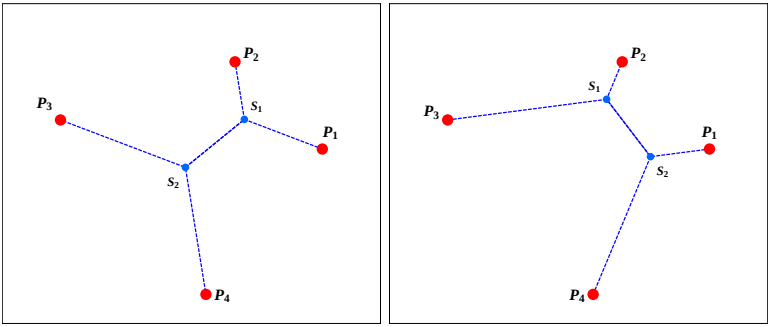


Abb. 2.18: *Zwei mögliche Steinerbäume für die Punkte* $P_1 = 10 + \imath, P_2 = 7 + 4\imath, P_3 = 1 + 2\imath, P_4 = 6 - 4\imath$ *mit je zwei zusätzlichen Knoten* S_1 *und* S_2 *zwischen den vorgegebenen Punkten. Im linken Bild hat das Netzwerk die Länge 16.5057..., im rechten Bild 16.5662... Die Schumacher'schen Diagonalen hätten dagegen die Gesamtlänge 17.1176...*

Gauss antwortete ihm dann im Brief vom 21. März 1836 mit den Worten *...so erfordert Geist und Buchstabe der mathematischen Aufgabe, als solcher, dass sie dann zweimal zählen , ...wo sich die allgemeine Auflösung noch immer als richtig ausweiset...* Gauss sieht aber dann die Aufgabenstellung zu eng und führt weiter aus:

> *Ist bei einem 4 Eck nicht von der strickten mathematischen Aufgabe, wie sie oben ausgesprochen wird, sondern von dem kürzesten Verbindungssystem die Rede, so werden mehrere einzelne Fälle von einander unterschieden werden müssen, und es bildet sich so eine recht interessante mathematische Aufgabe, die mir nicht fremd ist, vielmehr habe ich bei Gelegenheit einer Eisenbahnverbindung zwischen Harburg, Bremen, Hannover, Braunschweig sie in Erwägung genommen und bin selbst auf den Gedanken gekommen, dass sie eine ganz schickliche Preisfrage für unsere Studenten bei Gelegenheit abgeben könnte. Die Möglichkeit verschiedener Fälle erläutern wohl hinreichend folgende Figuren...*

Die von Gauss angesprochenen Figuren entsprechen den zwei Abbildungen (2.18), bei denen der *Steiner-Baum* [14] links etwas kürzer als der

[14] Historisch wäre aufgrund des Briefes von 1836 die Bezeichnung Gauss-Baum für

Steinerbaum rechts ist.

Leider hat GAUSS dieses Problem des minimalen Netzwerkes zwischen vier Festpunkten niemals als Preisaufgabe an der Universität Göttingen präsentiert. Für uns soll das hier Motivation sein, dieses *Gauss'sche Problem* für die zwei Knotenpunkte $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ eines Netzwerkes aus vier Festpunkten zumindest rein formal zu lösen. Nach der Abb. (2.18) ist klar, dass die Lage der zusätzlich eingeschalteten Knotenpunkte im Netzwerk durch zwei gekoppelte Pothenotsche Aufgaben bestimmt werden. Die wichtige Formel ist hier wieder (2.9). Um die Lösungformeln übersichtlich auszudrücken, führen wir mit der Abkürzung

$$\eta = e^{2\,\pi\,\imath/3}, \qquad 1 + \eta + \eta^2 = 0, \qquad \eta^3 = 1, \tag{2.64}$$

die komplexe Zahl

$$\mathbf{C} = (2 + \eta)(\overline{\mathbf{P}}_4 - \overline{\mathbf{P}}_2) + (1 + 2\,\eta)(\overline{\mathbf{P}}_1 - \overline{\mathbf{P}}_3) \tag{2.65}$$

ein. Wir setzen als Bedingung $\mathbf{C} \neq 0$ voraus. Mit den beiden Hilfsgrößen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \quad = \quad & (\mathbf{P}_4 + (\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3)\,\eta)\,\overline{\mathbf{P}}_1 - (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_3\,\eta)\,\overline{\mathbf{P}}_2 - \\ & (\mathbf{P}_2 + (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)\,\eta)\,\overline{\mathbf{P}}_3 + (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_1\,\eta)\,\overline{\mathbf{P}}_4 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \quad = \quad & (\mathbf{P}_4 + (\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4)\,\eta)\,\overline{\mathbf{P}}_1 - (\mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 + \mathbf{P}_3\,\eta)\,\overline{\mathbf{P}}_2 - \\ & (\mathbf{P}_2 + (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_4)\,\eta)\,\overline{\mathbf{P}}_3 + (\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_1\,\eta)\,\overline{\mathbf{P}}_4 \end{aligned}$$

folgt für die beiden Knotenpunkte

$$\mathbf{S}_1 = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}}; \qquad \mathbf{S}_2 = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}. \tag{2.66}$$

Durch eine zyklische Permutation der Indizes an $\mathbf{P}$ ergibt sich auch das alternative Netzwerk. Optimal im lokalen Sinne ist dieses gefundene Netzwerk aber nur, wenn zu den beiden Knotenpunkten die „*Pipelines*“ einen Winkel von 120° zu einander machen. Bilden sie dagegen ein Winkeltriplett von 60°/60°/240°, dann ist das gefundene Netzwerk nicht optimal und eine oder mehrere Verbindungen müssen direkt gehen. Das Schwierige an der Aufgabe ist, dass man einerseits festlegen muss, wie

diese speziellen Netzwerke gerechtfertigt.

viele Knotenpunkte $\mathbf{S}_i$ einzuführen sind und andererseits, wie diese mit den gegebenen Punkten zu verbinden sind. Bei sehr großen Netzwerken mit vielen Punkten ist das Problem nur noch numerisch zu bewältigen. Doch hier sollte nur ein Beispiel für eine *verkettete Snellius-Pothenotsche Aufgabe* gegeben werden.

Abb. 2.19: *Die berühmte Holzkiste mit den zahlreichen Daten und Messpunkten, die nach Abschluss der Gaußschen Landesvermessung am 15. März 1848 an das Hannoversche Innenministerium gesandt wurde. Von dort gelangte die Kiste 1866 nach Berlin zur Preußischen Landesaufnahme. Nur durch Zufall konnte sie in den Wirren der Zeit vor Zerstörung bewahrt werden. (Quelle: Universität Göttingen)*

3 Die Hansensche Aufgabe

3.1 Definitionen

Bei der *Hansenschen Aufgabe* in der Geodäsie handelt es sich darum, die Koordinaten von zwei neuen zugänglichen Geländepunkten durch das Anvisieren von zwei anderen schon mit Koordinaten bekannten Fixpunkten (Kirchtürmen, Burgen) zu bestimmen. Das Problem kann als eine zweifach verschachtelte Pothenotsche Aufgabe aufgefasst werden, denn es geht wieder um vier Punkte, nur das jetzt nur **zwei Fixpunkte** mit Koordinaten bekannt sind. Außerdem müssen jetzt an den beiden zu bestimmenden Orten die drei Richtungen zu den anderen Punkten anvisiert werden. Bei der Pothenotschen Aufgabe gab es **3** Sehstrahlen, bei der Hansenschen Aufgabe gibt es jetzt **6** Sehstrahlen, deren orientierte Richtungswinkel in der Ebene gemessen werden müssen (siehe Fig. (3.1)). Recht ausführlich gelöst und an einem Beispiel vorgerechnet hat dies im Jahre 1841 in einer Astronomischen Zeitschrift der Astronom und Geodät P.A. Hansen ([17]). Dabei schreibt er zu Beginn:

> *Es ist mir nicht bekannt, daß diese Aufgabe früher aufgestellt und gelöst worden wäre...*

Doch hier zeigt sich P.A. Hansen wenig informiert. Denn in der gleichen Zeitschrift *Astronomische Nachrichten*, nur 17 Jahre früher, also 1824, hatte schon der Gauss - Schüler C. Gerling die identische Aufgabe - so ganz nebenbei - gestellt und den Hauptnerv der trigonometrischen Lösung angegeben ([15]). Doch die eigentliche Wurzel dieser Aufgabe geht schon auf W. Snellius zu Beginn des 17. Jahrhunderts zurück. International hat sich aber der Begriff *Hansen's problem* durchgesetzt.

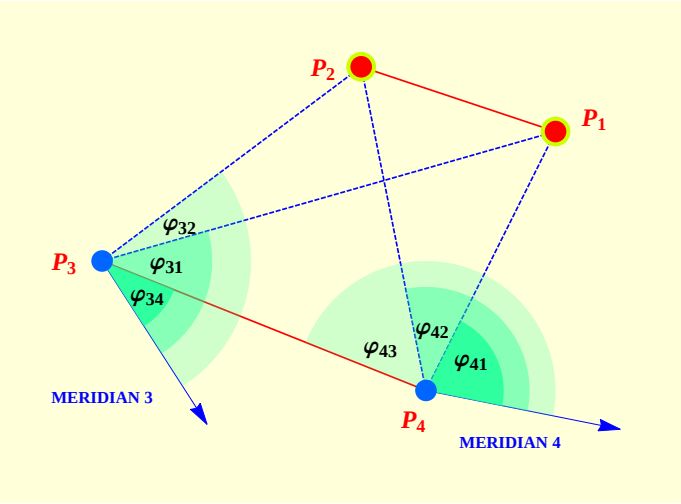


Abb. 3.1: *Die klassische Situation bei der sogenannten Hansenschen Aufgabe. Nur die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 sind bekannt. Von dem Beobachtungspunkt P_3 werden bezüglich eines beliebigen Meridians drei Winkel $\varphi_{34}, \varphi_{31}, \varphi_{32}$, vom Beobachtungspunkt P_4 bezüglich eines anderen beliebigen Meridians die anderen drei Winkel $\varphi_{41}, \varphi_{42}, \varphi_{43}$ gemessen. Wie lauten die Koordinaten der beiden Neupunkte P_3 und P_4?*

3.2 Die baryzentrischen Koordinaten

Die klassische Lösung der Hansenschen Aufgabe gelingt relativ leicht durch die Ergänzung der Innenwinkel und der Winkel an den Diagonalen im Viereck. Diese Lösung benutzte auch HANSEN und ist in der Literatur und aus Schulbüchern gut bekannt. Hier dagegen sollen die Punkte nur als Koordinaten mit komplexen Zahlen beschrieben werden. Nach Figur (3.1) gelten dann für die beiden unbekannten Punkte $\mathbf{P}_3$ und $\mathbf{P}_4$ mit den Ergebnissen aus der Pothenotschen Aufgabe die beiden Gleichungen

$$\mathbf{P}_3 = \frac{a_1\,\mathbf{P}_4 + a_2\,\mathbf{P}_1 + a_3\,\mathbf{P}_2}{a_1 + a_2 + a_3} \tag{3.1}$$

$$\mathbf{P}_4 = \frac{b_1\,\mathbf{P}_1 + b_2\,\mathbf{P}_2 + b_3\,\mathbf{P}_3}{b_1 + b_2 + b_3} \tag{3.2}$$

mit den komplexen Gewichten

$$\begin{aligned}
a_1 &= e^{-2\imath\,\varphi_{34}}(\overline{\mathbf{P}}_2 - \overline{\mathbf{P}}_1)\\
a_2 &= e^{-2\imath\,\varphi_{31}}(\overline{\mathbf{P}}_4 - \overline{\mathbf{P}}_2)\\
a_3 &= e^{-2\imath\,\varphi_{32}}(\overline{\mathbf{P}}_1 - \overline{\mathbf{P}}_4)\\
b_1 &= e^{-2\imath\,\varphi_{41}}(\overline{\mathbf{P}}_3 - \overline{\mathbf{P}}_2)\\
b_2 &= e^{-2\imath\,\varphi_{42}}(\overline{\mathbf{P}}_1 - \overline{\mathbf{P}}_3)\\
b_3 &= e^{-2\imath\,\varphi_{43}}(\overline{\mathbf{P}}_2 - \overline{\mathbf{P}}_1)
\end{aligned}$$

Leider stehen die unbekannten Zahlen als konjugiert komplexe Größen auch in den Gewichten, so daß man mit den konjugiert komplexen Bedingungen ein System von vier Gleichungen mit den vier Unbekannten $\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \overline{\mathbf{P}}_3$ und $\overline{\mathbf{P}}_4$ für die beiden Neupunkte vor sich hat. Wir führen die Abkürzung

$$\boxed{\mathbf{e}_{jk} = e^{-2\,\imath\,\varphi_{jk}}} \tag{3.3}$$

ein, bei der die Indizes j und k von 1 bis 4 gehen und das Minuszeichen im Exponenten wesentlich ist. Das obige algebraische Gleichungssystem besitzt vier Lösungen, von denen aber die ersten beiden *singulär* sind ($\mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4 \to \mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4 \to \mathbf{P}_2$). Die dritte Lösung ist ebenfalls singulär und entspricht einer falschen Winkelzuordnung. Nur die vierte Lösung dieses algebraischen Gleichungspaares ist die wahre Auflösung der *Hansenschen Aufgabe* und lautet

$$\boxed{\mathbf{P}_3 = \frac{c_{31}\,\mathbf{P}_1 + c_{32}\,\mathbf{P}_2}{c_{31} + c_{32}}, \qquad \mathbf{P}_4 = \frac{c_{41}\,\mathbf{P}_1 + c_{42}\,\mathbf{P}_2}{c_{41} + c_{42}}.} \tag{3.4}$$

Die vier *komplexen baryzentrischen Koordinaten* lauten dabei

$$\begin{aligned}
c_{31} &= (\mathbf{e}_{43} - \mathbf{e}_{42})(\mathbf{e}_{34}\mathbf{e}_{41} - \mathbf{e}_{31}\mathbf{e}_{43}),\\
c_{32} &= (\mathbf{e}_{41} - \mathbf{e}_{43})(\mathbf{e}_{34}\mathbf{e}_{42} - \mathbf{e}_{32}\mathbf{e}_{43}),\\
c_{41} &= (\mathbf{e}_{34} - \mathbf{e}_{32})(\mathbf{e}_{34}\mathbf{e}_{41} - \mathbf{e}_{31}\mathbf{e}_{43}),\\
c_{42} &= (\mathbf{e}_{31} - \mathbf{e}_{34})(\mathbf{e}_{34}\mathbf{e}_{42} - \mathbf{e}_{32}\mathbf{e}_{43}).
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten c_{ij} hängen - im Gegensatz zur Pothenotschen Aufgabe - nur von den beobachteten Winkeln in den beiden Neupunkten ab. Mit

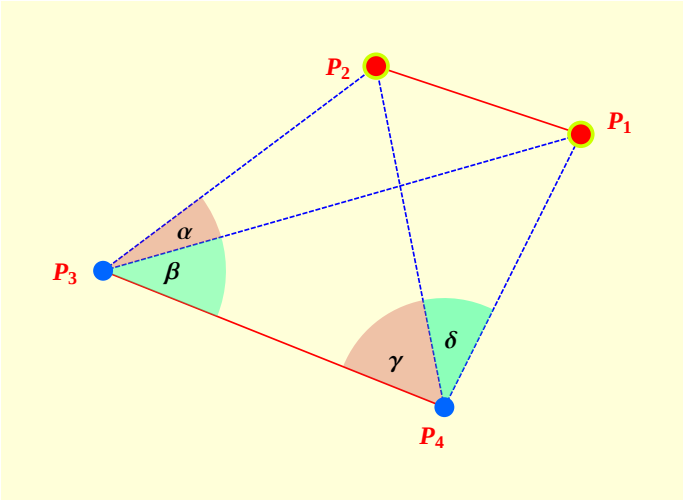


Abb. 3.2: *Die alternative Formulierung der Hansenschen Aufgabe. Nur die vier Winkel α, β, γ und δ sind durch Messung bekannt. Mit der bekannten Distanz P_1P_2 soll die nicht direkt messbare Distanz P_3P_4 berechnet werden. Je nach der Lage der Punkte können einige der Winkel auch negativ sein.*

Kenntnis dieser Größen können die Koordinaten (komplexen Zahlen mit Real- und Imaginärteil) der Punkte $\mathbf{P}_3$ und $\mathbf{P}_4$ mit (3.4) berechnet werden.

Wie bei der Pothenotschen Aufgabe treten auch hier in den komplexen Zeigern nur *Doppelwinkel* auf. Dies weist wieder darauf hin, daß nur gewisse Winkel zwischen den Richtungen in die Rechnung eingehen, nicht aber zwischen der *Vorwärtslage* und der *Rückwärtslage* der Objektpunkte unterschieden wird.

3.3 Alternative Formulierung

Auch für die Hansensche Aufgabe gibt es eine alternative Formulierung, die besonders in alten Schulbüchern präsent war (siehe Fig (3.2)). Es ging bei diesem Problem nur darum, das Streckenverhältnis von $\overline{\mathbf{P_3P_4}}$ zu $\overline{\mathbf{P_1P_2}}$ zu berechnen. Um diese Aufgabe auf unsere Koordinatenaufgabe zu übertragen, müssen wir die Winkel α, β, γ und δ als *orientierte Winkel*

interpretieren. Wir setzen also

$$\alpha = \varphi_{32} - \varphi_{31}; \qquad \beta = \varphi_{31} - \varphi_{34};$$
$$\gamma = \varphi_{43} - \varphi_{42}; \qquad \delta = \varphi_{42} - \varphi_{41}.$$

Diese Definition bedeutet, dass je nach Lage der Punkte einige der Winkel auch negativ sein können oder müssen. Führen wir jetzt die komplexe Zahl

$$\begin{aligned} Z &= +\cos(\alpha+\gamma)\sin(\beta)\sin(\delta) \\ &\quad +\cos(\beta)\sin(\alpha)\sin(\gamma+\delta) \\ &\quad +\imath\,\sin(\beta)\sin(\gamma)\sin(\alpha-\delta) \end{aligned}$$

ein, so gilt für das Streckenverhältnis

$$\left(\frac{\overline{\mathbf{P_3P_4}}}{\overline{\mathbf{P_1P_2}}}\right)^2 = \frac{\sin[\alpha+\beta+\gamma]^2\sin[\beta+\gamma+\delta]^2}{|Z|^2}. \tag{3.5}$$

Dieses Ergebnis zeigt gewisse Analogien zur der entsprechenden Formel der Pothenotschen Aufgabe (2.15).

3.4 Historisches Zahlenbeispiel

Als Test für die erhaltenen Formeln eignet sich sehr gut das klassische Beispiel, was P.A. Hansen in seiner Arbeit von 1841 vorgerechnet hat ([17]). Die schon bekannten Festpunkte lauten mit Hansen, nun aber in komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= -313.34 - 1198.31\,\imath; \\ \mathbf{P}_2 &= +310.57 - 1341.53\,\imath; \end{aligned}$$

Von der Position $\mathbf{P}_3$ wurden dann die Richtungen

$$\begin{aligned} \varphi_{31} &= 279^\circ\,12'\,12'', \\ \varphi_{34} &= 5^\circ\,31'\,54'', \\ \varphi_{32} &= 74^\circ\,3'\,48'', \end{aligned}$$

und von der Position $\mathbf{P}_4$ die Richtungen

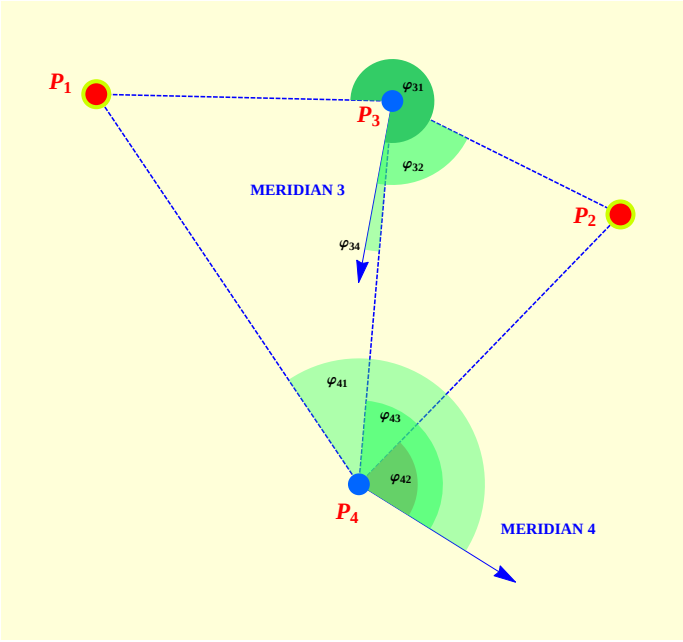


Abb. 3.3: *Die Situation bei der klassischen Hansenschen Aufgabe von 1841. Nur die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 sind bekannt. Von dem Beobachtungspunkt P_3 werden bezüglich eines beliebigen Meridians drei Winkel $\varphi_{34}, \varphi_{31}, \varphi_{32}$, vom Beobachtungspunkt P_4 bezüglich eines anderen beliebigen Meridians die anderen drei Winkel $\varphi_{41}, \varphi_{42}, \varphi_{43}$ gemessen.*

$$\begin{aligned}
\varphi_{42} &= 77^\circ\, 55'\, 18'', \\
\varphi_{43} &= 117^\circ\, 1'\, 30'', \\
\varphi_{41} &= 155^\circ\, 56'\, 30'',
\end{aligned}$$

gemessen. Daraus erhalte ich mit den obigen Formeln auf sechs Stellen hinter dem Komma genau

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_3 &= +\mathbf{39.050002} - \mathbf{1206.410437}\, \imath \\
\mathbf{P}_4 &= -\ \mathbf{0.797813} - \mathbf{1662.928303}\, \imath
\end{aligned}$$

P.A. Hansen selber erhielt die Zahlenpaare

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_3 &= (+39.04|-1206.41)\\ \mathbf{P}_4 &= (-\ 0.79|-1662.92)\end{aligned}$$

Für die Distanz der beiden Neupunkte erhalten wir zusätzlich

$$|\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_3| = \mathbf{458.253653} \tag{3.6}$$

Der Zehnerlogarithmus dieser Distanz ist **2.661105935**. Hansen selber erhielt durch drei verschiedene interne Kontrollrechnungen die Werte 2.66109, 2.66110 und 2.66111. Die sehr gute konsistente Übereinstimmung mit den damaligen *logarithmisch - trigonometrischen* Rechnungen ist beeindruckend. Die Maßeinheit ist dabei im Text nicht angegeben.

3.5 Eine Winkelrelation im Viereck

Die Hansensche Aufgabe bietet ein schwieriges rein mathematisches Problem dar, einen bestimmten Winkel zu bestimmen (siehe Fig. (3.4)). Die Aufgabe besteht darin, bei den bekannten vier Winkel α, β, γ und δ den unbekannten Winkel φ zu bestimmen. Mit den Abkürzungen

$$e_1 = e^{\imath\alpha}; \quad e_2 = e^{\imath\beta}; \quad e_3 = e^{\imath\gamma}; \quad e_4 = e^{\imath\delta}$$

ergibt sich der gesuchte Winkel φ zu

$$\boxed{e^{2\imath\,(\varphi-\gamma)} = \frac{1 - e_4^2(1 - e_2^2(1 - e_3^2(1 - e_1^2))) - e_1^2\,e_2^2}{1 - e_1^2(1 - e_3^2(1 - e_2^2(1 - e_4^2))) - e_4^2\,e_3^2}.} \tag{3.7}$$

Ein Spezialfall ist $\alpha = \delta$, denn dann gilt auch $\varphi = \gamma$. Die nicht-trivialen ganzzahligen Lösungen für das Problem in Winkelgraden lassen sich mit Hilfe eines Computers leicht finden. In der folgenden Tabelle sind einige charakteristische Fälle aufgelistet.

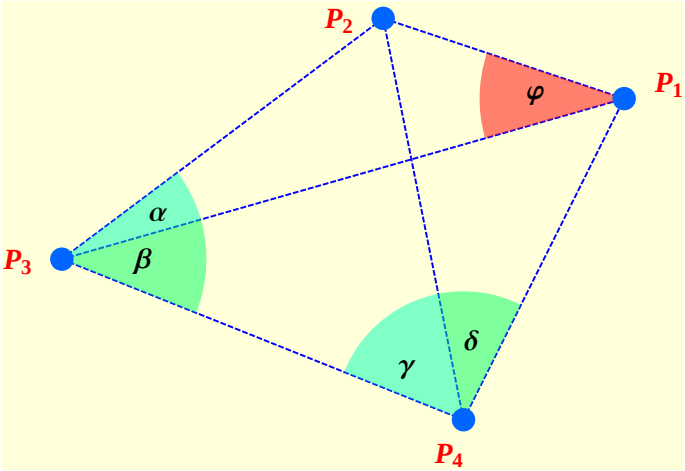


Abb. 3.4: *Die vier Winkel α, β, γ und δ sind bekannt, gefragt ist nach dem Winkel φ. Eine mögliche nicht-triviale ganzzahlige Lösung mit $\alpha \neq \delta$ in Grad ist $\alpha = 38°$, $\beta = 46°$, $\gamma = 22°$, $\delta = 48°$ und $\varphi = 18°$. Bekannt ist dies auch unter dem verallgemeinerten Winkelproblem von Langley aus dem Jahre 1922.*

α	β	γ	δ	φ
20	40	20	50	10
28	48	30	58	14
30	40	30	50	20
30	41	30	52	19
30	46	28	60	14
30	48	24	42	18
33	48	24	54	15
38	46	22	48	18

Tab. 3.1: *Einige nicht-triviale Lösungen des Winkelproblems in ganzzahligen Winkelgraden.*

4 Ein Navigationsproblem von Rümker

Im Jahre 1819 veröffentlichte die mathematische Gesellschaft zu Hamburg das von R. Woltmann (1757-1837) herausgegebene *Handbuch der Schifffahrtskunde*. Es erlebte schon 1832 die 3. Auflage; drei weitere, nämlich die vierte 1844, die fünfte 1850 und letztendlich die sechste Auflage 1857 besorgte der Direktor der Sternwarte und Navigationsschule C.K.L. Rümker (1788-1862). Rümker stammte ursprünglich aus Neubrandenburg und war ab 1807 Mathematiklehrer in Hamburg, ab 1809 diente er als Midshipman in der British East India Company und dann von 1811 bis 1813 in der britischen Handelsmarine. Im Juli 1813 wurde er von einer Pressbande festgenommen und musste zwangsweise der Royal Navy beitreten. Er diente in der Royal Navy bis 1817 als Navigationslehrer auf der HMS *Benbow* , *Montague* und *Albion* und nahm 1816 auf der *Albion* an der Expedition nach Algier und der Bombardierung der Stadt teil . 1817 lernte er in Genua den österreichisch - ungarischen Astronomen Baron F. X. von Zach (1757-1832) kennen , der Rümker dazu veranlasste, Astronomie zu studieren. Rümker war daraufhin von 1819 bis 1820 Direktor der Schifffahrtsschule in Hamburg und anschließend von 1819-1821 Lehrer an der dortigen Navigationsschule. Durch Vermittlung wurde er von 1821-1830 Direktor der ersten australischen Sternwarte bei Sydney und schließlich - nach Intrigen in England gegen Ihn - wieder von 1831-1857 Direktor der Sternwarte und Navigationsschule in Hamburg. Ab 1857 siedelte er aufgrund gesundheitlicher Probleme mit seiner Begleiterin nach Lissabon um, wo er 1862 verstarb. [1]

In den letzten drei Ausgaben tauchte für die küstennahe Navigation eine

[1] Über seinem Arbeitsplatz in Hamburg schwebte immer eine ausgestopfte Möwe. Sein Grab ist noch heute auf dem Cemitério dos Ingleses in Lissabon erhalten. Siehe auch: J. Schramm: Sterne über Hamburg - Die Geschichte der Astronomie in Hamburg, 2. überarbeitete und erweiterte Auflage, Kultur - & Geschichtskontor, Hamburg 2010.

Aufgabe auf, die mehr durch ihren mathematischen Schwierigkeitsgrad als durch praktischen Nutzen Interesse erweckt. Da sie meines Wissens zuletzt nur in diesem Handbuch des 19. Jahrhunderts formuliert wurde, nenne ich sie die *Rümkersche Navigationsaufgabe*. Mir ist nicht klar, woher RÜMKER die Idee zu dieser Aufgabe nahm. RÜMKER war sicherlich durch seine Seereisen bis nach Australien mit mancherlei Navigationsproblemen konfrontiert worden. Nur ein Brief gibt hier einen Hinweis. Denn am 24. Februar 1843 schrieb RÜMKER einen Brief an den Mathematiker GAUSS mit der Klage, dass er ein bestimmtes geometrisches Navigationsproblem nur *indirekt* lösen könne. Er schrieb unter anderem

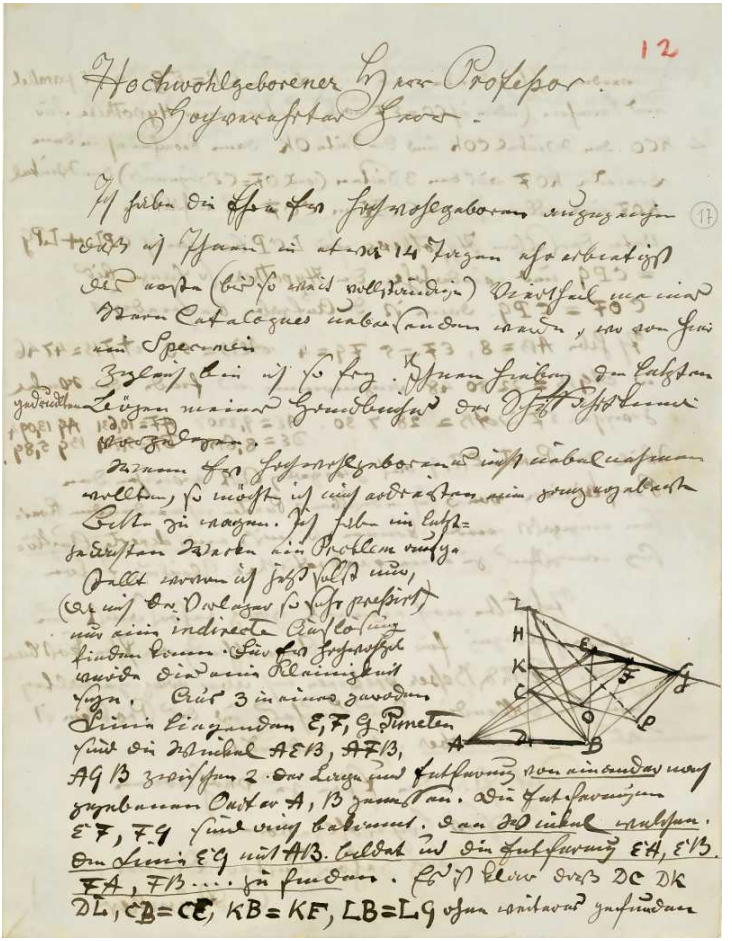
> *...Wenn Ihr Hochwohlgeborener mir nicht übelnehmen wollten, so möchte ich mich zuvorderst um eine ganz ergebenste Bitte zu wagen. Ich habe im zuletzt gedachten Werke ein Problem aufgestellt, wovon ich bis jetzt, (da mich der Verleger so sehr pressiert) nur eine indirekte Auflösung finden kann. Für Euer Hochwohlgeborenen würde dies eine Kleinigkeit sein...*[2]

Doch so eine Kleinigkeit war diese Aufgabe nicht. Im Laufe des Jahres 1843 muss sich GAUSS mit dieser Aufgabe intensiv beschäftigt haben. Es gelang ihm zu zeigen, dass die direkte Auflösung auf eine kubische Gleichung führt. Bemerkenswert ist, daß RÜMKER diese direkte Auflösung von GAUSS in den Auflagen des Handbuches von 1844, 1850 und 1857 abdrucken ließ ([28]). GAUSS muss diese Aufgabe nicht nur sehr interessant gefunden haben, sondern er sah in ihr wohl auch die Präsens neuer mathematischer Strukturen, die in der Theorie der damaligen Standortbestimmung sonst nicht auftraten.

4.1 Die Grundgleichungen

In Figur (4.2) ist die Aufgabe geometrisch anschaulich dargestellt. Zwei feste Landmarken $\mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{Q}_2$ an einer Küste oder auf einer Insel werden zu drei verschiedenen Zeitpunkten mit *absoluter links - rechts* Orientierung (mit dem Uhrzeigersinn) angepeilt und die scheinbaren Winkelabstände $\theta_{1,2,3}$ mit ihrer richtigen Orientierung (Vorzeichen) gemessen. Alle drei Winkel werden mit dem Uhrzeigersinn gemessen. Liegt also $\mathbf{Q_1}$ links von $\mathbf{Q}_2$, so ist θ positiv, im umgekehrten Fall negativ. Die Fahrstrecken a

[2] sinngemäße Transkription



12

Hochwohlgeborener Herr Professor!
Hochverehrter Herr!

Ich habe die Ehre Ihnen Hochwohlgeboren anzuzeigen daß ich Ihnen in etwa 14 Tagen die erbeten Hülfe (bis so weit vollständig) Verzeichniß meines Waren Catalogues einsenden werde, wo von Ihnen ein Specimen

Zugleich bin ich so frey, Ihnen Ihrem den letzten Bogen meines Handbuches der Schifffahrtskunde

Hochfolgen zu lassen.

Wenn Ihr Hochwohlgeboren nicht unbequemen wollten, so möchte ich mich erdreisten mir eine ganz ungelahrte Bitte zu sagen. Ich habe in letzter Zeit vielfach ein Problem vorgelegt bekommen ich selbst nur, (es ist der Dolmetscher so sehr geschärft) nur eine indirecte Auflösung finden können. Für den Hochwohl wurde dieses mir Kleinigkeit seyn. Aus 3 in einer zu wählenden Linie liegenden E, F, G Punkten sind die Winkel AEB, AFB, AGB zwischen 2 der Lage und Entfernung von einander wegen gegebenen Orter A, B zu messen. Die Entfernungen EF, FG sind ungefähr bekannt. Aus den Winkel welchen die Linie EG mit AB bildet ist die Entfernung EA, EB, FA, FB ... zu finden. Es ist klar daß DC DK DL, CB = CE, KB = KF, LB = LG ohne weiteres zu finden

Abb. 4.1: *Der Originalbrief Rümkers vom 23. Februar 1843 an Gauss. Er diskutiert hier ein Navigationsproblem, für das er (Rümker) nur eine indirekte iterative Lösung kennt. Er bittet den „hochwohlgeborenen Herrn Professor“ , ihm doch eine direkte Auflösung (quadratische Gleichung?) mitzuteilen. Es ging hier um die Herausgabe der 4. Auflage des Handbuches zur Schifffahrtskunde 1844. (Quelle: SUB Göttingen)*

und b müssen durch die Fahrtgeschwindigkeit im Wasser und die Zeit ableitbar sein. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen wir für Koordinaten der zwei Punkte die Werte

$$\mathbf{Q}_1 = +1; \qquad \mathbf{Q}_2 = -1.$$

Elementare Überlegungen in der komplexen Ebene führen dann zu den drei geometrischen Bedingungen

$$e^{2\imath\,\theta_j} = \frac{(1-\mathbf{P}_j)(1+\mathbf{PC}_j)}{(1+\mathbf{P}_j)(1-\mathbf{PC}_j)}, \qquad \{j=1,2,3\} \tag{4.1}$$

Die komplexe Zahl $\mathbf{PC}_j$ ist im Normalfall die konjugiert komplexe Zahl zu $\mathbf{P}_j$. Doch wir fassen sie hier zunächst ganz allgemein als eine unabhängige komplexe Zahl auf.

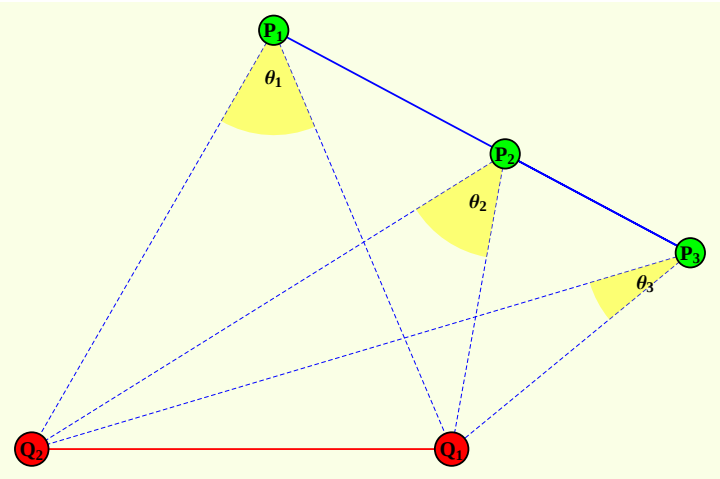


Abb. 4.2: *Die achte Aufgabe zur küstennahen Navigation im Handbuch der Schifffahrt (4ten,5ten und 6ten Auflage) von 1844-1857 von C.K.L. Rümker ([28]). Bei einem Schiff ist der Kompass unzuverlässig und der Navigator versucht trotzdem, den Kurs des Schiffes und die Positionen P_1, P_2, und P_3 durch Anvisieren von zwei bekannten Landmarken Q_1 und Q_2 zu bestimmen. Die auf einer geraden Linie zurückgelegten Strecken a und b können mit einem Lot gemessen werden. Die Winkel werden mit dem Uhrzeigersinn von Q_1 nach Q_2 gemessen.*

Zusätzlich müssen die drei Standpunkte $\mathbf{P}_j$ auf einer geraden Linie

liegen. Also muss die Gleichung

$$\mathbf{P}_1\left(\mathbf{PC}_2-\mathbf{PC}_3\right)+\mathbf{P}_2\left(\mathbf{PC}_3-\mathbf{PC}_1\right)+\mathbf{P}_3\left(\mathbf{PC}_1-\mathbf{PC}_2\right)=0. \quad (4.2)$$

gelten. Auch hier soll $\mathbf{PC}_j$ das konjugiert komplexe von $\mathbf{P}_j$ sein. Ist dies nicht der Fall, kann die Relation nicht geometrisch gedeutet werden. Als letztes gelten noch die beiden Distanzrelationen

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1\right)\left(\mathbf{PC}_2-\mathbf{PC}_1\right) &= a^2, && (4.3)\\ \left(\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_2\right)\left(\mathbf{PC}_3-\mathbf{PC}_2\right) &= b^2. && (4.4)\end{aligned}$$

Auch hier gelten für die $\mathbf{PC}_j$ gegenüber den $\mathbf{P}_j$ die gleichen Prämissen. Wir haben somit 6 Gleichungen für die 6 Unbekannten $\mathbf{P}_j$ und $\mathbf{PC}_j$ formuliert. Wenn $\overline{\mathbf{P}}_j=\mathbf{PC}_j$ gilt, ist die Lösung geometrisch interpretierbar.

4.2 Das allgemeine Problem hat 12 Lösungen

Gauss gelang es im Jahre 1843, das obige Problem auf eine kubische Gleichung zurückzuführen. Dieser kubischen Gleichung entsprechen 3 Lösungen, die aber aufgrund einer Spiegelsymmetrie zu 6 Lösungen gehören. Von diesen sind aber zwei geometrisch nicht möglich, da ihre Koordinaten keinen *reellen* Punkten entsprechen können. C.F. Gauss machte folgende Bemerkung zu den Wurzeln der kubischen Gleichung:

> *Es lässt sich übrigens beweisen, daß allemal, wenigstens eine der drei Wurzeln in die Kategorie der auszuschließenden gehört, und also überhaupt niemals mehr als vier verschiedene Auflösungen durch reelle Koordinaten statt haben können.*

Rümker wie auch Gauss machten bei der Aufgabe aber die stille Voraussetzung, dass die Reihenfolge der Standorte $\mathbf{P}_j$ mit ihren Winkeln θ_j auf dem geraden Kurs eindeutig festliegen. Zum Beispiel soll der Ort $\mathbf{P}_2$ immer zwischen $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ liegen. Unsere obigen 6 Gleichungen machen aber diese Prämisse nicht. Eine numerische Lösung (auf diese beschränken wir uns hier) mit der Routine *NSolve* von *Mathematica* führt auf 12 Lösungen, von denen aber jetzt 4 (bei Gauss waren es 2) geometrisch nicht deutbar sind, weil bei ihnen $\overline{\mathbf{P}}_j\neq\mathbf{PC}_j$ ist. In diesen verbleibenden 8 Lösungen sind auch alle möglichen Stellungsänderungen

der drei Standorte $\mathbf{P}_j$ mit den Winkeln θ_j auf der geraden Fahrlinie enthalten.

Es ist jetzt historisch interessant, die vollständigen 8 Lösungen bildlich anhand von konkreten Zahlen zu zeigen. Außerdem kann man die Genauigkeit des numerischen Verfahrens von RÜMKER mit der numerischen Lösung von GAUSS und der eigenen Computerrechnung vergleichen. Dazu dienen Zahlen aus dem Handbuch von 1850. Die beiden Landmarken $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ seien $8[sm]$ (Seemeilen) von einander entfernt. Von den Positionen $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ wurden die Abstandswinkel

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 53^\circ\ 0'\ 0'', \\ \theta_2 &= 47^\circ\, 46'\ 0'', \\ \theta_3 &= 22^\circ\ 50'\, 48'', \end{aligned}$$

gemessen. Für die Strecken gilt (im Handbuch in Seemeilen ($'$))

$$a = 5\,[sm]; \qquad b = 4\,[sm] \tag{4.5}$$

Da die Distanz in unseren 6 Gleichungen zwischen $\mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{Q}_2$ auf zwei normiert wurde, sind die reduzierten Werte $a = 5/4$ und $b = 1$. Aus diesen Daten erhalten wir 8 Lösungen, die in den nun folgenden Figuren dargestellt sind.

Interessant ist es noch, den Kurswinkel der Fahrlinie zum Kompass zu berechnen und mit den historischen Daten zu vergleichen. Mit seiner indirekten Methode erhielt RÜMKER durch eine Iteration für den Kurswinkel relativ zu den Landmarken

$$90 - \varphi = 61^\circ\, 52'\, 30'', \tag{4.6}$$

GAUSS erhält aus seiner kubischer Gleichung den Winkel

$$90 - \varphi = 61^\circ\, 52'\, 21.538'', \tag{4.7}$$

Die Abweichung zu dem Wert von RÜMKER beträgt nur 8 Bogensekunden. Eine eigene Computerrechnung, welche den Richtungswinkel von $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3$ aus der fünften oder sechsten Lösung errechnet, liefert den exakten Wert

$$90 - \varphi = \mathbf{61^\circ\, 52'\, 21.546''}, \tag{4.8}$$

Die Abweichung zum Gaußschen Wert beträgt nur 8 Millibogensekunden. Eine wirklich beeindruckende Bestätigung der damaligen logarithmischen Rechnungen.

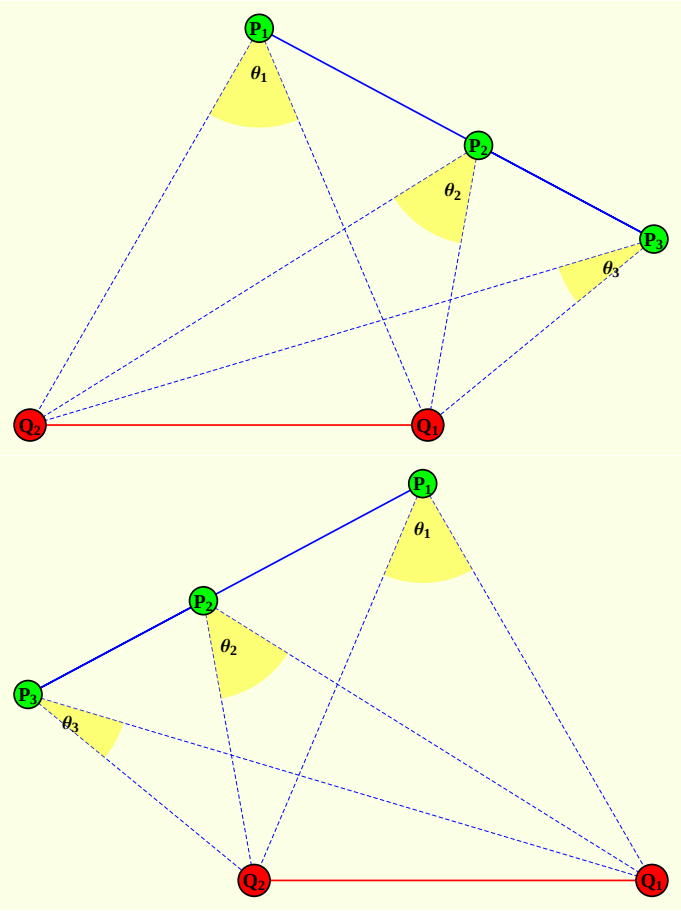


Abb. 4.3: *Die fünfte und sechste Lösung des Navigationsproblems von C.K.L. Rümker nach den Originaldaten. Die ersten vier Lösungen entsprechen keiner geometrischen Situation.*

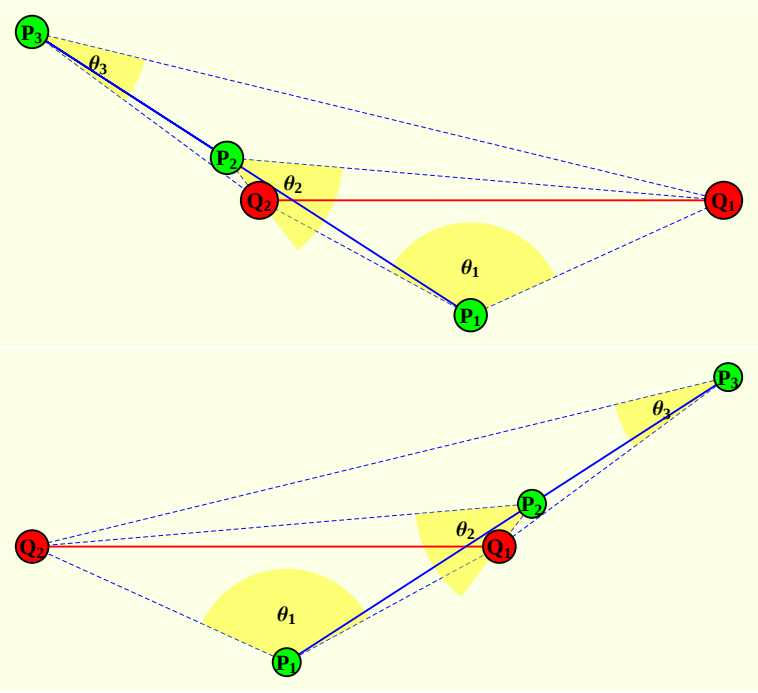


Abb. 4.4: *Die siebente und achte Lösung des Navigationsproblems von C.K.L.* Rümker *nach den Originaldaten. Der Winkel an* $\mathbf{P}_1$ *ist das Komplement von* π.

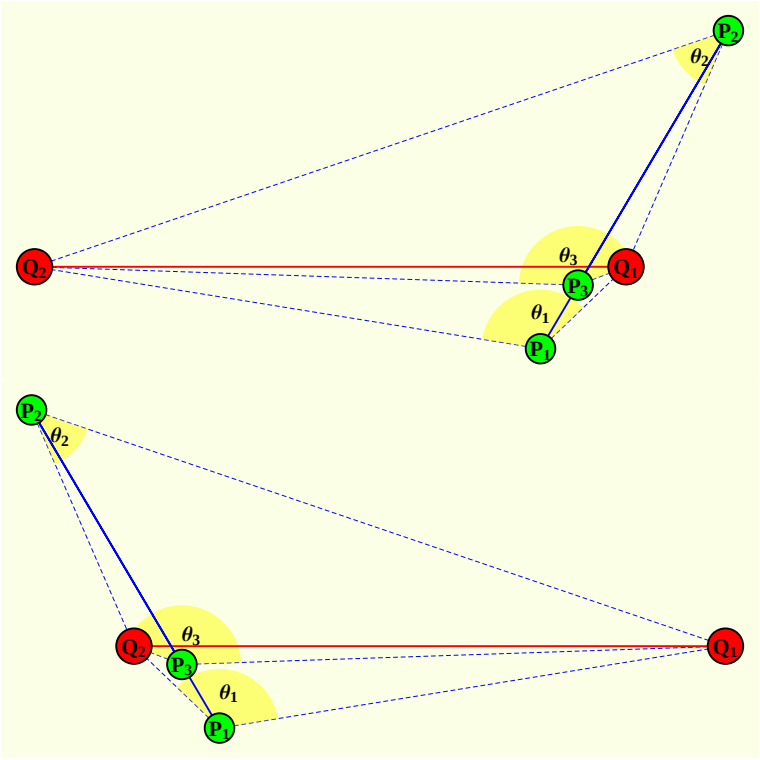


Abb. 4.5: *Die neunte und zehnte Lösung des Navigationsproblems von C.K.L. Rümker nach den Originaldaten. Hier ist die Reihenfolge der Standorte auf der Fahrlinie vertauscht. Außerdem sind zwei Winkel Komplemente von π.*

ht!]

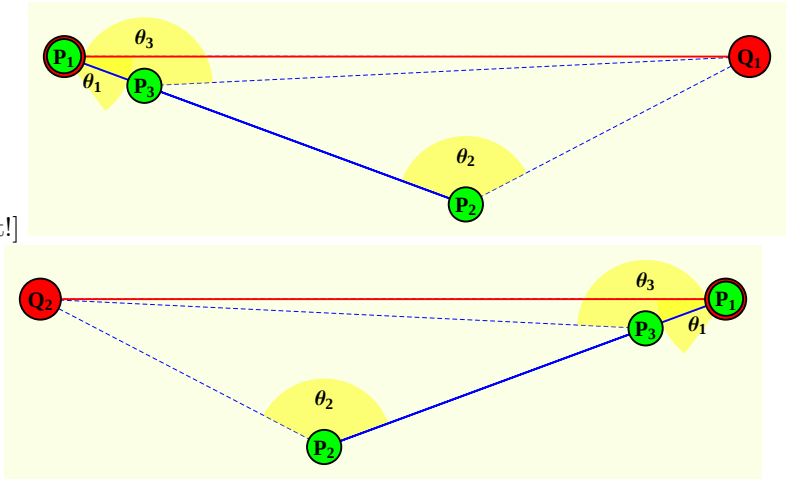


Abb. 4.6: *Die elfte und zwölfte Lösung des Navigationsproblems von C.K.L. Rümker nach den Originaldaten. Hier sind ein Standort und ein Zielpunkt fast identisch. Auch ist die Reihenfolge der Standorte auf der Fahrlinie wieder vertauscht. Die Lösung ist physisch unmöglich, da zwei Zielpunkte „rückwärts“ liegen.*

5 Das Achtpunktproblem

Die obige Aufgabe zur küstennahen Navigation ist nur ein Spezialfall allgemeinerer sehr schwieriger Aufgaben, die zuerst J.H. Lambert 1765 diskutiert hat ([22]): *Von je vier unterschiedlichen unbekannten Schiffspositionen aus werden je drei relative Peilungen nach vier unbekannten Küstenpunkten (Bergen) gemacht; bis auf den Maßstab und zwei willkürlich ausgewählten Punkten als Referenz sollen dann aus diesen* $3 \times 4 = 12$ *Messungen die gegenseitige Lage der übrigen sechs Punkte zu den als Referenz gewählten zwei Punkten (insgesamt vier Landmarken und vier Schiffspositionen) bestimmt werden.* Hierzu existiert ein interessantes Briefdokument von Hieronymus Eschenbach[1] vom 18. September 1792 aus Batavia ([19]) :

> *Seit meiner Abreise vom Kap, wo ich mich fast ein halbes Jahr aufgehalten habe, habe ich wieder ernstlich arbeiten können. Ich habe die ganze Reise über täglich, wenn das Wetter es erlaubte, mich mit Aufsuchung der Breiten beschäftigt. Die Seeleute folgen hier allgemein der Methode von Douwes, die Röhl in seiner Steuermannskunst, ganz in der Sprache des Erfinders, vorgetragen hat[2]. Sie ist auch für diese ganz gut, da bei ihnen wenig Arbeit sein muss, und auf ein oder ein Paar Minuten es nicht ankommt. Aber einem Mathematiker kann sie nicht genug tun. Ich suchte eine andere, und fand im de Lalande Autoren genug aufgeführt, die Formeln dafür gegeben haben; nur hatte ich zum Unglück keines von den Büchern bei der Hand, wo sie zu finden waren. Ich musste mir also selbst dergleichen entwerfen. . . .*

[1] H.C.W. Eschenbach (1764 -1797) War ab 1782 Student der Mathematik und Physik bei C.F. Hindenburg. Ab 1791 Ingenieurhauptmann bei der holländischen ostindischen Compagnie. Stationen am Kap der guten Hoffnung, dann in Batavia, endlich in Malakka. Bei der Eroberung von Malakka durch die Engländer 1795 geriet er in Gefangenschaft und starb in Madras 1797.

[2] L. H. Röhl (1724-1790), Anleitung zur Steuermannskunst, Greifswald 1778

Wie wir in der Straße von Sunda ankamen, lies mich der reizende Anblick der herrlichen Küsten und Inseln nicht vom Verdeck. Ich beschloss auf der Stelle eine Anwendung der Lambertischen Methode (Beitr. Band I, §107-§116) zu machen, ein Land mit bloßen Winkeln (wie man es zu nennen pflegt) aufzunehmen. Ich habe ihr zufolge ein Kärtchen von der Straße entworfen, wozu ich nachher den Maßstab aus der Geschwindigkeit des Schiffes genommen habe. Dadurch konnte ich auch der dasigen Berge Höhen über die Meeresfläche bestimmen; worunter ich einen (am Ende der Kaysersbucht auf Sumatra) von 910 Toisen (den höchsten Berg, den ich bisher gesehen) gefunden habe.

Da wir, bei dem besten Wind und Wetter, des Nachts nicht, wie sonst zu geschehen pflegt, liegen blieben, so konnte ich leider nicht fort observieren.; daher meine Karte nur die erste Hälfte der Straße enthält. Ich bin nachher auf dem Lande, der gedachten Methode, die Lambert in der Tat allzu schnell verlässt, noch weiter nachgegangen, weil sie mir, für meine Verhältnisse besonders, sehr anwendbar schien; ich muss aber gestehen, daß ich die Verbindung der Konstruktion (§112) mit der analytischen Auflösung (§116) noch nicht recht deutlich einsehen und begreifen kann. Das Problem ist vom zweiten Grade, und die Konstruktion gibt auch zwei Antworten; dem ohngeachtet hat es Lambert, durch seine Benennung, auf eine einfache Gleichung gebracht. Wo bleibt nun die zweite Antwort der Frage? Wollten Sie mir hierüber einige Auskunft geben; oder können sie mir jemand nennen, der die Sache weiter bearbeitet hat, so werden sie mich sehr verbinden...

Hindenburg weist in seiner Antwort in einer Fußnote darauf hin, dass Lambert in der Auflösung dieser speziellen Aufgabe einen kleinen Fehler begangen hat, den Lambert in einem Briefwechsel auch zugab. Letztendlich ging es darum, von drei unterschiedlichen Schiffspositionen drei Landmarken durch *Standlinien* anzupeilen. Dabei sollen aber absolut orientierte Winkel von der Mittagslinie (Südmeridian - Nordmeridian) zu den Landmarken gemessen werden. Betrachten wir das Problem ganz

allgemein, so geben wir uns m Schiffspositionen und n Landmarken vor. Gemessen werden so $m * n$ absolut orientierte Winkel (*Standlinien*). Als unbekannte Koordinaten fallen $2(m+n)$ an. Da die Skala aber nicht festliegt, müssen zwei Orte als bekannt vorausgesetzt werden. Es gibt in diesem Fall also $2(m+n-2)$ Unbekannte. Damit die Aufgabe lösbar ist, muss die Bedingung

$$2\,m + 2\,n - 4 = m\,n$$

oder $(m-2)(n-2) = 0$ erfüllt sein. Der einfachste Fall ist hier $m = 2$ und $n = 2$[3]. Der Fall von Lambert mit $m = 3$ und $n = 3$ ist *keine Lösung der obigen Bedingungen.* Im symmetrischen Fall $m = 2$ und $n = 2$ haben wir so die vier Gleichungen

$$e^{2\,\imath\varphi_{11}} = \frac{\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_1}{\overline{\mathbf{Q}}_1 - \overline{\mathbf{P}}_1}, \quad e^{2\,\imath\varphi_{12}} = \frac{\mathbf{Q}_2 - \mathbf{P}_1}{\overline{\mathbf{Q}}_2 - \overline{\mathbf{P}}_1},$$
$$e^{2\,\imath\varphi_{21}} = \frac{\mathbf{Q}_1 - \mathbf{P}_2}{\overline{\mathbf{Q}}_1 - \overline{\mathbf{P}}_2}, \quad e^{2\,\imath\varphi_{22}} = \frac{\mathbf{Q}_2 - \mathbf{P}_2}{\overline{\mathbf{Q}}_2 - \overline{\mathbf{P}}_2}.$$

Dabei bedeuten $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ die Positionen der Landmarken und $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ die Schiffspositionen. Dies sind vier Gleichungen für acht Unbekannte. Um den Maßstab festzulegen, setzen wir für die Positionen der beiden Landmarken auf unserer vorläufigen Karte einfach $\mathbf{Q}_1 = 0$ und $\mathbf{Q}_2 = 1$. Mit der Abkürzung

$$\boxed{\mathbf{e}_{jk} = e^{-2\,\imath\,\varphi_{jk}},} \tag{5.1}$$

welches durch eine komplexe Einheitszahl Standlinien vom Beobachtungsort j zur Landmarke k beschreibt, folgen so für die zwei unbekannten Schiffspositionen

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1 - \mathbf{e}_{12}}{\mathbf{e}_{11} - \mathbf{e}_{12}}, \qquad \mathbf{P}_2 = \frac{1 - \mathbf{e}_{22}}{\mathbf{e}_{21} - \mathbf{e}_{22}}.$$

Mit analogen reellen Varianten dieser Formeln hat H. Eschenbach so die Küstenlinie von Teilen der damaligen Sunda Straße vermessen und sich eine grobe Karte entworfen. Ohne Probleme lassen sich weitere Zwischenpunkte $\mathbf{Q}_j$ einschalten, die dann mit den bekannten Positionen

[3] Der Fall $m = 2$ und $n = 1$ entspräche einer Doppelpeilung, bei der aber Q_1, der konstante Kurswinkel des Schiffes und die Distanz von P_1 zu P_2 bekannt sein müssen.

von $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ durch *Kreuzpeilung* eingeordnet werden können. Wie man sieht, ist das Problem linear und die Lösung eindeutig. Entscheidend ist, dass man alle Winkel auf einen *unendlichen fernen Punkt* beziehen kann (*Mittagslinie, Meridian, untergehende Sonne...*).

5.1 Die Aufgabe von Lambert

Die obige Aufgabe könnte man das **Vierpunktproblem** der Navigation nennen. Doch Lambert behandelt 1765 auch das viel schwierige **Achtpunktproblem**, bei dem man nur die Zwischenwinkel zwischen unterschiedlichen Landmarken vom Schiff aus vermisst. Eschenbach hätte dieses Problem aufgrund seiner Komplexität nicht so einfach rechnen können; er erwähnt deshalb auch nicht die umfangreichen Rechnungen von Lambert in seinem Buch auf Seite 186 (§270). Nimmt man wieder auf der einen Seite (Küste) n sichtbare Zielpunkte (Bergspitzen), auf dem Wasser m verschiedene Beobachtungspunkte (Schiffspositionen) an, so hat das Problem wiederum $2\,m + 2\,n$ unbekannte Koordinaten. Um den Maßstab festzulegen, können wir zwei Punkte willkürlich festlegen. Also haben wir nur noch $2\,m + 2\,n - 4$ unbekannte *relative* Koordinaten. Die Anzahl der gemessenen Winkeldifferenzen von den m Schiffspositionen (*relativen Standlinien*) beträgt jetzt nur noch $m(n-1)$. Damit die Aufgabe jetzt lösbar ist, muss die Bedingung

$$2\,m + 2\,n - 4 = m\,(n-1)$$

oder alternativ

$$(m-2)(n-3) = 2.$$

erfüllt sein. Als mögliche Kombinationen (m, n) bieten sich außer den singulären Werten $(0, 2)$ und $(1, 1)$ nur $(4, 4)$ und $(3, 5)$ an - also beide Mal für $m + n = 8$ Punkte. Die erste Möglichkeit wurde - wie oben schon erwähnt - von J.H. Lambert 1765 diskutiert, die Zweite zum erstenmal von dem Mathematiker und Astronomen Th. Clausen im Jahre 1842. Beide Aufgaben sind in die Literatur als das **Achtpunktproblem** eingegangen.

Die Lösung für das Achtpunktproblem liegt wieder in der Formel (2.9) für das klassische Pothenotsche Problem. Werden von einem Standpunkt

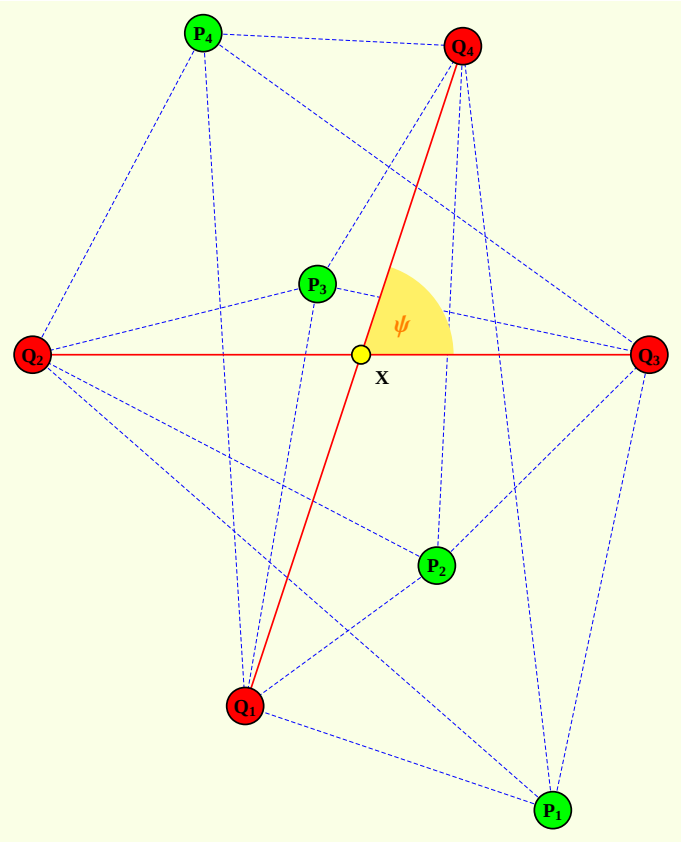


Abb. 5.1: *Die erste Lösung der Originalaufgabe für das relative Achtpunktproblem für den Fall von m=4 Standpunkten und n=4 Zielpunkten, welches Lambert im Jahre 1765 diskutiert und versuchsweise gelöst hat. Die Standpunkte sind hier* $\mathbf{P}_j$*, die Zielpunkte* $\mathbf{Q}_k$*. Um dem Maßstab und die Rotation festzulegen, müssen willkürlich zwei Punkte (hier* $\mathbf{Q}_2$ *und* $\mathbf{Q}_3$*) festgelegt werden. Das Bild zeigt die erste Lösung des quadratischen Problems, aus 12 Zwischenwinkel die relativen Lagen aller übrigen 6 Punkte zu den vorgegeben Punkten* $\mathbf{Q_2} = (-1, 0)$ *und* $\mathbf{Q_3} = (+1, 0)$ *zu bestimmen. Sie ist von den orientierten Winkelmessungen auch physisch möglich.*

$\mathbf{P}_j$ die Zielpunkte $\mathbf{Q}_i$ und $\mathbf{Q}_k$ anvisiert, so gilt

$$e^{2\imath\{Q_iP_jQ_k\}} = \frac{(\mathbf{Q}_i - \mathbf{P}_j)(\overline{\mathbf{Q}}_k - \overline{\mathbf{P}}_j)}{(\mathbf{Q}_k - \mathbf{P}_j)(\overline{\mathbf{Q}}_i - \overline{\mathbf{P}}_j)} \tag{5.2}$$

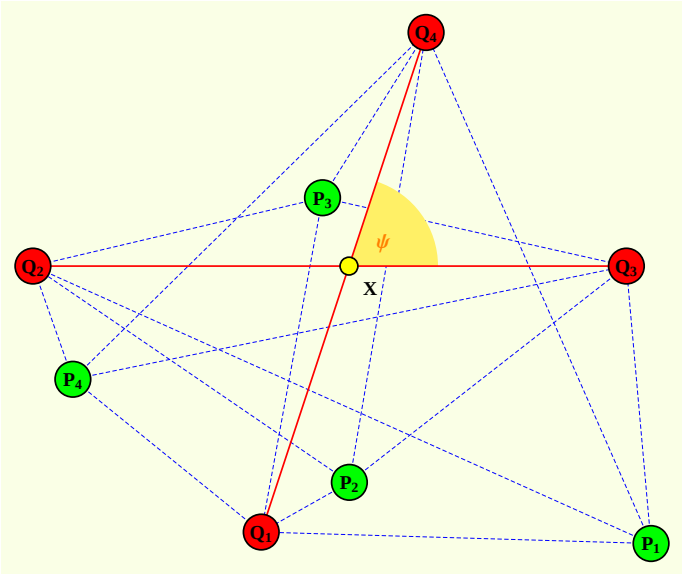


Abb. 5.2: *Die zweite Lösung der Originalaufgabe für das relative Achtpunktproblem für den Fall von m=4 Standpunkten und n=4 Zielpunkten. Es geht darum, aus 12 Zwischenwinkel die relativen Lagen aller übrigen 6 Punkte zu bestimmen. Sie ist von den orientierten Winkelmessungen her physisch falsch, da einige anvisierte Punkte „rückwärts“ liegen. Der Winkel ψ zwischen den Linien* $\mathbf{Q_1Q_4}$ *und* $\mathbf{Q_2Q_3}$ *und die Lage des Kreuzpunktes X sind in beiden Lösungen des Lambert-Problems identisch!*

Der gemessene Winkel $\{Q_iP_jQ_k\}$ ist positiv, wenn der Punkt $\mathbf{Q}_k$ vom Punkt $\mathbf{P}_j$ am Horizont „rechts“ vom Punkt $\mathbf{Q}_i$ liegt, ansonsten ist dieser Winkel negativ. Lambert gibt 1765 folgendes Zahlenbeispiel an: In der

$Q_1P_1Q_2$	$22°30'$	$Q_2P_1Q_3$	$60°44'$	$Q_3P_1Q_4$	$-18°40'$
$Q_1P_2Q_2$	$63°48'$	$Q_2P_2Q_3$	$107°38'$	$Q_3P_2Q_4$	$-42°20'$
$Q_1P_3Q_2$	$66°20'$	$Q_2P_3Q_3$	$205°58'$	$Q_3P_3Q_4$	$-70°38'$
$Q_1P_4Q_2$	$31°30'$	$Q_2P_4Q_3$	$277°52'$	$Q_3P_4Q_4$	$-32°56'$

Tab. 5.1: *Die Originaldaten von Lambert für 4 Standpunkte und 4 Zielpunkte.*

Abbildung (5.1) wird die erste Lösung des quadratischen Problems ge-

zeigt. Sie wurde durch eine rein numerische Lösung der 12 nichtlinearen algebraischen Gleichungen (5.2) gewonnen- Die zwei Zielpunkte $\mathbf{Q}_2$ und $\mathbf{Q}_3$ sind willkürlich auf der reellen Achse $-1, 1$ festgelegt. Die erste Lösung ist auch physisch möglich, da alle gemessen Winkel in „Vorwärtsrichtung“ liegen. Man sieht, dass hier LAMBERT an eine Schiffspassage durch eine Meerenge gedacht hat, bei der rechts und links vom Schiff Landmarkierungen zur Orientierung vorhanden sind. Die zweite Lösung in Abbildung (5.2) ist dagegen physisch unmöglich, weil einige Zielpunkte „rückwärts“ liegen und somit nicht der Messrealität entsprechen. Mathematisch bemerkenswert ist die Tatsache, dass die beiden Strecken $\mathbf{Q_1Q_4}$ und $\mathbf{Q_2Q_3}$ in *beiden Lösungen* einen konstanten Winkel ψ untereinander machen - also eine Invariante darstellen. Das gilt auch für den Kreuzungspunkt (Fixpunkt) $\mathbf{X}$. Das Erstere hatte auch LAMBERT in seinem Buch 1765 bemerkt. Für diese Invarianten gilt

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{Q}_1\overline{\mathbf{Q}}_{\mathbf{4}} - \mathbf{Q}_4\overline{\mathbf{Q}}_{\mathbf{1}}}{\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_4 - (\overline{\mathbf{Q}}_{\mathbf{1}} - \overline{\mathbf{Q}}_{\mathbf{4}})}; \quad e^{2\imath\psi} = \frac{\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_4}{\overline{\mathbf{Q}}_{\mathbf{1}} - \overline{\mathbf{Q}}_{\mathbf{4}}}.$$

5.2 Die Aufgabe von Clausen

Im Jahre 1842 hat T. CLAUSEN das Achtpunktproblem wieder in Erinnerung gebracht und auch den Fall von drei Standpunkten und fünf Zielpunkten andiskutiert. Er hat aber keine expliziten Rechnungen durchgeführt. Wir benutzen hier die gegenüber dem Lambertschen Fall leicht abgeänderten Winkeldaten In den Abbildungen (5.3) und (5.4) sind

$Q_1P_1Q_2$	$22°30'$	$Q_1P_2Q_2$	$63°48'$	$Q_1P_3Q_2$	$66°20'$
$Q_2P_1Q_3$	$24°34'$	$Q_2P_2Q_3$	$38°46'$	$Q_2P_3Q_3$	$79°27'$
$Q_3P_1Q_4$	$17°30'$	$Q_3P_2Q_4$	$26°32'$	$Q_3P_3Q_4$	$55°53'$
$Q_4P_1Q_5$	$18°40'$	$Q_4P_2Q_5$	$42°20'$	$Q_4P_3Q_5$	$70°38'$

Tab. 5.2: *Beispieldaten für das Achtpunktproblem nach CLAUSEN für 3 Standpunkte und 5 Zielpunkte. Auch hier gibt es im Allgemeinen zwei Auflösungen*

die zwei Fundamentallösungen für das *Winkelnetzwerk* nach CLAUSEN dargestellt. Eine Berechnung ist nur noch numerisch sinnvoll. Die Routine *NSolve* von *Mathematica* hat bei der Lösung der 12 algebraischen Gleichungen Probleme und es bedarf hier weiterer Untersuchungen.

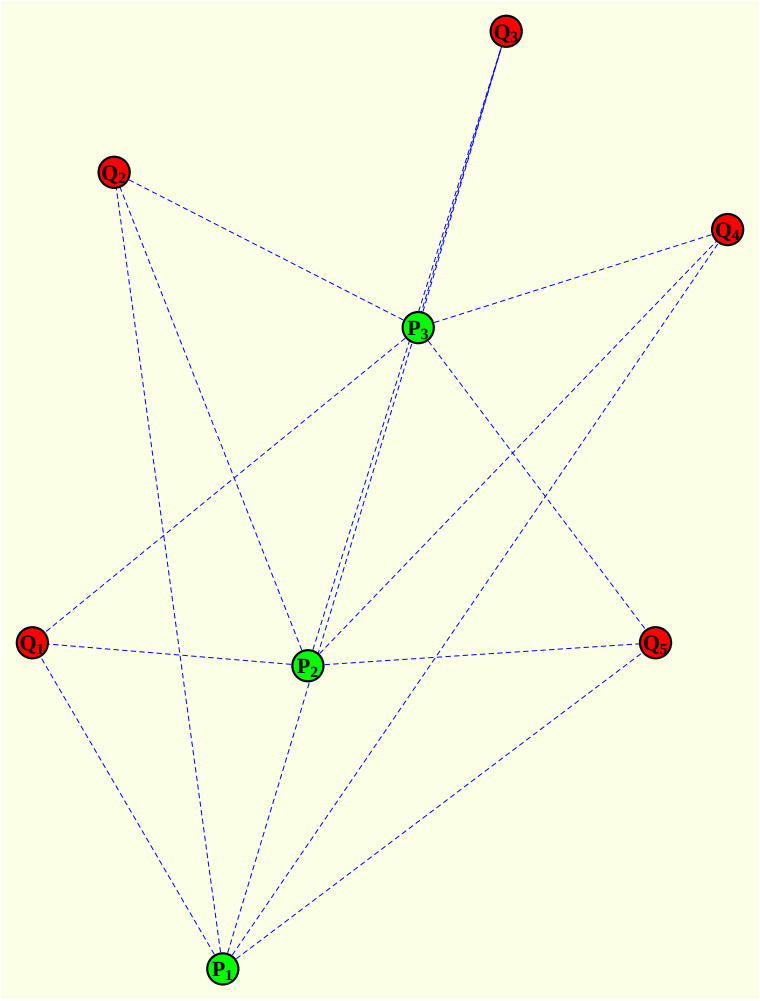


Abb. 5.3: *Die erste Lösung für das relative Achtpunktproblem für den Fall von m=3 Standpunkten und n=5 Zielpunkten, welches* CLAUSEN *im Jahre 1842 diskutiert, aber nicht an einem Beispiel durchgerechnet hat. Die Standpunkte sind hier* $\mathbf{P}_j$*, die Zielpunkte* $\mathbf{Q}_k$*. Um dem Maßstab und die Rotation festzulegen, müssen willkürlich zwei Punkte (hier* $\mathbf{Q}_1$ *und* $\mathbf{Q}_5$*) festgelegt werden.*

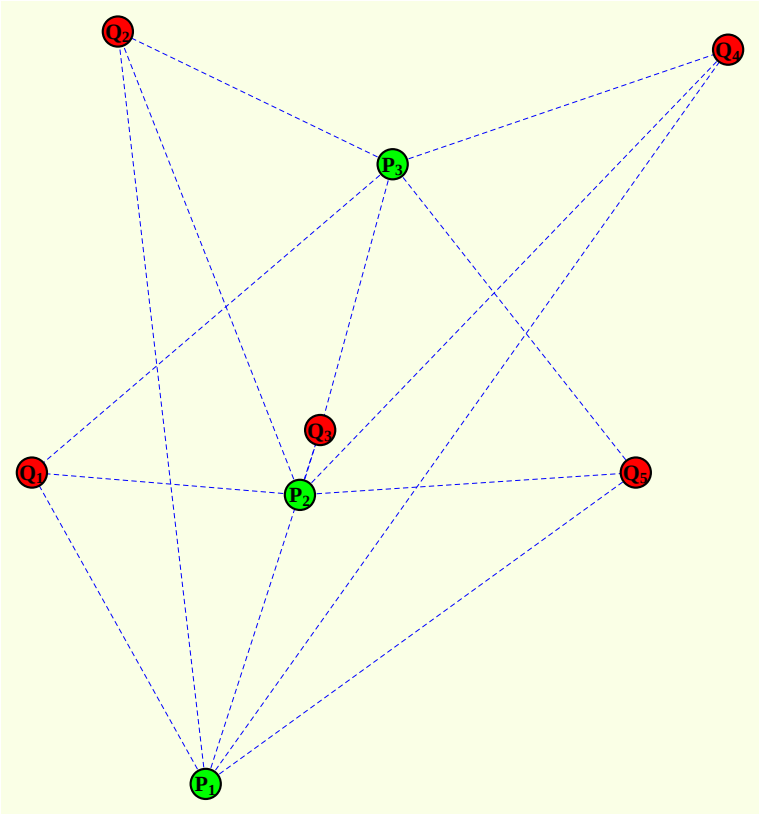


Abb. 5.4: *Die zweite Lösung für das relative Achtpunktproblem für den Fall von m=3 Standpunkten und n=5 Zielpunkten. Die Lage des Zielpunktes* $\mathbf{Q}_3$ *ist von den orientierten Winkelmessungen her physisch falsch, da dieser Punkt „rückwärts“ liegt.*

Es dürfte im 19ten Jahrhundert nicht einfach gewesen sein, vier unbekannte Landmarken an einer unbekannten Küste über eine längere Segelstrecke viermal sicher anzupeilen. Noch schwieriger dürfte es gewesen sein, fünf Landmarken von drei unterschiedlichen Schiffspositionen aus anzupeilen. Teile dieser schon sehr verwickelten Probleme wurden gegen Ende des 19. Jahrhunderts auf mehrfach verkettete Pothenotsche Aufgaben zurückgeführt, obwohl inzwischen die Vermessung neu entdeckter Küstenlinien von einem Schiff längst der vergangenen Pionierzeit des 18. Jahrhunderts angehörte ([35],[36]).

6 Das Problem der Schallortung

Während des ersten Weltkrieges entstand für französische Truppen das Problem, die Position einer nicht sichtbaren deutschen „*Riesenkanone (Parisgeschütz)*“ irgendwo im Wald an der Grenze zu Belgien nur aufgrund ihrer Schallwelle (Kanonenknall) zu bestimmen. Dazu wurden an drei bekannten Positionen (x_k, y_k) Mikrophone mit *synchronisierten Uhren* platziert, die möglichst auf Bruchteile von Sekunden genau die Ankunftszeit t_k des *gleichen* Knalls registrieren mussten (wenn diese nicht durch andere Explosionen gestört wurden, wodurch eine Zuordnung unmöglich wird). Die relevanten drei Gleichungen lauten dann in zwei Dimensionen

$$\begin{aligned}
(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 &= c_s^2 \, (t_1 - t_0)^2, \\
(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 &= c_s^2 \, (t_2 - t_0)^2, \\
(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 &= c_s^2 \, (t_3 - t_0)^2.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Die Koordinaten (x_0, y_0) sind hier die unbekannte Position der Schallquelle (Kanone), t_0 der unbekannte Zeitpunkt ihrer Explosion und c_s die Schallgeschwindigkeit. *Das System gleicht dem klassischen Apolloniusproblem zur Bestimmung eines vierten Kreises (Typ:CCC), der drei andere berührt.* Man kann in diesen drei Gleichungen die Koordinaten (x_0, y_0) eliminieren und so eine einzige Gleichung für t_0 ableiten. Diese ist von quadratischer Ordnung in t_0 und liefert somit zwei mögliche Standorte für (x_0, y_0). Die quadratische Gleichung ist in ihren Variablen aber so kompliziert und umfangreich, dass es sinnlos ist, diese explizit hinzuschreiben oder direkt durch eine Formel zu lösen. Interessant und analytisch einfach ist dagegen ihre Diskriminante Δ. Diese lautet

$$\begin{aligned}
\Delta \;=\; & \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - c_s^2 \, (t_1 - t_2)^2\right) \times \\
& \left((x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_2)^2 - c_s^2 \, (t_1 - t_3)^2\right) \times \\
& \left((x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 - c_s^2 \, (t_2 - t_3)^2\right) \times \\
& \left(x_1 \, (y_3 - y_2) + x_2 \, (y_1 - y_3) + x_3 \, (y_2 - y_1)\right)^2 .
\end{aligned}$$

Von den vier Faktoren ist der Letzte das vierfache Quadrat der Fläche, welche die drei Mikrophone durch ihren Standort in der Ebene definieren. Stehen alle drei Mikrophone in einer Reihe, ist die Diskriminante Null und es gibt nur *eine Zeitlösung* t_0. Zu dieser einzigen Zeitlösung können aber immer noch zwei unterschiedliche Standorte x_0, y_0 gehören.

Die allgemeine Lösung der drei gekoppelten Gleichungen (6.1) kann im Prinzip nur numerisch durchgeführt werden, da schon die rein algebraische quadratische Gleichung in t_0 mehrere Zeilen füllt. Im Nachhinein muss dann entschieden werden, welche der beiden Positionen die wahrscheinlichere ist. Man sieht, dass dieses Problem keine Aufgabe der *Trilateration* ist, da hier die eigentlichen Entfernungen zur Quelle nicht bekannt sind. Man misst nur die charakteristischen *Zeitstempel* t_k der Explosion an den 3 bekannten Standorten. Es versteht sich von selber, dass für eine physisch mögliche Situation immer $t_k > t_0$ sein muss (Kausalitätsprinzip). Fügt man noch ein viertes Mikrophon hinzu, ist die Position der Schallquelle im Wald *dann eindeutig*. Ein notwendiges Kriterium ist daher

$$\begin{aligned}
(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - c_s^2\,(t_1 - t_2)^2 &\geq 0 \\
(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_2)^2 - c_s^2\,(t_1 - t_3)^2 &\geq 0 \\
(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 - c_s^2\,(t_2 - t_3)^2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Relativ einfache Formeln ergeben sich, wenn die drei Mikrophone in einer Reihe im gleichen Abstand a liegen. Das algebraische System lautet dann

$$\begin{aligned}
(a + x_0)^2 + y_0^2 &= c_s^2\,(t_1 - t_0)^2, \\
x_0^2 + y_0^2 &= c_s^2\,(t_2 - t_0)^2, \\
(a - x_0)^2 + y_0^2 &= c_s^2\,(t_3 - t_0)^2.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Die Lösung der obigen Gleichungen lauten für x_0

$$x_0 = \frac{\left(a^2 - c_s^2\,(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)\right)\,(t_1 - t_3)}{2\,a\,(t_1 - 2\,t_2 + t_3)} \tag{6.3}$$

und die zwei gespiegelten Lösungen für y_0

$$y_0 = \pm\frac{\sqrt{(a^2 - c_s^2\,(t_1 - t_2)^2)(4\,a^2 - c_s^2\,(t_1 - t_3)^2)(a^2 - c_s^2\,(t_2 - t_3)^2)}}{2\,a\,c_s\,(t_1 - 2\,t_2 + t_3)} \tag{6.4}$$

Anhand dieser Formeln kann man auch das notwendige Kriterium für die Realität der Beobachtungsdaten erkennen.

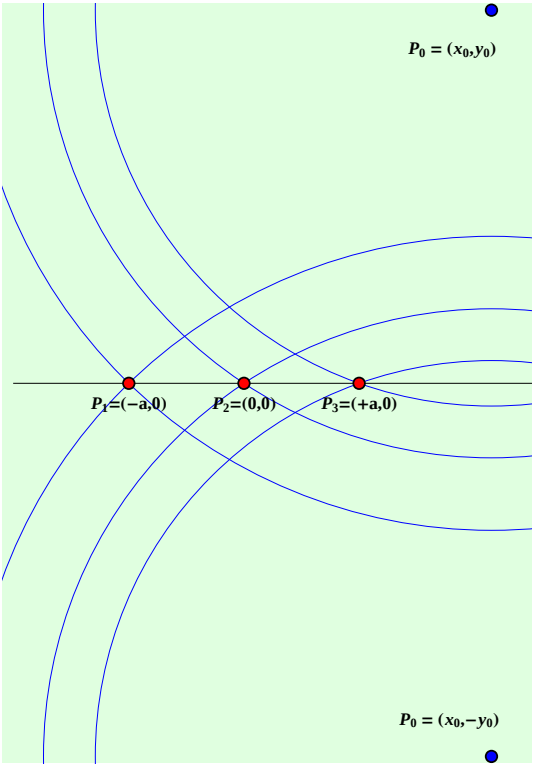


Abb. 6.1: *Schallortung einer Explosion durch Messung der drei Ankunftszeiten bei den in einer geraden Linie stehenden drei Mikrophonen P_1, P_2, P_3. Die beiden möglichen Positionen der unbekannten Quelle lauten $(x_0, \pm y_0)$.*

Ein ähnliches Problem ergibt sich, wenn von drei oder mehr der Lage nach bekannten Orten die Position einer Kapelle im Wald nur aus ihrem *regelmäßigen* abendlichen Glockengeläut abgeleitet werden soll. Auch hier benötigt man synchronisierte Uhren, aber die regelmäßigen Glockenklänge ermöglichen eine genauere Eichung. Aus all diesen Problemstellungen hat sich dann später mit Funkwellen bei unterschiedlichen Frequenzen das **Decca Navigator System** sowie das **LORAN** System, später dann in drei Dimensionen das von Satelliten unterstützte **GPS** System mit mindestens 4 Satelliten entwickelt.

Interessant ist auch die Überlegung, wie sich das relative trigonometrische Problem der acht Punkte von LAMBERT auf eine *relative multilaterale* Schallortung von n Mikrophonen und m Schallquellen übertragen läßt, deren absolute Positionen nicht bekannt sind. Hierzu gibt es in der Literatur schon Untersuchungen. Voraussetzung ist hier, das jede Schallquelle ihr eigenes Charakteristikum aufweist, welche von jedem einzelnen Mikrophon eindeutig unterschieden und zugeordnet werden kann.

7 Schlussbetrachtungen

Die geometrische Problemstellung von **Snellius - Pothenot** spielten im 19. Jahrhundert eine bedeutende Rolle - sowohl in der Geschichte der Landesvermessung als auch in der küstennahen Navigation mit Hilfe von Leuchttürmen, Bergspitzen und anderen Landmarken. Neben der Lösung mit rein trigonometrischen Funktionen gelingt es aber auch, die Koordinaten direkt – in der komplexen Zahlenebene – durch eine rationale Funktion darzustellen. Dies ist auch im baryzentrischen Kalkül von Möbius möglich. Anwendbar sind solche direkten Methoden nur mit heutigen Computern. Bestimmte Fragestellungen sind heute in der Literatur (Fachhochschulen) nicht mehr bekannt; insbesondere das Problem der *physischen Möglichkeit* von zufällig gegebenen Winkel–Daten in der Pothenotschen Aufgabe, auf das Gauss immer wieder zurückgekommen ist. Eine Analogie der Snellius – Pothenot Aufgabe in der *Trilateration* entsteht dadurch, dass man von einem unbekannten Ort die *drei Distanzen* d_1, d_2, d_3 zu drei bekannten Punkten in der Ebene misst (mit Laser – Interferometer). Auch läßt sich auf einer gekrümmten Kugeloberfläche das Pothenotsche Problem neu definieren. Hier wäre wahrscheinlich die Einführung von Quaternionen hilfreich, um die Zusammenhänge in der sphärischen Trigonometrie geeignet zu linearisieren. Es gibt natürlich auch noch eine Analogie des Winkel-Problems im dreidimensionalen Raum: Gegeben seien die Winkeldistanzen zu drei oder mehr Sternen (Pulsaren), deren galaktische Raum-Koordinaten bekannt sind, und man will die eigene Position im Raum bestimmen. An den Pioneer-Sonden wurde 1973 eine Plakette angebracht, die ein solches dreidimensionales *Winkel-Problem* zum Auffinden der Erde (Sonnensystem) mit Hilfe von Pulsarsignalen im Weltraum für „Reisende durch die Galaxis“ darstellt.

Literaturverzeichnis

[1] Bauernfeind, C. M. v. 1862: Elemente der Vermessungskunde, zweite vermehrte Auflage. Mit 580 Holzschnitten und 22 Tafeln. München, der Cotta'schen Buchhandlung, 1862

[2] Bauernfeind, C. M. v. 1873: Ein Apparat zur mechanischen Lösung der nach Pothenot und anderen benannten Aufgabe. Abhandlungen der bayrischen Akademie der Wissenschaften, 2. Kl., Bd. **11**; Grunerts Archiv, Bd. **54**, p. 81 (1873) Carl Maximilian (Max) von Bauernfeind (1818 - 1894) war ein deutscher Geodät und Brückenbau-Ingenieur. Die TU München ehrt Persönlichkeiten, die sich durch besonderes Engagement um die Hochschule verdient gemacht haben, mit der Karl Max von Bauernfeind-Medaille.

[3] Bessel, F.W. (1812): Über eine Aufgabe der praktischen Geometrie. Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd - und Himmelskunde, Band **27**, pp. 222-226

[4] Burckhard, J.C. (1801): Über eine Aufgabe der praktischen Geometrie. Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd - und Himmelskunde, Band **4**, pp. 359-362

[5] Clausen, Th. 1841: *Geometrische Auflösung der Hansenschen Aufgabe: Aus der Lage zweier bekannten Punkte die Lage zweier unbekannten Punkte zu finden.* Astronomische Nachrichten **18**, Nr. 430, p. 367-368

[6] Clausen, Th. 1842: *Auflösung einer geometrischen Aufgabe.* Astronomische Nachrichten **20**, Nr. 461, p. 69-74, Hier diskutiert Clausen das 8-Punkteproblem für den Fall m=3 und n=5, was auf eine biquadratische Gleichung führt.

[7] Collins, J. 1671: *A Solution, given by Mr. John Collins of a chorographical probleme, proposed by Richard Townley Esq. who doubtless*

hath solved the same otherwise. Phil. Trans. 1671 **6**, 2093-2096, 1 January 1671

[8] Dedekind, R. 1901: Gauß in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft zu Göttingen. Seite 45-59

[9] Font-Llagunes, J., Batlle, A.: (2009), *New Method that solves the Three-Point Resection Problem using Straight Lines Intersection*, Journal of Surveying Engineering **135**(2), 39-45. Im Abstract heißt es: The three-point resection problem, i.e., the problem of obtaining the position of an unknown point from relative angular measurements to three known stations is a basic operation in surveying engineering. Several approaches to solve this problem, graphically or analytically, have been developed in the last centuries. In this paper, a new analytical approach to solve this problem is presented. The method determines the coordinates of the unknown point by intersecting straight lines through the three stations. The required azimuths of these lines are obtained from the geometric relationship between two similar triangles. Numerical simulations that show the good performance and accuracy of this approach are also reported. Die Autoren rechnen zwar nicht mit komplexen Zahlen, aber die verschiedenen Methoden sind sich relativ ähnlich.

[10] Gauß, C.F.: Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf eine Aufgabe der practischen Geometrie. Astronomische Nachrichten **1**, Num. 6, pp. 81-86

[11] Gauß, C.F.: Auflösung einer geometrischen Aufgabe. Werke Band **4**, Seite 407.

[12] Gauß, C.F.; Die Pothenotsche Aufgabe und das Viereck. Werke Band **8**, Seite 307.

[13] Gauß, C.F.: Brief an Gerling, 24. Oktober 1840, Werke Band **8**, p. 314

[14] *Großes Handbuch der Mathematik*, Herausgeber W. Gellert, H. Küstner, M. Hellwich, H. Kästner; Gutachter H. Reichardt. Buch und Zeitverlagsges. m.b.h. Köln 1970. Inwieweit schon im 19. Jahrhundert die Tienstra - Formeln bekannt waren oder benutzt wurden, ist unklar. Für logarithmisches Rechnen waren sie sicherlich kaum geeignet.

[15] Gerling, C. 1824: *Auszug aus einem Schreiben des Herrn Professors Gerling an den Herausgeber*. Astronomische Nachrichten **3**, Nr. 62, p. 231-234 Auch Gerling, Schüler von Gauß, betrachtete schon 1824 ganz nebenbei die „Hansensche Aufgabe“

[16] Gerling, C. 1840: Die Pothenotsche Aufgabe in practischer Beziehung. Marburg, Druck und Verlag von N.G. Elwert, 1840

[17] Hansen, P.A. 1841: Eine Aufgabe aus der praktischen Geodäsie und deren Auflösung. Astronomische Nachrichten **18**, Nr. 419, p. 166-176

[18] Heindl, G.: 2019: Analysing Willerding's formula for solving the planar three point resection problem. Journal of Applied Geodesy **13**, Heft 1. pp. 27-31, (2018)

[19] Hindenburg, C.F.: Archiv der reinen und angewandten Mathematik Herausgeber C.F. Hindenburg, Band I, Erstes bis viertes Heft. In der Schäferischen Buchhandlung, Leipzig, 1795. Der Brief von Hieronymus Eschenbach ist auf Seite 123 zu finden.

[20] Hoffmann, J.J.I. 1825: Das Pothenot'sche Problem und seine Auflösungen. Zur Eröffnung der Vorlesungen an der Königl. Forst-Lehranstalt in Aschaffenburg für 1825/1826.

[21] Kästner, A.G. (1719-1800); *Geometrische Abhandlungen*. Band **1**, p. 51

[22] Lambert, J.H. (1728-1777); Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung, Im Verlag des Buchladens der Realschule, Berlin 1765 Die Pothenotsche Aufgabe wird hier auf Seite 73 (§109) behandelt. Das Buch ist eine wahre Fundgrube schwieriger trigonometrischer Aufgaben der küstennahen Navigation, welche heutzutage weitgehend vergessen sind (z.B. Seite 186 (§270)). Lambert diskutiert hier das 8-Punkteproblem für den Fall m=4 und n=4..

[23] Lelgemann, D., 2011: *Gauß und die Messkunst*, Primus Verlag, 2011, pp. 127

[24] Lueger, O. Lexikon der gesamten Technik und ihrer Hilfswissenschaften. 2. Auflage, **8** Bände, 1904-1910, postume Ergänzungsbände 1914 und 1920. Herausgeber war der Ingenieur Otto Lueger (1843-1911).

Rückwärtseinschneiden: Bd. **7** Stuttgart, Leipzig 1909., S. 527-528. Hier findet man ausführlich nur die geometrischen Konstruktionen der Aufgabe wie den Punkt von Collins sowie verschiedene Erweiterungen.

[25] Murdin, K., 2010: *Die Kartenmacher - Der Wettstreit um die Vermessung der Welt*, Artemis & Winkler, pp. 312

[26] Poppe, A. 1847: Ebene Trigonometrie in Anwendung auf Distanz - und Höhenmessung. Eine Sammlung praktischer Aufgaben und empirischer Beispiele nebst ihrer Auflösung. Verlag der S. Schmerberschen Buchhandlung, Frankfurt a. Main, (1847).

[27] Pothenot, L. 1692: Memoires de l'Academie royale des Sciences. A Paris 1730. Tome **X**, pag. 150-153. (31. Dec. 1692)

[28] Rümker, C.K.L.: Handbuch der Schiffahrtskunde. Mit einer Sammlung von Seemanns-Tafeln, zwei Seekarten, zwei Sternkarten und einer magnetischen Karte. Im Auftrage der Hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse verfaßt von C. L. Rümker, Direktor der Sternwarte und Navigationsschule in Hamburg, Mitglied der Gesellschaft zur Beförderung der Künste und nützlichen Gewerbe, der Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse in Hamburg, Mitglied der königlichen astronomischen Gesellschaft in London, der amerikanischen philosophischen Gesellschaft in Philadelphia und korrespondierendes Mitglied der mecklenburgischen naturforschenden Gesellschaft in Rostock. Fünfte mit stereotypierten Tafeln versehene Auflage, Hamburg, bei Perthes-Besser & Mauke. 1850

[29] Sartorius von Waltershausen, Walter: *Gauss zum Gedächtnis*. Wiesbaden, Dr. Martin Sändig oHg. 1965. Neudruck der Ausgabe von 1856, Hirzel Verlag, Leipzig

[30] Snellius, Willebrodus 1617: Eratosthenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate. Lugduni Batavorum [Leyden], 1617. Das Hauptwerk von Snellius zur Landesvermessung Hollands und zur Neubestimmung des Erdmeridians zwischen Alkmaar und Bergen op Zoom. Die beiden Städte haben einen Breitenunterschied von 1 Grad, dessen Bogen er zu 117.449 Yards (107.395 km) bestimmte. Der heutige Wert legt bei etwa 111 km.

[31] J.M. Tienstra (1895-1951) *was a professor and vice-president of the Delft University of Technology. From 1937 he was a member of the Netherlands Geodetic Commission. During the period 1945 - 1947 he was secretary of the Commission and from 1947 he was president until his death in 1951.* Ihm zu Ehren wurde 1998 am niederländischen Institut für Geodäsie und Geoinformatk ein Forschungs -Preis eingerichtet. [ncgeo.nl]

[32] Wagener, Gottfried 1852: Über das Pothenot'sche Problem. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde. Druck der Universitäts- Buchdruckerei von E.A. Huth, Göttingen, 1852 Gottfried Wagener (1831-1892) war ein Naturwissenschaftler und Techniker, der in Japan einen wesentlichen Anteil an der Entwicklung des dortigen Ingenieurstudiums hatte. Seit 2009 verleiht die **DIHK** in Japan jährlich den **Gottfried-Wagener-Preis** als Innovationspreis für japanische Wissenschaftler.

[33] Weber, Alfred 1909: Über den Standort von Industrien. Tübingen 1922. Verlag von J.C.B. Mohr (Paul Siebeck).In einem bemerkenswerten Anhang wird auf Wunsch von A. Weber (1868-1958) von dem österreichischen Mathematiker Georg Pick (1859-1942) die Standortbestimmung des gewichteten Torricelli-Punktes (Fermat-Punktes) im Dreieck sehr ausführlich geometrisch auseinandergesetzt.

[34] Wessel, Caspar 1797: *Om Directionens analytiske betegning („Über die analytische Repräsentation der Richtung").* Dänische Akademie der Wissenschaften. Neuere Übersetzung: *On the analytical representation of direction: an attempt applied chiefly to solving plane and spherical polygons.* Reitzel, Copenhagen 1999

[35] Weyer, G. D. E. 1883: *Construction zu einer Küstenaufnahme im Vorbeifahren, unabhängig von der Strömung und Fahrtmessung; nebst Beiträgen zur Geschichte der geometrischen Auflösungen der sogenannten Pothenotschen Aufgabe.* Ann. d. Hydr. **X**. pp. 534-549, (1883).

[36] Wunderlich, W. 1978: *Über gefährliche Annahmen beim Clausenschen und Lambertschen Achtpunktproblem.* Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. 1978, pp. 23-46.